Analyse fonctionnelle et EDP,
Examen, juin 2011
ENS, FIMFA, première année,
Durée : 3 heures, aucun document.

Aucun document, ni calculatrice ni téléphone.

Exercice 1 *Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{N}^d$ et $f \in C(\mathbb{R}^d)$ tels que*

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f \partial^\alpha \varphi$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset K$.

Sans perte de généralité on peut supposer que $K \subset Q = [0,1]^d$. Il existe $C \geq 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que $|T(\varphi)| \leq C p_{m,Q}(\varphi)$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset Q$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}_Q$ (i.e. $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathrm{supp}(\varphi) \subset Q$) et $x = (x_1, ..., x_d) \in Q$ on a

$$\varphi(x) = \int_0^{x_1} .... \int_0^{x_d} \frac{\partial^d}{\partial x_1 ... \partial x_d} \varphi(y) dy = \int_{\Pi_i [0, x_i]} D_0 \varphi(y) dy$$

avec $\alpha_0 = (1, ..., 1)$ et $D_0 = \partial^{\alpha_0}$ de sorte que

$$\|\varphi\|_{L^\infty(Q)} \leq \|D_0 \varphi\|_{L^1(Q)}$$

et en itérant l'argument pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$,

$$\|\partial^\beta \varphi\|_{L^\infty(Q)} \leq \|D_0^{|\beta|+1} \varphi\|_{L^1(Q)}.$$

Ainsi pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_Q$, on a $T(\varphi) \leq C \|D_0^{m+1} \varphi\|_{L^1(Q)}$ mais comme D_0 est injectif sur $\mathcal{D}_Q$, D_0^{m+1} est aussi injectif donc on a $T(\varphi) = S(D_0^{m+1} \varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_Q$ où S est une forme linéaire sur $E := D_0^{m+1}(\mathcal{D}_Q)$ vérifiant $S(\psi) \leq C \|\psi\|_{L^1(Q)}$ pour tout $\psi \in E$, le théorème de Hahn-Banach permet ainsi de prolonger S en un élément de $L^1(Q)' = L^\infty(Q)$ de sorte qu'il existe $g \in L^\infty(Q)$ tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_Q$ (et donc a fortiori tout $\varphi \in \mathcal{D}_K$) on ait:

$$T(\varphi) = S(D_0^{m+1} \varphi) = \int_Q g D_0^{m+1} \varphi$$

prolongeant g par 0 en dehors de Q et posant

$$f(y) := (-1)^d \int_0^{y_1} .... \int_0^{y_d} g, \forall y \in \mathbb{R}^d$$

de sorte que f est continue, en intégrant par parties d fois, il vient donc que

$$T(\varphi) = \int_Q g D_0^{m+1} \varphi = \int_{\mathbb{R}^d} f D_0^{m+2} \varphi$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_Q$.

Exercice 2 *Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^3$, on se propose de montrer l'existence d'une solution non triviale de l'équation:*

$$\begin{cases} -\Delta u = u^3 \ \text{dans } \Omega \\ u = 0, \ \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

1. *Montrer l'existence d'une solution au problème*

$$\inf\left\{\int_\Omega |\nabla v|^2 \ : \ v \in H_0^1(\Omega), \ \int_\Omega v^4 = 1\right\} \tag{1}$$

   On est en dimension 3, on sait que $H_0^1(\Omega)$ s'injecte continûment dans $L^q(\Omega)$ pour $q \in [1,6]$ et que cette injection est compacte (Rellich-Kondrachov) pour $q \in [1,6[$ et donc en particulier pour $q = 4$. Si on prend une suite minimisante, on peut donc en extraire une sous suite qui converge fortement dans L^4 et dont les gradients convergent faiblement dans L^2, avec la semi-continuité inférieure faible de la norme L^2 on obtient facilement que la limite de cette sous-suite résout le problème ci-dessus.

2. *Montrer que si v résout (1) il existe $\lambda > 0$ tel que $-\Delta v = \lambda v^3$ dans Ω.*

   Soit $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $\|v + \varepsilon\varphi\|_{L^4} > 0$, on a alors

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 \leq \int_\Omega \frac{|\nabla v + \varepsilon\nabla\varphi|^2}{\|v + \varepsilon\varphi\|_{L^4}^2}$$

   en effectuant un DL à l'ordre 1 en ε, il vient donc

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla v|^2 &\leq \Big(\int_\Omega |\nabla v|^2 + 2\varepsilon\nabla v \cdot \nabla\varphi + o(\varepsilon)\Big)\Big(1 - 2\varepsilon\int_\Omega v^3\varphi + o(\varepsilon)\Big) \\ &= \int_\Omega |\nabla v|^2 + 2\varepsilon\Big(\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla\varphi - \|\nabla v\|_{L^2}^2 \int_\Omega v^3\varphi\Big) + o(\varepsilon) \end{aligned}$$

   de sorte que $\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla\varphi - \|\nabla v\|_{L^2}^2 v^3\varphi \geq 0$ mais comme φ est arbitraire nous en déduisons bien le résultat voulu avec $\lambda = \|\nabla v\|_{L^2}^2 > 0$.

3. *Conclure.*

   Il suffit de prendre $u = \lambda^{1/2} v \neq 0$ car $\|v\|_{L^4} = 1$.

Exercice 3 *Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$, on pose $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^d) := \{u := (u_1, ..., u_d), \ u_i \in H_0^1(\Omega), \ i = 1, .., d\}$ pour $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ on définit $\varepsilon(u) := \frac{1}{2}(Du + Du^T) \in L^2(\Omega)^{d\times d}$ i.e. $\varepsilon(u)_{ij} := \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$.*

1. *Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que $\|u\|_{H^1} \leq C\|\varepsilon(u)\|_{L^2}$ pour tout $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ (inégalité de Korn).*

Par densité, il suffit de montrer le résultat pour $u \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$, pour un tel u, on a:

$$\int_\Omega (\partial_i u_j + \partial_j u_i)^2 = \int_\Omega (\partial_i u_j)^2 + (\partial_j u_i)^2 + 2\partial_j u_i \partial_i u_j$$
$$= 2\|Du\|_{L^2}^2 + 2\int_\Omega \partial_i u_i \partial_j u_j = 2\|Du|_{L^2}^2 + 2\|\mathrm{div}(u)\|_{L^2}^2$$

(on a intégré par parties le second terme et utilisé la symétrie des dérivées secondes) de sorte que $\|\varepsilon(u)\|_{L^2}^2 \geq \frac{1}{2}\|Du\|_{L^2}^2 \geq C\|u\|_{H^1}^2$, la dernière inégalité découlant de l'inégalité de Poincaré.

2. *Soit $g_1, ..., g_d$ dans $H^{-1}(\Omega)$ montrer que le système*

$$-\Delta u_j - \mathrm{div}(\partial_j u) = g_j,\ u_j|_{\partial\Omega} = 0,\ j = 1, ..., d,$$

possède une unique solution faible.

Pour (u, v) dans $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ posons

$$a(u, v) := \frac{1}{2}\int_\Omega (Du + Du^T)\cdot(Dv + Dv^T) = \frac{1}{2}\int_\Omega (\partial_i u_j + \partial_j u_i)(\partial_i v_j + \partial_j v_i)$$

a est une forme bilinéaire, clairement continue et aussi coercive sur $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ en vertu de l'inégalité de Korn. Il découle alors du théorème de Lax-Milgram qu'il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ tel que pour tout $v \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ on ait $a(u, v) = \langle g, v\rangle$ c'est-à-dire

$$\int_\Omega \nabla u_j \cdot \nabla v_j + \nabla v_j \cdot (\partial_j u) = \langle g_j, v_j\rangle$$

ou encore pour tout j,

$$-\Delta u_j - \mathrm{div}(\partial_j u) = g_j.$$

Exercice 4 1. *Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$ et λ_1, la première valeur propre (la plus petite) de $-\Delta$ avec condition de Dirichlet homogène sur $\partial\Omega$, montrer que*

$$\lambda_1 = \inf\left\{\int_\Omega |\nabla u|^2\ :\ u \in H_0^1(\Omega),\ \int_\Omega u^2 = 1\right\}$$

et caractériser les fonctions propres associées à λ_1 en termes du problème ci-dessus.

Soit μ la valeur du problème ci-dessus (qui est aussi l'infimum du quotient de Rayleigh $\|\nabla u\|_{L^2}^2/\|u\|_{L^2}^2$ sur les fonctions non nulles de H_0^1). En procédant comme à l'exercice 2, le problème ci-dessus possède au moins une solution v qui vérifie $-\Delta v = \mu v$ ainsi $\mu \geq \lambda_1$. Si u est une fonction propre associée à λ_1 en multipliant $-\Delta u = \lambda_1 u$ par u, il vient que $\int_\Omega |\nabla u|^2 = \lambda_1 \int_\Omega u^2 \geq \mu \int_\Omega u^2$, ainsi $\mu = \lambda_1$. De la même manière, on montre que u est fonction propre associées à λ_1 si et seulement si $u/\|u\|_{L^2}$ est solution du problème ci-dessus.

2. *Montrer que si u est une fonction propre associée à λ_1 et $u_+ \neq 0$ alors u_+ est aussi une fonction propre associée à λ_1.*

   On remarque que $\int_\Omega |\nabla v|^2 - \lambda_1 v^2 \geq 0$ pour tout $v \in H_0^1$ et que $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \neq 0$ et $\int_\Omega |\nabla v|^2 - \lambda_1 v^2 = 0$ équivaut au fait que v soit une fonction propre associée à λ_1. On remarque ensuite que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda_1 u^2 \\ &= \int_\Omega |\nabla u_+|^2 - \lambda_1 u_+^2 + \int_\Omega |\nabla u_-|^2 - \lambda_1 u_-^2 \end{aligned}$$

   chacun des deux termes est donc nul de sorte que si $u_+ \neq 0$ alors u_+ est aussi une fonction propre associée à λ_1 (idem pour u_- d'ailleurs).

3. *Soit $T > 0$, $u \in C([0,T], L^2(\Omega)) \cap C(]0,T], H_0^1(\Omega)) \cap C^1(]0,T), L^2(\Omega))$ solution de l'équation de la chaleur*

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \text{ dans } (0,T) \times \Omega$$

   Montrer que $\|u(t,.)\|_{L^2} \leq e^{-\lambda_1 t}\|u(0,.)\|_{L^2}$. En déduire un résultat d'unicité puis justifier que ce qui précède s'étend au cas où $\Omega :=]0,1[^2$ (qui n'est pas régulier).

   Comme $u \in C^1(]0,T), L^2(\Omega))$ pour $0 < t < t+h < T$ on a

$$u(t+h,.) = u(t,.) + \partial_t u(t,.)h + o_{L^2}(h)$$

   ainsi $f(t) := \|u(t,.)\|_{L^2}^2$ est dérivable et l'on a

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2\int_\Omega \partial_t u(t,x)u(t,x)dx = 2\langle \Delta u(t,.), u(t,.)\rangle \\ &= -2\int_\Omega |\nabla u(t,.)|^2 \leq -2\lambda_1 \int_\Omega u(t,.)^2 = -2\lambda_1 f(t) \end{aligned}$$

   ainsi $f(t) \leq f(0)e^{-2\lambda_1 t}$ ou encore $\|u(t,.)\|_{L^2} \leq e^{-\lambda_1 t}\|u(0,.)\|_{L^2}$.

   Par différence on en déduit un résultat d'unicité pour le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur avec second membre (dans L^2 par exemple). Tout ce qui précède s'étend au cas du carré car finalement on a uniquement utilisé l'inégalité de Poincaré et l'injection compacte de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ (qui est encore valable sur le carré).

4. *Pour $\Omega :=]0,1[^2$, trouver une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ formée de fonctions propres $-\Delta$ avec condition de Dirichlet homogène sur $\partial\Omega$ (ainsi que les valeurs propres associées).*

   On commence par traiter le cas de la dimension 1, c'est à dire qu'on cherche des solutions de $-u'' = \lambda u$ sur $(0,1)$ avec $u(0) = u(1)$ et $\int_0^1 u^2 = 1$, une base Hilbertienne de fonctions propres dans $L^2(0,1)$ nous est fournie par la famille e_k:

   $$e_k(t) := \sqrt{2}\sin(k\pi t), \text{ associée à la valeur propre } k^2\pi^2,\ k \in \mathbb{N}^*.$$

   Sur le carré, $\Omega :=]0,1[^2$, la famille

   $$u_{kl}(x_1,x_2) := e_k(x_1)e_l(x_2) = 2\sin(k\pi x_1)\sin(k\pi x_2)$$

   est une famille orthonormée de fonctions propres du laplacien associées aux valeurs propre $\lambda_{kl} := (k^2+l^2)\pi^2$, $(k,l) \in \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$. Reste à montrer que cette famille est une base hilbertienne, pour cela on remarque que l'espace vectoriel engendré par les fonctions de la forme $(x_1,x_2) \in \Omega \mapsto f(x_1)g(x_2)$ avec f,g dans $L^2(0,1)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ et on utilise le fait que $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une Hilbertienne de $L^2(0,1)$.

5. *Toujours pour $\Omega :=]0,1[^2$, résoudre explicitement l'équation de la chaleur avec les conditions aux limites suivantes*

   $$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x) \ \textit{dans }]0,T[\times\Omega \\ u = 0, \ \textit{sur } \partial\Omega \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

   où $T > 0$ et l'on a supposé $u_0 \in L^2$ et $f \in C(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega))$.

   On cherche évidement une solution sous la forme $\sum_{kl}\alpha_{kl}(t)u_{kl}(x)$, puis (supposant a priori qu'on peut dériver en t terme à terme, ce qui pourra être justifié a posteriori) on résout pour chaque k,l l'équation différentielle ordinaire vérifiée par α_{kl}:

   $$\dot\alpha(t) + \lambda_{kl}\alpha(t) = \langle f(t,.), u_{kl}\rangle_{L^2},\ \alpha(0) = \langle u(0,.), u_{kl}\rangle_{L^2}.$$

   Qu'on résout explicitement

   $$\alpha_{kl}(t) = \langle u(0,.), u_{kl}\rangle e^{-\lambda_{k,l}t} + \int_0^t \langle f(s,.), u_{kl}\rangle_{L^2} e^{\lambda_{kl}(s-t)}ds.$$

   de sorte que

   $$u(t,x) = \sum_{k,l\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*} \alpha_{kl}(t)u_{kl}(x)$$

   où α_{kl} est donnée comme ci-dessus et u_{kl} et λ_{kl} comme à la question précédente résout l'équation de la chaleur avec second membre f.

Exercice 5 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ de mesure finie (pour simplifier) et T un endomorphisme continu de $L^2(\Omega)$* local *c'est à dire tel que* $\mathrm{supp}(Tu) \subset \mathrm{supp}(u)$ *pour tout $u \in L^2(\Omega)$. Montrer qu'il existe $v \in L^\infty(\Omega)$ tel que $T(u) = uv$ pour $u \in L^2(\Omega)$ (on pourra commencer par montrer que $T(\chi_A u) = \chi_A T(u)$ puis que $T(\chi_\Omega) \in L^\infty$).*

Soit A mesurable $A \subset \Omega$ et $u \in L^2(\Omega)$, montrons que $T(\chi_A u) = \chi_A T(u)$. Comme la mesure de Lebesgue est régulière pour tout $n \geq 1$ il existe K_n compact inclus dans A tel que $|A \setminus K_n| \leq n^{-2}$, on a alors $\|\chi_{K_n} u - \chi_A u\|_{L^2} \leq n^{-1}\|u\|_{L^2}$ de sorte que $T(\chi_{K_n} u) \to T(\chi_A u)$ dans L^2, comme $\mathrm{supp}(\chi_{K_n} u) \subset K_n \subset A$, on a $\chi_{\Omega\setminus A} T(\chi_{K_n} u) = 0$ et donc en passant à la limite $T(\chi_A u) = 0$ p.p. sur $\Omega \setminus A$. Comme $T(u) = T(\chi_A u) + T(\chi_{\Omega\setminus A} u)$, par l'argument précédent, le second terme est nul p.p. sur A et donc $T(\chi_A u) = \chi_A T(u)$. Montrons maintenant que $v := T(\chi_\Omega) \in L^\infty$ et plus précisément que $\|v\|_{L^\infty} \leq \|T\|$. Supposons que tel ne soit pas le cas, alors pour $\delta > 0$ assez petit, $A_\delta := \{|v| \geq \|T\| + \delta\}$ est de mesure strictement positive, on a alors

$$\|T\||A_\delta|^{1/2} \geq \|T(\chi_{A_\delta})\|_{L^2} = \|\chi_{A_\delta} v\|_{L^2} = \Big(\int_{A_\delta} v^2\Big)^{1/2} \geq (\|T\| + \delta)|A_\delta|^{1/2}$$

ce qui constitue la contradiction recherchée. Si u est une fonction étagée $u = \sum \alpha_i \chi_{A_i}$, on déduit de ce qui précède que $T(u) = \sum \alpha_i \chi_{A_i} T(\chi_\Omega) = uv$, on conclut grâce à la densité des fonctions étagées et à la continuité de T.