Math for economists
Tutorials
G. Carlier and F. Santambrogio

Some of the exercises are in english, some in french. At least, I translated the ones I had in italian.

Differential calculus and optimization in $\mathbb{R}^n$

Exercice 1 *Let $M^{n\times n}$ be the set of real square matrices of size n, endowed with the usual topology of the euclidean space. Prove that the set U of non-singular matrices is an open set and consider the map $F : U \to M^{n\times n}$ given by*

$$F(A) = A^{-1}.$$

Prove that it is C^1 and compute its differential at any point $A \in U$.

Exercice 2 *In the same space $M^{n\times n}$ consider the subset $\mathcal{O} = \{O \in M^{n\times n} : OO^t = I\}$ of orthogonal matrices.*

1. *Prove that $< A, B >:= tr(AB^t)$ defines a scalar product on $M^{n\times n}$ and that $M^{n\times n}$ inherits the structure of a finite dimensional Hilbert space.*
2. *Prove that $\mathcal{O}$ is compact.*
3. *Take $A \in M^{n\times n}$ and look for $O \in \mathcal{O}$ that minimizes $||O - A||$ (i.e. the projection of A on the set of orthogonal matrices). Prove that we have $A = SO$, for a symmetric and positive definite matrix S.*

Exercice 3 *Consider the set*

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 = x^2\}$$

and say whether it is an implicit regular curve, represent it as the union of two regular curves and as the union of two graphs and draw in the plan both C and the set A given by

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 \le x^2\}.$$

Exercice 4 *Compute the maximum and the minimum, provided they exist, of the function*

$$f(x, y) = x + y^2$$

on the set A of Exercice 3.

Exercice 5 *Déterminer si le problème suivant possède des solutions:*

$$\inf_{(x,y)\in E\subset\mathbb{R}^2} f(x,y) := x^2 - xy$$

dans les cas suivants: i) $E = \mathbb{R}^2$, *ii)* $E := \mathbb{R}\times[0,1]$, *iii)* $E = [0,1]\times\mathbb{R}$, *iv)* $E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, 4y^2 - x^2 \le 0\}$.

Exercice 6 *Soit* $f \in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ *telle que:*

$$\frac{f(x)}{\|x\|} \to +\infty \text{ quand } \|x\| \to +\infty$$

montrer que ∇f *est surjective.*

Exercice 7 . *Let* $f \in C^1([0,1])$ *be a strictly convex function. Solve*

$$\min\left\{\sum_{i=1}^n f(x_i) \,:\, x_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^n x_i = 1\right\}.$$

Exercice 8 *On s'intéresse au problème:*

$$\inf\{\frac{1}{2}(x-2)^4 + y^2 \,:\, x^2 - y^2 \le 0\}$$

1. *Montrer que ce problème possède au moins une solution.*
2. *Montrer que si* (x,y) *est solution alors* $x^2 = y^2$.
3. *Résoudre le problème.*

Fixed point theorems

Exercice 9 *Let* $f :]a,b[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *be continuous and bounded and* $x_0 \in]a,b[$. *Prove existence of at least a solution of the Cauchy Problem*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x(t)) & \text{for } t \in]a,b[\\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

by means of a fixed-point argument.

Exercice 10 *Let* $v : B \to \mathbb{R}^n$ *be a continuous vector function on the* $n-$*dimensional closed unit ball* $B = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |x| \le 1\}$. *Suppose that for every* $x \in \partial B$ *we have* $v(x)\cdot x > 0$. *Prove that* v *vanishes at at least one point of* B.

Prove the same result under the weaker assumption $v(x)\cdot x \ge 0$ *for all* $x \in \partial B$.

Exercice 11 *Did you solve Exercice 10 by using Brower's Theorem? ok, now prove Brower's Theorem starting from the statement of Exercice 10.*

Topology and functional spaces

Exercice 12 *Sur* $\mathbb{R}^2$*, dire si l'application suivante définit une distance:*

$$f(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|^3.$$

Exercice 13 *Soit* (E, N) *un evn et* F *un sev de dimension finie de* E*. Montrer que* F *est fermé.*

Exercice 14 *Let* X *be a compact metric space,* $(f_n)_n$ *a sequence of real-valued functions on* X *and* $f : X \to \mathbb{R}$ *a continuous function.*

1. *Prove that* f_n *converges uniformly to* f *if and only if* $f_n(x_n)$ *converges to* $f(x)$ *for every sequence* x_n *converging to* x *and every* $x \in X$*.*

2. *Prove that* f_n *converges uniformly to* f *if and only if for every continuous function* $g : X \to \mathbb{R}$ *we have* $\min_X f_n + g \to \min_X f + g$

Exercice 15 *Soit* E *l'espace vectoriel des fonctions continues bornées de* $\mathbb{R}_+$ *dans* $\mathbb{R}$*, pour* $f \in E$ *on pose:*

$$N(f) := \int_0^{+\infty} e^{-t}|f(t)|dt.$$

Montrer que N *est bien définie et est une norme sur* E*. Soit* $f_0 \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *une fonction telle que* $f_0 = 0$ *en dehors de* $[0, 1]$ *et soit* $f_n(t) := f_0(t - n)$*. Etudier la convergence de* (f_n) *dans* (E, N)*.*

Soit maintenant:

$$g_n(t) := \min(n, e^{t/2})$$

Montrer que (g_n) *est de Cauchy dans* (E, N) *mais que* (g_n) *ne converge pas dans* (E, N)*. Conclure.*

Exercice 16 *Let* $f :]a, b[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *be continuous and bounded and* $x_0 \in]a, b[$*. Prove existence of at least a solution of the Cauchy Problem*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) & \text{for } t \in]a, b[\\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

by approximating f *through more regular functions and applying a suitable compactness theorem.*

Exercice 17 *Let* $E = C^0([0, 1])$ *be the space of real-valued continuous functions on* $[0, 1]$ *with the usual topology (the topology of uniform convergence) and* $N \subset E$ *be the set of those functions which are nowhere differentiable. Prove that* N *is dense in* E *(hint: prove that its complement is actually contained in a countable union of empty-interior closed sets and use Baire's theorem).*

Convexity and separation

Exercice 18 *The usual separation theorem for convex sets separates strictly two disjoint convex sets, provided one is closed and the other one is compact. We often apply it to the case of the compact being a point. Yet, in finite dimension we can prove something somehow stronger: let $x_0 \in \mathbb{R}^n$ and $C \in \mathbb{R}^n$ be any convex set; then there exists $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$ such that*

$$p \cdot x_0 \leq p \cdot x \quad \text{for all } x \in C.$$

Prove this result.

Exercice 19 *Let H be an Hilbert space: take a function $f : H \to \mathbb{R}$, a point $x_0 \in H$ and a vector $p \in H$. We say that p is a subgradient of f at x_0 and we write $p \in \partial f(x_0)$ (the set $\partial f(x_0)$ being called the subdifferential of f at x_0) if the following inequality holds:*

$$f(x) \geq f(x_0) + p \cdot (x - x_0) \quad \text{for all } x \in H.$$

Prove that for f convex and $H = \mathbb{R}^n$ every point admits at least a subgradient (i.e. $\partial f(x_0) \neq \emptyset$ for every $x_0 \in H$). By the way, the concept of subdifferential is not that interesting for non-convex functions, unless one inserts some $o(|x - x_0|$ term, to retrieve the usual gradient in case of differentiability.

Exercice 20 *Consider the following function on $\mathbb{R}^n$:*

$$f(x_1, ..., x_n) := \max(x_1, ..., x_n).$$

Study its differentiability. Is it convex? if yes, find its subdifferential at every point.

Exercice 21 *Let H be a Hilbert space and $f : H \to \mathbb{R}$ a convex and lower semi-continuous function. Let $\mathcal{A}_f$ the set of all affine functions smaller than f:*

$$\mathcal{A}_f := \{g : H \to \mathbb{R} \,:\, g \leq f,\, \exists p \in H, b \in \mathbb{R} \,:\, g(x) = p \cdot x + b\}.$$

We want to prove that $f = \sup\{g \,:\, g \in \mathcal{A}_f\}$.

1. *Prove that the set Epi(f) $:= \{(t, x) \in \mathbb{R} \times H \,:\, t \geq f(x)\}$ is convex and closed in $\mathbb{R} \times H$ (endowed with the standard product topology).*
2. *Take $t_0 < f(x_0)$ and, by separation (use Hahn-Banach on Epi(f) and $\{(t_0, x_0)\}$) prove that there exists $g \in \mathcal{A}_f$ with $g(x_0) \geq t_0$.*
3. *Conclude.*

Notice that the same result actually stays true for more general spaces and functions also taking the value $+\infty$. But it requires some more work...

Exercice 22 *For all functions $f : H \to \mathbb{R}$, defined on a Hilbert space H, let $f^* : H \to \mathbb{R} \cup +\infty$ be its Legendre-Flenchel transform, defined by*

$$f^*(p) := \sup_{x \in H} p \cdot x - f(x).$$

We also define its bi-transform by

$$f^{**}(x) := \sup_{p \in H} p \cdot x - f^*(p).$$

1. *Prove that f^* is convex and lower semi-continuous on H.*

2. *Prove that $f^{**} \leq f$ for any f.*

3. *Prove that $f^{**} = f$ if and only if f is convex and lower semi-continuous.*

Exercice 23 *Let K and H be compact and convex subsets of two finite-dimensional vector spaces and $f : K \times H \to \mathbb{R}$ a function satisfying*

- *for all $x \in K$ the map $y \mapsto f(x, y)$ is concave;*

- *for all $y \in H$ the map $x \mapsto f(x, y)$ is convex.*

Prove that there exists a point $(x_0, y_0) \in K \times H$ such that

$$\inf_{x \in K} \sup_{y \in H} f(x, y) = f(x_{0,0}) = \sup_{y \in H} \inf_{x \in K} f(x, y).$$

Give interpretations of this result in terms of a zero-sum game.

Dynamical programming in discrete time

Exercice 24 *On considère le problème suivant:*

$$\sup_{(x_1,x_2,x_3)} \{f(x_1, x_0) + g(x_2, x_1) + h(x_3, x_2) \colon\ x_i \in \Gamma_{i-1}(x_{i-1}),\ i = 1, 2, 3\}$$

avec $x_0 \geq 0$ donnée,

$$\Gamma_0(x_0) := [0, x_0^4 + 2x_0 + 3],\ \Gamma_1(x_1) := [\frac{x_1}{2}, x_1^2 + x_1],\ \Gamma_2(x_2) := [0, \frac{x_2^2 + 4}{x_2^2}];$$

$$f(x_1, x_0) := 2x_1 x_0 - x_1^2 + x_1,\ g(x_2, x_1) = -\frac{1}{2x_2} + x_2 x_1 - \frac{1}{2} x_2^2$$

et:

$$h(x_3, x_2) := \sqrt{x_3} - \frac{1}{2} x_3 x_2.$$

1. *Exprimer ici le principe de la programmation dynamique puis en déduire des relations reliant les fonctions valeurs aux différentes dates.*

2. *Calculer ces fonctions valeurs.*

3. *Calculer les politiques optimales.*

Exercice 25 *On s'intéresse au problème suivant:*

$$\sup_{(k_t)} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \mathrm{Log}(k_t^\alpha - k_{t+1}) \tag{1}$$

sous les contraintes: $k_0 = k > 0$ *donnée et* $k_{t+1} \in [0, k_t^\alpha]$ *pour tout* $t \geq 0$. *On note* $W(k)$ *(pour* $k > 0$*) la valeur de ce problème, enfin* α *et* β *sont deux constantes appartenant à* $]0, 1[$.

1. *Donner la motivation économique de (1).*

2. *Soit* v *définie pour* $k > 0$ *par:*

   $$v(k) := \frac{\alpha \mathrm{Log}(k)}{1 - \alpha\beta}$$

   montrer que $W \leq v$.

3. *Montrer que* W *est solution de l' équation de Bellman:* $f = Tf$ *avec* T *l'opérateur défini par*

   $$Tf(x) := \sup_{y \in [0, x^\alpha]} \mathrm{Log}(x^\alpha - y) + \beta f(y)$$

   pour tout $x > 0$.

4. *Pourquoi ne peut on pas affirmer ici directement que* W *est l'unique solution de l'équation de Bellman.*

5. *Montrer que* $Tv = v + c$ *avec* c *une constante négative à déterminer.*

6. *Calculer les itérées* $T^n v$ *pour* $n \in \mathbb{N}$, *montrer que cette suite converge vers une limite* v_∞ *que l'on explicitera. Montrer enfin que* $Tv_\infty = v_\infty$.

7. *Montrer que* $W \leq v_\infty$.

8. *Montrer que* $W \geq v_\infty$ *(plus difficile) et conclure.*

9. *Montrer que le problème (1) admet une solution unique que l'on calculera, on notera* (k_t^*) *cette politique optimale.*

10. *Etudier la dynamique optimale* k_t^* *(monotonie, convergence) et conclure.*

Calculus of variations and optimal control in continuous time

Exercice 26 *Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be a convex function. Find a solution to the problem*

$$\min\left\{\int_0^1 f(x'(t))dt \,:\, x \in C^1([0,1]),\, x(0) = x_0,\, x(1) = x_1\right\}.$$

Prove that the solution is unique if f is strictly convex. Compare the result to Exercise 7.

Exercice 27 *Consider the problem*

$$\min\left\{\int_0^1 \sqrt{\frac{1+|u'(t)|^2}{u_0 - u(t)}}dt,\ u(0) = u_0,\ u(1) = u_1,\ u \leq u_0\right\}.$$

1. *Explain its meaning in term of the brachistochrone problem.*
2. *Consider the change of variables $u_0 - u = y^2$ and re-write the problem in terms of y.*
3. *Prove uniqueness of the solution and write the Euler equation satisfied by y.*

Exercice 28 *On s'intéresse au problème suivant:*

$$\inf_{x(.)} J(x) := \int_0^1 t\dot{x}^2(t)dt \,:\, x(0) = 1,\, x(1) = 0$$

1. *Calculer $J(x_N)$ avec x_N la fonction valant 1 sur $[0, 1/N[$ et*
$$x_N(t) = -\frac{\mathrm{Log}(t)}{\mathrm{Log}(N)}$$
pour $t \in [1/N, 1]$.
2. *Montrer que l'infimum du problème est 0.*
3. *Cet infimum est-il atteint?*
4. *Conclure.*

Exercice 29 *Résoudre le problème:*

$$\inf_{x(.)} J(x) := \int_0^1 [\dot{x}^2(t) + x^2(t)]dt$$

dans les cas suivants:

1. *Sans conditions aux limites,*

2. *Avec les conditions* $x(0) = 0$, $x(1) = 1$.
3. *Avec la condition* $x(0) = 1$.

Exercice 30 *Résoudre le problème:*

$$\inf_{x(.)} J(x) := \int_0^1 [\dot{x}^2(t) + tx(t)]dt + x^2(1)$$

dans les cas suivants:

1. *Sans conditions aux limites,*
2. *Avec la condition* $x(0) = 1$.

Exercice 31 *Pour* $x > 0$ *donné et* $T > 0$, *on s'intéresse au problème de contrôle optimal:*

$$\inf\{x(T) : x(0) = x, \dot{x}(t) = -u(t)x(t) + \frac{1}{2}u^2(t),\ u(t) \in \mathbb{R}\}$$

1. *Former le pré-Hamiltonien* $\underline{H}(t, x, u, p)$ *du problème et calculer le Hamiltonien* $H(t, x, p) = \inf_u H(t, x, u, p)$.
2. *Ecrire les conditions nécessaires fournies par le principe de Pontriaguine. A quelle difficulté a-t-on à faire ici?*
3. *Trouver une solution* (x^*, p^*) *du système Hamiltonien fourni par le principe de Pontriaguine, calculer aussi* u^* *le contrôle associé , calculer enfin* $x^*(T)$.
4. *Reprendre les deux questions précédentes pour le problème avec instant initial* $0 < t < T$ *et état initial* $x > 0$.
5. *Donner l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman du problème. Puis déterminer rigoureusement la valeur optimale* $V(t, x)$ *associée à la condition initiale* x *à l'instant initial* t *(*$x > 0$ *et* $0 < t < T$*).*
6. *Calculer un contrôle optimal en rétroaction (ou feedback).*
7. *En utilisant les résultats précédents, dire si* u^* *est un contrôle optimal. Est-ce le seul?*

Exercice 32 *Pour* $x \in \mathbb{R}$ *donné, on s'intéresse au problème de contrôle optimal:*

$$\inf\{\int_0^T \frac{1}{2}u^2(s)ds + x(T) : x(0) = x,\ \dot{x}(t) = x(t) + u(t),\ u(t) \in \mathbb{R}\}$$

1. *Former le pré-Hamiltonien* $\underline{H}(t, x, u, p)$ *du problème et calculer le Hamiltonien* $H(t, x, p) := \inf_u H(t, x, u, p)$.

2. *Ecrire le système d'équations différentielles et les conditions aux limites satisfaites par une trajectoire optmale et la variable adjointe associée.*

3. *Résoudre le système précédent on notera* (x^*, p^*) *sa solution.*

4. *Donner une équation aux dérivées partielles et une condition aux limites vérifiées par la valeur du problème.*

5. *Trouver une solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman précédente (avec la même condition aux limites).*

6. *Montrer que* x^* *est une trajectoire optimale, donner un contrôle optimal* u^**, donner également un contrôle optimal en feedback (i.e. sous la forme* $v(t, x)$*).*

7. *Résoudre le problème initial en utilisant le formalisme du calcul des variations.*