UFR Mathématiques de la décision

Notes de cours

CALCUL DIFFERENTIEL ET OPTIMISATION

Guillaume CARLIER

L3, année 2008-2009

Ces notes de cours sont constituées de trois parties totalisant dix chapitres. La première partie comprend quatre chapitres de topologie. Cette partie reprend l'intégralité d'un cours intitulé *Analyse fonctionnelle*, enseigné en Licence en 2004-2005, plus quelques rajouts utiles en optimisation (applications bilinéaires continues, lemme de Farkas-Minkowski...). Nous ne traiterons pas intégralement en cours ce qui provient du cours d'analyse fonctionnelle, mais j'ai laissé ces parties assez complètes pour votre culture et à titre de complément parce qu'elles peuvent vous être utiles par ailleurs.

La seconde partie comprend trois chapitres de calcul différentiel qui complètent votre cours de deuxième année, la principale nouveauté concerne les théorèmes de l'inversion locale et des fonctions implicites qui sont essentiels en optimisation mais aussi à la base de la géométrie différentielle.

La dernière partie concerne l'optimisation. Nous introduirons la notion de semi-continuité inférieure, prouverons ensuite quelques résultats généraux d'existence et procèderons à quelques rappels sur l'optimisation sans contrainte, vue en deuxième année. On traitera ensuite des conditions d'optimalité pour l'optimisation sous contraintes d'égalité (Lagrange) puis sous contraintes d'égalité et d'inégalité (KKT).

Pour les parties *Calcul différentiel* et *Optimisation*, je me suis très largement inspiré des notes d'un cours très complet que J. Blot enseignait en première année de l'ENSAE dans les années 90, qu'il en soit sincèrement remercié ici.

Ces notes de cours ne vous seront profitables que si vous préparez régulièrement et sérieusement les T.D.'s du poly d'exercices qui les accompagne et ne vous dispensent bien évidemment pas d'assister au cours.

N'hésitez pas à me signaler les erreurs et les coquilles qui subsisteraient dans ces notes. De manière générale, vos suggestions sont les bienvenues, c'est grâce à elles que ces notes pourront être améliorées pour vos camarades des prochaines années. J'espère que ce poly vous sera utile et vous en souhaite une bonne lecture.

G. CARLIER

Table des matières

Première partie

Topologie

Chapitre 1

Espaces métriques

1.1 Définitions premières

Définition 1.1 *Soit E un ensemble non vide. On appelle distance sur E toute application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés :*

1. *(symétrie) $d(x,y) = d(y,x)$ pour tout $(x,y) \in E \times E$,*
2. *$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$*
3. *(inégalité triangulaire) $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in E \times E \times E$.*

On appelle espace métrique la donnée d'un couple (E,d) où d est une distance sur E.

Bien noter que dans la définition précédente on a $d \ge 0$. Noter également que la définition précédente implique aussi $|d(x,z) - d(y,z)| \le d(x,y)$, pour tout $(x,y,z) \in E \times E \times E$.

Exemple 1.1 *Pour $E = \mathbb{R}$, $d(x,y) := |x-y|$ est la distance usuelle. Pour $E = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$ on considère souvent les distances :*

$$d_1(x,y) := \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \;\; d_\infty(x,y) := \max_{i=1,..,n} |x_i - y_i|$$

et la distance euclidienne :

$$d_2(x,y) := (\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Exemple 1.2 *Soit E un ensemble non vide et définissons pour $(x,y) \in E^2$, $d(x,y) = 1$ si $x \neq y$ et $d(x,y) = 0$ si $x = y$ on vérifie aisément que d est une distance sur E (appelée distance grossière sur E).*

Nous verrons par la suite d'autres exemples dans le cadre des espaces vectoriels normés.

1.2 Topologie des espaces métriques

Soit (E, d) un espace métrique, $x \in E$ et $r > 0$, on notera $B_E(x, r)$ (ou simplement $B(x, r)$ s'il n'y a pas d'ambiguité) la boule ouverte de centre x et de rayon r :

$$B(x, r) := \{y \in E : d(x, y) < r\}$$

et $\overline{B}_E(x, r)$ (ou simplement $\overline{B}(x, r)$ s'il n'y a pas d'ambiguité) la boule fermée de centre x et de rayon $r \geq 0$:

$$\overline{B}(x, r) := \{y \in E : d(x, y) \leq r\}.$$

Le terme de "boule" provient du cas de la distance euclidienne (la distance d_2 définie plus haut). A titre d'exercice, dessinez dans $\mathbb{R}^2$, la boule $\overline{B}(0, 1)$ pour les trois distances d_1, d_2 et d_∞, qu'en pensez vous ?

Définition 1.2 *Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$, on dit que A est <u>bornée</u> ssi il existe $x \in E$ et $r > 0$ tels que $A \subset B(x, r)$.*

Si A est une partie de E, on définit son <u>diamètre</u> $\operatorname{diam}(A)$ par :

$$\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(x, y),\ (x, y) \in A^2\}.$$

On vérifie aisément que A est bornée ssi $\operatorname{diam}(A)$ est fini.

On peut maintenant définir les ensembles <u>ouverts</u> de (E, d) :

Définition 1.3 *Soit (E, d) un espace métrique et A une partie de E. On dit que :*

1. *A est <u>ouvert</u> ssi pour tout $x \in A$, $\exists r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$,*
2. *A est <u>fermé</u> ssi $E \setminus A$ est ouvert.*
3. *A est un <u>voisinage</u> de $x \in E$ ssi $\exists r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$.*

Autrement dit, un ensemble est ouvert ssi il est voisinage de chacun de ses points. L'ensemble des ouverts de (E, d) s'appelle la topologie de E induite par la distance d. On vérifie aisément qu'une boule ouverte (resp. fermée) est ouverte (resp. fermée).

Proposition 1.1 *Soit (E, d) un espace métrique, on a alors :*

1. *E et $\emptyset$ sont ouverts,*
2. *une réunion (quelconque) d'ouverts est ouverte,*
3. *une intersection <u>FINIE</u> d'ouverts est ouverte.*

La démonstration est élémentaire et laissée au lecteur qui s'entraienera ainsi à se familiariser avec les définitions...

Par passage au complémentaire, on obtient les énoncés correspondant aux fermés :

1. E et $\emptyset$ sont fermés,
2. une réunion <u>FINIE</u> de fermés est fermée,
3. une intersection (quelconque) de fermés est fermée.

Exemple 1.3 *Il est à noter l'importance du mot FINIE dans les énoncés précédents. En effet, soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'intervalle ouvert $I_n :=]-1/n, 1/n[$, l'intersection de ces ouverts est $\{0\}$ qui n'est pas ouverte. La réunion des intervalles fermés $J_n := [0, 1-1/n]$ est l'intervalle $[0, 1[$ qui n'est ni ouvert ni fermé.*

Définition 1.4 *Soit (E, d) un espace métrique, A une partie de E et $x \in E$ on dit que :*

1. *x est un point <u>intérieur</u> à A ssi $\exists r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$ (autrement dit A est un voisinage de x),*
2. *x est un point <u>adhérent</u> à A ssi $\forall r > 0$, $B(x, r)$ rencontre A.*
3. *x est un point <u>frontière</u> de A ssi $\forall r > 0$, $B(x, r)$ rencontre A et $E \setminus A$.*

On appelle intérieur de A et l'on note $\mathrm{int}(A)$ l'ensemble des points intérieurs de A. On appelle adhérence de A et l'on note $\overline{A}$, l'ensemble des points adhérents à A. On appelle frontière de A et l'on note ∂A l'ensemble des points frontière de A. Enfin on dit que A est dense dans E ssi $\overline{A} = E$.

On a clairement les inclusions :

$$\mathrm{int}(A) \subset A \subset \overline{A},$$

et il est facile de montrer (faites le en exercice...) :

$$\partial A = \overline{A} \setminus \mathrm{int}(A).$$

Exemple 1.4 *Il convient de noter que $\mathrm{int}(A)$ peut très bien être l'ensemble vide (considérer dans $\mathbb{R}$: $\{0\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, un ensemble fini...). Concernant la densité : $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$, $]0, 1[$ est dense dans $[0, 1]$ etc....*

On a aussi les propriétés importantes :

Proposition 1.2 *Soit (E, d) un espace métrique, A une partie de E, on a :*

1. $\mathrm{int}(A)$ *est ouvert et c'est le plus grand ouvert contenu dans A,*
2. $\overline{A}$ *est fermé et c'est le plus petit fermé contenant A.*

Preuve:

Montons d'abord que $\mathrm{int}(A)$ est ouvert : soit $x \in \mathrm{int}(A)$ alors $\exists r > 0$ tq $B(x, r) \subset A$, donc si $y \in B(x, r/2)$ on a $B(y, r/2) \subset B(x, r) \subset A$ ce qui montre que $y \in \mathrm{int}(A)$ et donc $B(x, r/2) \subset \mathrm{int}(A)$. $\mathrm{int}(A)$ est donc ouvert et évidemment $\mathrm{int}(A) \subset A$. Montrons maintenant que $\mathrm{int}(A)$ est le plus grand ouvert contenu dans A. Soit U ouvert avec $U \subset A$ et soit $x \in U$, comme U est ouvert $\exists r > 0$ tq $B(x, r) \subset U$ mais comme $U \subset A$ il vient $B(x, r) \subset A$ et donc $x \in \mathrm{int}(A)$ ce qui montre $U \subset \mathrm{int}(A)$ et achève la preuve.

La démonstration du point 2) est similaire et donc laissée au lecteur.

□

L'énoncé précédent implique en particulier les caractérisations :

$$A \text{ ouvert } \Leftrightarrow A = \mathrm{int}(A),$$

et

$$A \text{ fermé } \Leftrightarrow A = \overline{A}.$$

Exercice 1.1 *Soit (E, d) un espace métrique et A une partie de E. Montrer que :*

$$\overline{A} = E \setminus \mathrm{int}(E \setminus A), \ \mathrm{int}(A) = E \setminus \overline{E \setminus A}.$$

Exercice 1.2 *Dans $\mathbb{R}^n$ muni de la distance d_∞ (cf Exemple 1.1), déterminer l'adhérence de $B(x, r)$ et l'intérieur de $\overline{B}(x, r)$.*

Dans les espaces métriques, on a une notion de proximité et donc de limite :

Définition 1.5 *Soit (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques, $x_1 \in E_1$ et f une application de $E_1 \setminus \{x_1\}$ dans E_2. On dit que $f(x)$ tend vers $l \in E_2$ quand x tend vers x_1 ce que l'on note :*

$$\lim_{x \to x_1, x \neq x_1} f(x) = l$$

ssi $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ t.q. pour tout $x \in E_1$ tel que $x \neq x_1$, $d_1(x, x_1) \leq \delta \Rightarrow d_2(f(x), l) \leq \varepsilon$.

Beaucoup de propriétés topologiques dans les espaces métriques peuvent se traduire par des propriétés séquentielles (i.e. en utilisant des suites) : retenez ce principe, l'utilisation de suites rend souvent les démonstrations plus simples que le maniement des définitions générales. Rappelons d'abord ce qu'est une suite convergente :

Définition 1.6 *Soit (E, d) un espace métrique et (x_n) une suite d'éléments de E, on dit que $x \in E$ est limite de la suite (x_n) (ce que l'on notera $x_n \to x$ ou $\lim_n x_n = x$) ssi : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\forall n \geq N$, $d(x_n, x) \leq \varepsilon$. On dit que (x_n) est convergente si elle admet une limite.*

Quand $\lim_n x_n = x$, on dit aussi que x_n converge vers x. Remarquons que la convergence de (x_n) vers x (dans E) est équivalente à la convergence vers 0 de $d(x_n, x)$ (dans $\mathbb{R}$).

Il convient de noter que si une suite est convergente alors elle admet une UNIQUE limite (cette propriété s'exprime en disant que les espaces métriques sont séparés) :

Proposition 1.3 *Soit (E, d) un espace métrique et (x_n) une suite convergente d'éléments de E, alors sa limite est unique.*

Preuve:
Supposons que (x_n) admette pour limite x et y dans E. On a $0 \leq d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y)$ ainsi en passant à la limite en $n \to +\infty$ on obtient $d(x, y) = 0$ i.e. $x = y$ d'où l'unicité. □

Proposition 1.4 *Soit (E, d) un espace métrique, A une partie de E, on a :*

1. *soit $x \in E$, $x \in \overline{A}$ ssi x est limite d'une suite d'éléments de A,*
2. *A est fermé ssi pour toute suite convergente (x_n) d'éléments de A, la limite de cette suite appartient à A.*

Preuve:
2) découle de 1) et du fait que A est fermé ssi $A = \overline{A}$. Supposons $x \in \overline{A}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B(x, 1/n)$ rencontre A, soit donc $x_n \in A \cap B(x, 1/n)$ comme $d(x, x_n) \leq 1/n$, x_n converge vers x. Réciproquement suposons que x soit la limite d'une suite (x_n) d'éléments de A montrons que $x \in \overline{A}$. Soit $r > 0$, pour n assez grand $d(x, x_n) < r$ ainsi, comme $x_n \in A$, on a $A \cap B(x, r) \neq \emptyset$. Finalement $r > 0$ étant arbitraire on a bien $x \in \overline{A}$.
□

Exercice 1.3 *En vous inspirant de la démonstration précédente montrer que $x \in \partial A$ ssi x est limite d'une suite d'éléments de A et limite d'une suite d'éléments de $E \setminus A$.*

Exercice 1.4 *Soit (E, d) un espace métrique et A une partie non vide de E. Pour tout $x \in E$ on définit la distance de x à A par :*

$$d(x, A) := \inf\{d(x, a)\ a \in A\}$$

1. *Montrer que $x \in \overline{A}$ ssi $d(x, A) = 0$.*
2. *Montrer que l'ensemble $A_n := \{x \in E : d(x, A) < 1/n\}$ est ouvert $(n \in \mathbb{N}^*)$.*
3. *Déterminer $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$.*
4. *Déduire de ce qui précède que tout fermé peut s'écrire comme une intersection dénombrable d'ouverts.*

1.3 Suites de Cauchy, espaces métriques complets

Définition 1.7 *Soit (E, d) un espace métrique et $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E, on dit que $(x_n)_n$ est de Cauchy ssi : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$ t.q. pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \geq N$ et $q \geq N$ on a : $d(x_p, x_q) \leq \varepsilon$.*

La définition précédente peut aussi s'exprimer en disant que $(x_n)_n$ est de Cauchy ssi

$$\sup_{p \geq N,\, q \geq N} d(x_p, x_q) \to 0 \text{ quand } N \to +\infty.$$

Evidemment, toute suite convergente est de Cauchy (s'en persuader !), la réciproque n'est cependant pas vraie : les espaces métriques pour lesquels cette réciproque est vraie sont dits complets :

Définition 1.8 *Soit (E, d) un espace métrique, on dit que (E, d) est complet ssi toute suite de Cauchy d'éléments de E converge dans E.*

Exemple 1.5 *Le corps des rationnels $\mathbb{Q}$ muni de la distance usuelle (induite par celle de $\mathbb{R}$) n'est pas complet (en effet, il est facile de vérifier que la suite de rationnels définie par $x_n := \sum_{k=0}^{n} 1/(k!)$ est de Cauchy, on montre par ailleurs qu'elle ne peut pas converger vers un rationnel). En revanche $\mathbb{R}$ muni de sa distance usuelle est complet. De même, $\mathbb{R}^n$ muni de n'importe laquelle des distances d_1, d_2, d_∞ est complet. Nous verrons d'autres exemples aux chapitres suivants.*

Voici une première propriété des espaces complets :

Proposition 1.5 *Soit (E, d) un espace métrique complet et (F_n) une suite décroissante de fermés non vides dont le diamètre tend vers 0, alors l'intersection des F_n est non vide.*

Preuve:
Soit $d_n := \text{diam}(F_n)$ et soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in F_n$. Pour tout couple d'entiers p et q avec $p, q \geq N$ on a : $d(x_p, x_q) \leq d_N$ et comme d_N tend vers 0 quand $N \to +\infty$, ceci montre que la suite (x_n) est de Cauchy : elle converge donc, appelons x sa limite. Comme x est la limite de la suite d'éléments de F_n, $(x_p)_{p \geq n}$, et comme F_n est fermé on a $x \in F_n$ ce qui achève la preuve.
$\square$

Notons pour clore ce paragraphe qu'une suite de Cauchy est nécessairement bornée (s'en persuader) donc en particulier les suites convergentes sont bornées.

1.4 Compacité

Rappelons d'abord quelques définitions relatives aux suites extraites et valeur d'adhérence.

Définition 1.9 *Soit E un ensemble non vide et $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E, on appelle sous-suite (ou suite extraite) de la suite $(x_n)_n$ toute suite de la forme $(x_{\varphi(n)})_n$ avec φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.*

Définition 1.10 *Soit (E, d) un espace métrique et (x_n) une suite d'éléments de E. On dit que x est valeur d'adhérence de (x_n) ssi l'une des assertions équivalentes suivantes est satisfaite :*

1. *(x_n) admet une sous-suite qui converge vers x,*
2. *$\forall \varepsilon > 0$, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists n \geq N$ t.q. $d(x_n, x) \leq \varepsilon$,*
3. *$\forall \varepsilon > 0$ l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : d(x_n, x) \leq \varepsilon\}$ est infini.*

Exercice 1.5 *Prouver l'équivalence des trois assertions précédentes.*

Exercice 1.6 *Prouver que si φ est comme dans la définition 1.9 alors $\varphi(n) \geq n$ pour tout n.*

Exemple 1.6 *La suite $(-1)^n$ admet deux valeurs d'adhérence : 1 et -1.*

Définition 1.11 *On dit que l'espace métrique (E, d) est compact ssi toute suite d'éléments de E admet une sous-suite convergente. On dit qu'une partie A de l'espace métrique (E, d) est compacte ssi toute suite d'éléments de A admet une sous-suite convergente dans A.*

Proposition 1.6 *Soit (E, d) un espace métrique. Si A est une partie compacte de E alors A est fermée et borné.*

Preuve:
Soit $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ une suite convergente, notons $x \in E$ sa limite. Comme A est compacte, $(x_n)_n$ admet une sous suite qui converge dans A, une telle sous-suite converge nécessairement vers x (s'en persuader...) d'où $x \in A$ ce qui montre que A est fermée.

Supposons que A ne soit pas bornée on a alors $\mathrm{diam}(A) = +\infty$ et donc il existe deux suites $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$, et $(y_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telles que

$$\lim_n d(x_n, y_n) = +\infty. \tag{1.1}$$

Comme A est compacte on peut trouver des sous suites $(x_{\varphi(n)})$ et $(y_{\varphi(n)})$ convergeant respectivement vers les éléments x et y de A, on a donc

$$d(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) \leq d(x_{\varphi(n)}, x) + d(x, y) + d(y, y_{\varphi(n)}) \to d(x, y)$$

ce qui contredit (1.1).
□

Attention : un fermé borné n'est pas nécessairement compact, nous aurons l'occasion de revenir sur ce point.

Les parties compactes d'un métrique compact sont faciles à caractériser puisque :

Proposition 1.7 *Soit (E, d) un espace métrique compact et A une partie de E alors A est une partie compacte de E ssi A est fermé dans E.*

Preuve:
Si A est compacte alors A est fermée dans E d'après la proposition précédente. Supposons A fermée et soit $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$, par compacité de E, (x_n) admet une sous-suite qui converge vers une limite $x \in E$, A étant fermé $x \in A$ et donc la sous suite converge aussi vers x dans A ce qui prouve que A est compacte.
□

Notons que la notion de compacité est plus forte que celle de complétude :

Proposition 1.8 *Tout espace métrique compact est complet.*

Preuve:
Soit (E, d) un espace métrique compact et $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans E. Comme E est compact, (x_n) admet une valeur d'adhérence $x \in E$. Montrons que (x_n) converge vers x : soit $\varepsilon > 0$, comme la suite est de Cauchy, il

existe N_1 tq pour tous entiers $p, q \geq N_1$ on a : $d(x_p, x_q) \leq \varepsilon/2$. Comme x est valeur d'adhérence, il existe $N_2 \geq N_1$ tel que $d(x_{N_2}, x) \leq \varepsilon/2$. Ainsi pour tout $p \geq N_2$ on a : $d(x_p, x) \leq d(x_p, x_{N_2}) + d(x_{N_2}, x) \leq \varepsilon$. Ce qui montre que (x_n) converge vers x et donc que (E, d) est complet.
$\square$

Bien noter que la réciproque est fausse : $\mathbb{R}$ est complet mais pas compact (car non borné !). Remarquons aussi au passage que dans la démonstration précédente nous avons établi le résultat :

Lemme 1.1 *Soit (E, d) un espace métrique et $(x_n)_n$ une suite d' éléments de E alors $(x_n)_n$ converge ssi $(x_n)_n$ est de Cauchy et admet une valeur d'adhérence.*

Théorème 1.1 *Dans $\mathbb{R}$ muni de sa distance usuelle, tout fermé borné est compact.*

Preuve:
Soit F un fermé borné de $\mathbb{R}$, puisque F est borné, F est inclus dans un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $F \subset [0, 1]$. Soit $(x_n)_n \in F^{\mathbb{N}} \subset [0, 1]^{\mathbb{N}}$, on va montrer que (x_n) admet une sous-suite qui est de Cauchy en procédant comme suit. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on décompose $[0, 1]$ en 2^p segments de longueur 2^{-p} :

$$[0, 1] = \bigcup_{k=0}^{2^p - 1} I_k^p, \ I_k^p := [k2^{-p}, (k+1)2^{-p}].$$

Pour $p = 1$ l'un des deux intervalles I_1^1 et I_2^1 que l'on notera J_1 est tel que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in J_1\}$ est infini. On écrit ensuite

$$J_1 = \bigcup_{k \in \{0,..,4\} \ : \ I_k^2 \subset J_1} I_k^2$$

et comme précédemment $\exists k \in \{0, ..., 4\}$ tq l'un des intervalles $I_1^2, ..., I_4^2$ que l'on notera J_2 vérifie :

$$J_2 \subset J_1, \text{ et l'ensemble } \{n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } x_n \in J_2\} \text{ est infini.}$$

On construit ainsi par récurrence une suite décroissantes d'intervalles fermés $J_1 \supset J_2 \supset .... \supset J_p$ tel que J_p est de longueur 2^{-p} et pour tout p, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in J_p\}$ est infini.

Soit n_1 le premier entier k tq $x_k \in J_1$, n_2 le premier entier $k \geq n_1 + 1$ tq $x_k \in J_2$, ..., n_p le premier entier $k \geq n_{p-1} + 1$ tq $x_k \in J_p$. La suite $(x_{n_p})_p$

est une sous-suite de $(x_n)_n$. Notons maintenant que par construction, on a pour tout $r, s \geq p$, $(x_{n_s}, x_{n_r}) \in J_p$ et comme J_p est de diamètre 2^{-p}, on a $|x_{n_s} - x_{n_r}| \leq 2^{-p}$ et donc $(x_{n_p})_p$ est de Cauchy. Comme $\mathbb{R}$ est complet, $(x_{n_p})_p$ converge et comme F est fermé sa limite est dans F. Ceci montre que (x_n) admet une sous-suite convergente dans F, F est donc compact.

$\square$

Exercice 1.7 *Soit (E, d) un espace métrique compact et $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ montrer que la suite $(x_n)_n$ converge ssi elle admet une unique valeur d'adhérence.*

Terminons ce paragraphe par l'importante caractérisation de la compacité (qui peut, en suivant un point de vue différent être prise comme une définition) suivante :

Théorème 1.2 *Soit (E, d) un espace métrique et A une partie de E. A est compacte ssi de tout recouvrement de A par une famille d'ouverts de E, on peut extraire un recouvrement fini.*

Nous admettrons ici ce résultat qu'il convient cependant de retenir.

1.5 Continuité

Définition 1.12 *Soit (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques, f une application de E_1 dans E_2 et $x \in E_1$. On dit que f est <u>continue</u> en x ssi $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ t.q. $d_1(x, y) \leq \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$. On dit que f est continue sur E_1 ssi f est continue en chacun de ses points.*

Exemple 1.7 *Soit (E, d) un espace métrique, $x_0 \in E$ et définissons $\forall x \in E$, $f(x) := d(x, x_0)$. On a alors $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$ et donc (en prenant simplement "$\delta = \varepsilon$" dans la définition précédente) f est continue sur E.*

Proposition 1.9 *Soit (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques, f une application de E_1 dans E_2. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est continue sur E_1,*
2. *pour tout ouvert O de E_2, $f^{-1}(O)$ est un ouvert de E_1,*
3. *pour tout fermé F de E_2, $f^{-1}(F)$ est un fermé de E_1,*
4. *pour toute suite (x_n) d'éléments de E_1 on a :*

$$\lim_n x_n = x \text{ dans } E_1 \Rightarrow \lim_n f(x_n) = f(x) \text{ dans } E_2.$$

Preuve:
On va montrer 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 1).

1) $\Rightarrow$ 2) : soit O un ouvert de E_2, $x \in f^{-1}(O)$ et $y := f(x) \in O$, comme O est ouvert, $\exists \varepsilon > 0$ tq $B(y, \varepsilon) \subset O$. Par continuité de f en x, $\exists \delta > 0$ tq pour tout $x' \in E_1$, $x' \in B(x, \delta) \Rightarrow f(x') \in B(f(x), \varepsilon) = B(y, \varepsilon) \subset O$, ainsi $B(x, \delta) \subset f^{-1}(O)$ donc $f^{-1}(O)$ est un voisinage de x, comme x est un point arbitraire de $f^{-1}(O)$ on en déduit que $f^{-1}(O)$ est ouvert.

2) $\Rightarrow$ 3) : (par passage au complémentaire), soit F fermé de E_2, et soit O l'ouvert $O := E_2 \backslash F$, d'après 2), $f^{-1}(O)$ est ouvert mais $f^{-1}(O) = E_1 \backslash f^{-1}(F)$ donc $f^{-1}(F) = E_1 \setminus f^{-1}(O)$, ainsi $f^{-1}(F)$ est fermé.

3) $\Rightarrow$ 4) : soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite $x \in E_1$ et supposons par l'absurde que $f(x_n)$ ne converge pas vers $f(x)$. Alors $\exists \varepsilon > 0$ tq $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists n_N \geq N$ tq

$$d_2(f(x_{n_N}), f(x)) \geq \varepsilon. \tag{1.2}$$

Posons $F := E_2 \setminus B(f(x), \varepsilon)$, F est fermé (complémentaire d'une boule ouverte) et donc par 3), $f^{-1}(F)$ est fermé. Notons que (1.2) signifie que $x_{n_N} \in f^{-1}(F)$ pour tout N. Comme (x_{n_N}) converge vers x quand $N \to +\infty$ et comme $f^{-1}(F)$ est fermé, on en déduit que $x \in f^{-1}(F)$ i.e. $d_2(f(x), f(x)) \geq \varepsilon$ ce qui est absurde.

4) $\Rightarrow$ 1) : supposons que f ne soit pas continue en un point x de E_1, alors il existe $\varepsilon > 0$ tq pour tout $\delta > 0$, il existe $x_\delta \in E_1$ tel que $d_1(x_\delta, x) \leq \delta$ et $d_2(f(x_\delta), f(x)) > \varepsilon$. En prenant $\delta_n := 1/n$ et en notant $x_n := x_{\delta_n}$ on a alors $d_1(x_n, x) \leq 1/n$ et $d_2(f(x_n), x) > \varepsilon > 0$ ce qui contredit l'assertion 4).

$\square$

Proposition 1.10 *Soit (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques, f une application continue de E_1 dans E_2. Si E_1 est compact alors $f(E_1)$ est une partie compacte de E_2.*

Preuve:
Soit $(z_n) := f(x_n)$ (avec $x_n \in E_1$) une suite de $f(E_1)$. Comme E_1 est compact, x_n admet une sous suite $(x_{\varphi(n)})$ convergente, f étant continue la sous suite $z_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)})$ est aussi convergente. Ceci montre donc que $f(E_1)$ est compact.

$\square$

Corollaire 1.1 *Si (E, d) est compact et f est continue de E dans $\mathbb{R}$ (muni de sa distance usuelle) alors f atteint ses bornes sur E.*

Preuve:
$f(E)$ est un compact de $\mathbb{R}$ c'est donc un fermé borné en particulier ses bornes sont finies et appartiennent à $f(E)$. $\square$

Le corollaire précédent peut être vu comme un résultat d'existence en optimisation. Il implique en effet que lorsque E est compact, les problèmes d'optimisation :

$$\sup\{f(x),\, x \in E\} \text{ et } \inf\{f(x),\, x \in E\}$$

admettent au moins une solution, autrement dit le sup. (resp. inf.) précédent est un max. (resp. min.).

Exercice 1.8 *Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :*

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty$$

montrer que l'infimum de f sur $\mathbb{R}$ est atteint.

Exercice 1.9 *Soit A une partie compacte d'un espace métrique (E, d), on définit :*

$$d_A(x) := \inf\{d(x, a),\, a \in A\}.$$

Montrer que l'inf précédent est atteint. Montrer que $d_A(.)$ est continue sur E.

Définition 1.13 *Soit (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques, f une application de E_1 dans E_2. On dit que f est <u>uniformément continue</u> sur E_1 ssi $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ t.q. pour tout $(x, y) \in E_1^2$, $d_1(x, y) \leq \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$.*

Attention : il convient de bien distinguer la définition précédente de celle de continuité (dans la définition de la continuité en un point, "δ" dépend de ε et du point considéré, alors que dans la définition de l'uniforme continuité δ ne dépend que de ε, c'est précisément pour cela que l'on parle d'uniformité).

Exercice 1.10 *Trouvez une fonction de $\mathbb{R}$ dans lui même qui soit uniformément continue. Trouvez une fonction de $\mathbb{R}$ dans lui même qui soit continue et non uniformément continue.*

Rappelons la définition des applications Lipschitziennes :

Définition 1.14 *Soit (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques, f une application de E_1 dans E_2 et $k \in \mathbb{R}_+$. On dit que f est k-Lipschitzienne (ou Lipschitzienne de rapport k) ssi pour tout $(x, y) \in E_1 \times E_1$ on a $d_2(f(x), f(y)) \leq k d_1(x, y)$. On dit enfin que f est Lipschitzienne ssi $\exists k \geq 0$ tel que f soit k-Lipschitzienne.*

Exercice 1.11 *Soit* (E, d) *un espace métrique. Montrer que :*

1. *Pour tout* $x_0 \in E$, *l'application* $x \mapsto d(x, x_0)$ *est* 1*-Lipschitzienne.*
2. *Pour toute partie non vide* A *de* E *l'application*

$$x \mapsto d_A(x) := \inf\{d(x, a),\ a \in A\}$$

   est 1*-Lipschitzienne.*

Exercice 1.12 *Montrer que les applications lipschitziennes de* (E_1, d_1) *dans* (E_2, d_2) *sont uniformément continues. Trouver une application uniformément continue de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui n'est pas Lipschitzienne.*

Exercice 1.13 *Montrer qu'une fonction continue et périodique de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *est uniformément continue.*

Exercice 1.14 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uniformément continue. Montrer qu'il existe deux constantes* a *et* b *telles que* $|f(x)| \leq a|x| + b$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Le résultat suivant (Théorème de Heine) énonce que si l'espace de départ est compact alors les notions de continuité et de continuité uniforme coincident :

Théorème 1.3 *Soit* (E_1, d_1) *et* (E_2, d_2) *deux espaces métriques,* f *une application continue de* E_1 *dans* E_2. *Si* (E_1, d_1) *est compact alors* f *est uniformément continue sur* E_1.

Preuve:

Supposons, par l'absurde que f ne soit pas uniformément continue alors il existe $\varepsilon > 0$, il existe deux suites d'éléments de E_1, (x_n) et (y_n) telles que $d_1(x_n, y_n)$ tende vers 0 et $d_2(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$ pour tout n. E_1 étant compact on peut extraire des sous-suites convergentes de (x_n) et (y_n) de limites respectives x et y. En passant à la limite on obtient $x = y$ et $d_2(f(x), f(y)) \geq \varepsilon > 0$ ce qui est absurde.

□

1.6 Points fixes de contractions

Le théorème suivant (point fixe pour les contractions ou théorème de point fixe de Banach-Picard) est très utile dans beaucoup de situations (il sert en particulier à démontrer les théorèmes de Cauchy-Lipschitz, de l'inversion locale ou encore est très utile dans certains problèmes de programmation dynamique) et il illustre parfaitement l'importance de la notion de complétude.

Théorème 1.4 *Soit (E, d) un espace métrique complet et f une contraction de E, c'est à dire une application de E dans E telle qu'il existe $k \in]0, 1[$ tel que :*

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y), \; \forall (x, y) \in E \times E.$$

Alors f admet un unique point fixe : il existe un unique $x \in E$ tel que $f(x) = x$. De plus, pour tout $x_0 \in E$, si on définit par récurrence la suite x_n par $x_{n+1} = f(x_n)$, pour $n \geq 0$, la suite x_n converge vers x quand $n \to +\infty$.

Preuve:
On commence d'abord par montrer l'unicité, supposons que f admette deux points fixes x_1 et x_2. Comme $f(x_1) = x_1$ et $f(x_2) = x_2$, on a alors $d(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2) \leq kd(x_1, x_2)$ et comme $k < 1$, il vient $d(x_1, x_2) = 0$ donc $x_1 = x_2$ d'où l'unicité.

Montrons maintenant l'existence. Soit $x_0 \in E$, définissons la suite x_n comme dans l'énoncé et montrons que celle-ci est de Cauchy. On commence par remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq kd(x_n, x_{n-1})$ en itérant l'argument on a donc aussi :

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0) \tag{1.3}$$

Pour $q \geq p \geq N$ on a donc :

$$\begin{aligned} d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x_{p+1}) + ... + d(x_{q-1}, x_q) &\leq d(x_1, x_0)(k^p + ... + k^{q-1}) \\ &\leq d(x_1, x_0)\frac{k^N}{1-k} \end{aligned}$$

comme $k \in]0, 1[$, k^N tend vers 0 quand $N \to +\infty$, l'inégalité précédente implique donc que (x_n) est de Cauchy et donc admet une limite x dans E puisque (E, d) est complet. On vérifie aisément que f est continue donc $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers $f(x)$ on a donc $x = f(x)$. $\square$

Il faut bien retenir que le théorème précédent indique très simplement comment trouver le point fixe d'une contraction f : on part de x_0 ARBITRAIRE (c'est assez remarquable) et on calcule les itérées $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$... cette suite converge vers le point fixe de f (noter aussi que la vitesse de convergence est géométrique : $d(x, x_n) \leq k^n d(x, x_0)$).

Noter que dans le théorème précédent l'hypothèse de contraction ($k < 1$) est fondamentale. Pour s'en convaincre considérer $f(x) = x + 1$ dans $\mathbb{R}$...

Exercice 1.15 *Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\arctan(x) = x$ et étudier le comportement des suites vérifiant $x_{n+1} = \arctan(x_n)$ ($x_0 \in \mathbb{R}$ arbitraire).*

1.7 Connexité

Une dernière notion importante est celle de connexité. Intuitivement, un ensemble connexe est un ensemble "d'un seul tenant".

Définition 1.15 *Soit (E, d) un espace métrique on dit que E est connexe ssi les seuls sous ensembles à la fois ouverts et fermés de (E, d) sont E et $\emptyset$.*

La caractérisation suivante permet de mieux visualiser la notion de connexité.

Proposition 1.11 *Soit (E, d) un espace métrique, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *(E, d) est connexe,*
2. *toute application continue de E dans $\{0, 1\}$ est constante ($\{0, 1\}$ étant muni par exemple de la distance naturelle de $\mathbb{R}$).*

Preuve:
Supposons (E, d) connexe et soit $f \in C^0(E, \{0, 1\})$, soit $A_0 = f^{-1}(0)$ et $A_1 = f^{-1}(1)$. Par continuité de f, A_0 et A_1 sont ouverts et $A_1 = E \setminus A_0$ ainsi A_0 et A_1 sont aussi fermés, donc A_0 ou A_1 est vide ce qui montre que f est constant.

Soit A une partie à la fois ouverte et fermée de E, en définissant $B := E \setminus A$, le couple (A, B) forme alors une partition ouverte de E. Définissons f la fonction indicatrice de A, f est alors une fonction continue de E dans $\{0, 1\}$. Si 2. est satisfaite, f est constante donc A est vide ou égale à E, ce qui montre que (E, d) est connexe.

□

Exemple 1.8 *Un singleton est connexe. En revanche les sous ensembles de $\mathbb{R}$, $\{0, 1\}$ ou $\mathbb{Z}$ ne sont pas connexes. Dans $\mathbb{R}^2$, l'ensemble constitué de deux boules disjointes B_1 et B_2 n'est pas connexe (considérer la fonction valant 1 sur B_1 et 0 sur B_2).*

Un critère simple de connexité est celui de connexité par arcs ; un ensemble connexe par arcs est un ensemble dont les points peuvent être joints par un arc continu :

Définition 1.16 *Soit (E, d) un espace métrique on dit que E est connexe par arcs ssi pour tout $(x_1, x_2) \in E^2$, il existe $\gamma \in C^0([0, 1], E)$ tel que $\gamma(0) = x_1$ et $\gamma(1) = x_2$.*

On a alors

Proposition 1.12 *Tout espace métrique connexe par arcs est connexe.*

Preuve:
Supposons (E, d) connexe par arcs, et soit f une application continue de E dans $\{0, 1\}$, il s'agit de montrer que f est constante. Supposons par l'absurde qu'il existe $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = 0$ et $f(x_2) = 1$ et soit $\gamma \in C^0([0, 1], E)$ tel que $\gamma(0) = x_1$ et $\gamma(1) = x_2$. Pour tout $t \in [0, 1]$ on définit alors $g(t) := f(\gamma(t))$, on a alors $g \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$, $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$. Avec le théorème des valeurs intermédiares, il existe donc $t_0 \in]0, 1[$ tel que $g(t_0) = 1/2$, or, $g(t_0) = f(\gamma(t_0)) \in \{0, 1\}$, d'où la contradiction voulue. $\square$

Exemple 1.9 *Dans $\mathbb{R}^n$, les sous-ensembles convexes sont connexes par arcs et donc connexes.*

Exemple 1.10 *Soit E une partie de $\mathbb{R}^n$ et $x_0 \in E$, on dit que E est étoilé par rapport à x_0 ssi pour tout $x \in E$, le segment joignant x_0 à x est entièrement inclus dans E (noter la différence avec la convexité...). Si E est étoilé par rapport à l'un de ses points, alors E est connexe par arcs donc connexe.*

Dans, la preuve de la proposition 1.12, nous avons utilisé le théorème des valeurs intermédiaires. En voici la généralisation naturelle formulée en termes de connexité : l'image d'un ensemble connexe par une application continue est connexe.

Proposition 1.13 *Soit (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques. Si (E_1, d_1) est connexe et f est une application continue de E_1 à valeurs dans E_2, alors l'image $f(E_1)$ est connexe.*

Preuve:
Soit g une application continue de $f(E_1)$ dans $\{0, 1\}$ et soit $h(x) := g(f(x))$ pour tout $x \in E_1$, h est continue de E_1 qui est connexe dans $\{0, 1\}$, donc h est constante sur E_1 ce qui implique que g est constante sur $f(E_1)$.
$\square$

Chapitre 2

Espaces vectoriels normés, espaces de Banach

Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2.1 Définitions premières

Définition 2.1 *On appelle <u>norme</u> sur E toute application : $\|.\| : E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant :*

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall (x, y) \in E^2$,
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E$.

On appelle espace vectoriel normé (evn) la donnée d'un couple $(E, \|.\|)$ avec E un espace vectoriel réel et $\|.\|$ une norme sur E.

Une norme définit une distance sur E (et donc une topologie, des fermés, des compacts...) donnée par :

$$d(x, y) := \|x - y\|, \forall (x, y) \in E^2.$$

Bien noter ici que les evn ne sont qu'un cas particulier des espaces métriques étudiés au chapitre précédent. En particulier une norme définit une distance mais une distance n'est pas nécessairement associée à une norme (prendre l'exemple de la distance grossière).

Notons aussi que $\|x\| = \| - x\|$ et $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

Exemple 2.1 *Pour $E = \mathbb{R}^n$, nous avons déja rencontré les normes :*

$$\|x\|_\infty := \max(|x_1|, .., |x_n|), \|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \|x\|_2 := (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{1/2}$$

Nous verrons par la suite, que pour tout $p \geq 1$:

$$\|x\|_p := (\sum_{i=1}^{n} |x_i\|^p)^{1/p} \tag{2.1}$$

définit une norme sur $\mathbb{R}^n$. On peut construire de nombreux autres exemples (par exemple en notant que la somme ou le max d'un nombre fini de normes est encore une norme).

Exemple 2.2 *$E = C^0([a,b], \mathbb{R})$ munie de la norme*

$$\|f\|_\infty := \max\{|f(t)|,\ t \in [a,b]\}.$$

Sur E on peut aussi considérer les normes :

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f|, \|f\|_2 := (\int_a^b f^2)^{1/2}$$

ou plus généralement pour tout $p \geq 1$:

$$\|f\|_p := (\int_a^b |f|^p)^{1/p}.$$

Exemple 2.3 *$E = l^\infty := \{(x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (x_n)_n$ bornée$\}$ munie de la norme*

$$\|x\|_\infty := \sup |x_n|,\ n \in \mathbb{N}.$$

Définition 2.2 *Soit E un $\mathbb{R}$-ev, $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ deux normes sur E on dit que ces deux normes sont <u>équivalentes</u> ssi il existe deux constantes strictement positives a et b telles que pour tout $x \in E$ on ait :*

$$a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1.$$

La notion de normes équivalentes est importante car deux normes équivalentes ont les mêmes ouverts, les mêmes fermés, les mêmes bornés, les mêmes compacts, les mêmes suites convergentes etc... autrement dit elles définissent la même topologie (.... et le même calcul différentiel) .

Exemple 2.4 *Sur $\mathbb{R}^n$, les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes : en effet, on a clairement pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_1 \geq \|x\|_\infty$ et $\|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$. Nous verrons au paragraphe 2.3 que sur $\mathbb{R}^n$, en fait, TOUTES les normes sont équivalentes.*

Exemple 2.5 *Considérons sur $E := C^0([0,1],\mathbb{R})$ les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ comme dans l'exemple 2.2. Il est facile de voir que pour tout $f \in E$ on a : $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$ mais ces 2 normes ne sont pas équivalentes pour autant. En effet, considérons la suite de fonctions $f_n(t) := \max(0, n(1-nt))$, on a $\|f_n\|_\infty = n$ et $\|f_n\|_1 = 1/2$, il ne peut donc exister de constante positive a telle que $\|f_n\|_\infty \leq a\|f_n\|_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

On a vu au chapitre précédent l'importance de la notion de complétude dans le cadre général des espaces métriques, ainsi les evn complets appelés espaces de Banach jouent un rôle très important en analyse :

Définition 2.3 *On appelle espace de Banach tout evn qui muni de la distance associée à sa norme est complet.*

2.2 Séries à valeurs dans un espace de Banach

Soit $(E, \|.\|)$ un evn et $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$, on rappelle que la série de terme général x_n (notation : $(\sum_n x_n)$, vocabulaire : série à valeurs dans E) est la suite formées par ses sommes partielles : $S_n := \sum_{k\leq n} x_k$.

Définition 2.4 *Soit $(E, \|.\|)$ un evn et $(\sum_n x_n)_n$ une série à valeurs dans E. On dit que $(\sum_n x_n)_n$ est convergente ssi la suite de ses sommes partielles converge dans $(E, \|.\|)$, on appelle somme de la série la limite des sommes partielles qu'on note simplement $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$. On dit que $(\sum_n x_n)_n$ est normalement convergente ssi la série $(\sum_n \|x_n\|)_n$ est convergente dans $\mathbb{R}$.*

On rappelle que la série (à termes positifs) $(\sum_n \|x_n\|)_n$ converge ssi la suite de ses sommes partielles est de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall p \geq q \geq N, \sum_{k=q+1}^{p} \|x_k\| \leq \varepsilon \tag{2.2}$$

dans ce cas la suite des restes $\sum_{k=n}^{+\infty} \|x_k\|$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

Proposition 2.1 *Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach et $(\sum_n x_n)$ une série à valeurs dans E, si $(\sum_n x_n)$ est normalement convergente alors $(\sum_n x_n)$ converge dans E.*

Preuve:
Il suffit de montrer que la suite des sommes partielles $S_n := \sum_{k\leq n} x_k$ est de Cauchy, or on a pour $p \geq q$:

$$\|S_p - S_q\| \leq \sum_{k=q+1}^{p} \|x_k\| \leq \sum_{k=q+1}^{+\infty} \|x_k\| \tag{2.3}$$

comme la série est normalement convergente, le membre de droite de (2.3) tend vers 0 quand $q \to +\infty$, $(S_n)_n$ est donc de Cauchy et la série converge. □

Attention : la convergence normale est suffisante pour la convergence mais pas nécessaire (dans $\mathbb{R}$ considérer la série alternée de terme général $(-1)^n/n$ qui est convergente mais non absolument convergente).

Exercice 2.1 *Soit $(E, \|.\|)$ un evn, montrer que $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach ssi toute série à valeurs dans E normalement convergente est absolument convergente.*

Exercice 2.2 *Soit (f_n) une suite bornée de $(C^0([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ et $(\sum_n \alpha_n)$ une série à valeurs dans $\mathbb{R}$ convergente, montrer que la série $(\sum_n \alpha_n f_n)$ converge dans $(C^0([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ (on pourra utiliser le théorème 2.6).*

2.3 Espaces vectoriels normés de dimension finie

En dimension finie, nous allons voir que toute les normes sont équivalentes, ce qui signifie en pratique que l'on peut utiliser sur $\mathbb{R}^n$ n'importe quelle norme sans changer de topologie, on parle alors simplement de la topologie de $\mathbb{R}^n$ sans préciser la norme.

Théorème 2.1 *Les parties compactes de $(\mathbb{R}^k, \|.\|_\infty)$ sont ses parties fermées bornées. En particulier toute suite bornée de $(\mathbb{R}^k, \|.\|_\infty)$ admet une sous-suite convergente.*

Preuve:
Soit F une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^k$ pour la norme $\|.\|_\infty$. Il existe alors $M > 0$ telle que $F \subset \overline{B}(0, M) = [-M, M]^k$. Soit $(x_n)_n \in F^{\mathbb{N}} \subset ([-M, M]^k)^{\mathbb{N}}$, en vertu du théorème 1.1, $[-M, M]$ est un compact de $\mathbb{R}$, on peut donc

extraire une sous-suite[1] $(x_{\varphi(n)})_n$ telle que pour $i = 1, ..., k$ la suite des i-èmes composantes $(x_{i,\varphi(n)})_n$ converge vers une limite $x_i \in \mathbb{R}$. Notons $x = (x_1, ..., x_k)$, pour tout i on a $|x_{i,\varphi(n)} - x_i| \to 0$ quand $n \to +\infty$ et donc

$$\lim_n \|x_{\varphi(n)} - x\|_\infty = 0.$$

Ainsi $(x_{\varphi n})$ converge vers x, enfin $x \in F$ car F est fermé ce qui achève la preuve.

□

Théorème 2.2 *Si E est un espace vectoriel réel de dimension finie alors toutes les normes sur E sont équivalentes.*

Preuve:
Sans perte de généralité supposons $E = \mathbb{R}^n$. Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$, nous allons montrer que N est équivalente à la norme $\|.\|_\infty$ de $\mathbb{R}^n$ (si toutes les normes sont équivalentes à une norme donnée alors par "transitivité" elles sont toutes équivalentes entre elles). Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ et soit $x \in \mathbb{R}^n$ que l'on écrit dans cette base $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on a :

$$N(x) = N(\sum_{i=1}^n x_i e_i) \leq \sum_{i=1}^n |x_i| N(e_i) \leq (\sum_{i=1}^n N(e_i))\|x\|_\infty$$

donc $N(x) \leq C\|x\|_\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ ($C = \sum N(e_i)$). On a donc pour tout x, y :

$$|N(x) - N(y)| \leq |N(x-y)| \leq C\|x - y\|_\infty \tag{2.4}$$

ce qui montre en particulier que N est continue de $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $S := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty = 1\}$, S est un fermé borné de $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$ et donc un compact en vertu du théorème 2.1. D'après (2.4), N atteint donc son infimum sur S soit donc $x_0 \in S$ tq $N(x_0) = \min_S N$ comme $x_0 \in S$ on a $x_0 \neq 0$ et donc $N(x_0) > 0$ posons $\alpha = N(x_0)$. Pour $x \neq 0$, $x/\|x\|_\infty \in S$ et donc :

$$N(\frac{x}{\|x\|_\infty}) \geq \alpha \Rightarrow \|x\|_\infty \leq \frac{N(x)}{\alpha}.$$

La dernière inégalité étant aussi satisfaite pour $x = 0$, ceci achève de montrer que N et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes. □

En combinant les théorèmes 2.1 et 2.2, on obtient le résultat suivant dont la preuve est laissée au lecteur :

[1] En réalité, il faut effectuer plusieurs extractions successives, les détails sont laissés au lecteur...

Théorème 2.3 *Soit* $(E, \|.\|)$ *un evn réel de dimension finie, les parties compactes de* $(E, \|.\|)$ *sont ses parties fermées et bornées. En particulier, toute suite bornée de* $(E, \|.\|)$ *admet une sous-suite convergente.*

Attention, le résultat précédent est faux en dimension infinie (il est même "très faux" car on montre que la boule unité fermée d'un evn n'est JAMAIS compacte si ce dernier est de dimension infinie).

Exercice 2.3 *Soit* $(x_n)_n \in (\mathbb{R}^k)^{\mathbb{N}}$*, et* N *une norme sur* $\mathbb{R}^k$*. Montrer les équivalences :*

1. $(x_n)_n$ *converge vers* x *pour* $\|.\|_\infty$*,*
2. $(x_n)_n$ *converge vers* x *pour* N*,*
3. *pour tout* $i = 1, ..., k$ $(x_{i,n})_n$ *converge vers* x_i *dans* $\mathbb{R}$*.*

2.4 Inégalités de Hölder et de Minkowski

On se propose de montrer ici, deux inégalités importantes, qu'il faut savoir redémontrer et d'établir que la formule (2.1) de l'exemple 2.1 définit effectivement une norme sur $\mathbb{R}^n$. Dans ce qui suit p est un réel strictement supérieur à 1 et q est son *exposant conjugué*, c'est à dire vérifie $1/p+1/q = 1$. On a ainsi $q > 1$ et $q = p/(p-1)$. On a d'abord :

Lemme 2.1 *Soit* x *et* y *deux réels positifs on a :*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \tag{2.5}$$

Preuve:
Comme $t \mapsto \exp(t)$ est convexe et $1/p + 1/q = 1$ on a pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$:

$$\exp(\frac{u}{p} + \frac{v}{q}) \leq \frac{1}{p}\exp(u) + \frac{1}{q}\exp(v) \tag{2.6}$$

Si $x > 0$ et $y > 0$ on pose $u = p\ln(x)$ et $v = q\ln(y)$, avec (2.6), il vient :

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Enfin, (2.5) est clairement satisfaite si $x = 0$ ou $y = 0$ ce qui achève la preuve.
□

Ceci permet d'établir l'inégalité de Hölder :

Proposition 2.2 *Soit* $(a_1, ..., a_n)$*, et* $(b_1, ..., b_n)$ *des réels, on a :*

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq (\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p)^{1/p} (\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q)^{1/q}. \tag{2.7}$$

Preuve:
On peut clairement suposer les a_i et les b_i non tous nuls, définissons alors les réels strictement positifs

$$S := (\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p)^{1/p}, T := (\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q)^{1/q}.$$

En appliquant l'inégalité (2.5) à $x_i := |a_i|/S$ et $y_i := |b_i|/T$, il vient d'abord :

$$\frac{|a_i b_i|}{ST} \leq \frac{|a_i|^p}{pS^p} + \frac{|b_i|^q}{qT^q} \tag{2.8}$$

en sommant ces inégalités, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i b_i|}{ST} \leq \frac{1}{pS^p} \sum_{i=1}^{n} |a_i|^p + \frac{1}{qT^q} \sum_{i=1}^{n} |b_i|^q. \tag{2.9}$$

Par définition de S et T, le membre de droite de (2.9) vaut $1/p + 1/q = 1$ et donc :

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq ST$$

ce qui prouve (2.7). $\square$

On peut en déduire l'inégalité de Minkowski :

Proposition 2.3 *Soit* $(x_1, ..., x_n)$*, et* $(y_1, ..., y_n)$ *des réels, on a :*

$$(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p)^{1/p} \leq (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p} + (\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p)^{1/p}. \tag{2.10}$$

Preuve:
Remarquons d'abord :

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i||x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i||x_i + y_i|^{p-1} \tag{2.11}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder à $a_i = |x_i|$ et $b_i = |x_i + y_i|^{p-1}$, et en utilisant $(p-1)q = p$ il vient :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |x_i||x_i + y_i|^{p-1} &\leq (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p} (\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{(p-1)q})^{1/q} \\ &= (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p} (\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p)^{1/q}\end{aligned} \tag{2.12}$$

De même, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i||x_i + y_i|^{p-1} \leq (\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p)^{1/p} (\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p)^{1/q} \tag{2.13}$$

Avec (2.11), (2.12) et (2.13), il vient

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \leq (\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p)^{1/q} \left((\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p} + (\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p)^{1/p} \right) \tag{2.14}$$

finalement, comme $1 - 1/q = 1/p$, (2.14) se réécrit (lorsque les $x_i + y_i$ sont non tous nuls)

$$(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p)^{1/p} \leq (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p} + (\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p)^{1/p}.$$

Enfin l'inégalité (2.10) est évidente lorsque $x_i + y_i = 0$ pour tout i. □

Finalement on a le résultat annoncé :

Théorème 2.4 *Soit pour tout* $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ *:*

$$\|x\|_p := (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p}. \tag{2.15}$$

$\|.\|_p$ *définit une norme sur* $\mathbb{R}^n$*.*

Preuve:

Il est clair que $\|x\|_p = 0$ ssi $x = 0$ et que $\|\lambda x\|_p = |\lambda| \|x\|_p$, $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, enfin l'inégalité triangulaire provient de l'inégalité de Minkowski (2.10). □

Exercice 2.4 *En vous inspirant de ce qui précède montrer que pour* $p \geq 1$ *:*

$$f \mapsto (\int_a^b |f|^p)^{1/p}.$$

est une norme sur $C^0([a, b], \mathbb{R})$*.*

2.5 Exemples d' espaces de Banach

Evidemment tout $\mathbb{R}$-ev de dimension finie muni d'une norme quelconque est un espace de Banach :

Proposition 2.4 $\mathbb{R}^N$ *muni de n'importe quelle norme est un espace de Banach.*

Preuve:
Soit $(x_n)_n \in (\mathbb{R}^N)^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy pour la norme $\|.\|_\infty$ (le choix d'une norme n'importe pas ici puisqu'en dimension finie toutes les normes sont équivalentes). Il est clair que chaque suite formée par les composantes : $(x_n^1)_n$, ..., $(x_n^N)_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et comme $\mathbb{R}$ est complet, ces suites convergent respectivement vers des limites x^1, ..., x^N. Il est alors clair que $(x_n)_n$ converge dans $\mathbb{R}^N$ vers $x = (x^1, ..., x^N)$. $\square$

Exercice 2.5 *Prouver que* $\mathbb{R}^N$ *est complet comme suit. Soit* $(x_n)_n$ *une suite de Cauchy dans* $\mathbb{R}^k$*, montrer que*

1. $(x_n)_n$ *est bornée et admet une sous-suite convergente,*
2. *en déduire que* $(x_n)_n$ *converge et conclure.*

Passons maintenant à quelques exemples d'espaces de Banach de dimension infinie. Soit X un ensemble, $(E, \|.\|)$ un espace de Banach et $B(X, E)$ l'ensemble des applications bornées de X dans E :

$$B(X, E) := \{f : X \to E \text{ tq } \sup_{x \in X} \|f(x)\| < +\infty\} \tag{2.16}$$

on vérifie trivialement que $B(X, E)$ est un ev et que sur E :

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} \|f(x)\| \tag{2.17}$$

est une norme appelée norme de la convergence uniforme (ou simplement norme uniforme).

Remarque.
Il faut bien distinguer la convergence uniforme et la convergence simple ((f_n) converge uniformément vers f lorsque $\|f_n - f\|_\infty$ tend vers 0 alors que (f_n) converge simplement vers f lorsque $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$ dans $(E, \|.\|)$ pour tout $x \in X$). Evidemment si (f_n) converge uniformément vers f alors (f_n) converge simplement vers f mais la réciproque est fausse (trouvez des contre-exemples).

Théorème 2.5 *Soit X un ensemble, et $(E, \|.\|)$ un espace de Banach alors $(B(X,E), \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach.*

Preuve:
Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy de $(B(X,E), \|.\|_\infty)$, ce qui signifie :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall p, q \geq N,\ \forall x \in X,\ \|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \varepsilon. \tag{2.18}$$

Nous allons prouver que $(f_n)_n$ converge dans $(B(X,E), \|.\|_\infty)$ en passant par trois étapes.

Etape 1 : identification d'une limite ponctuelle

Soit $x \in X$ (fixé), (2.18) implique en particulier que la suite $(f_n(x))_n \in E^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy et comme $(E, \|.\|)$ est un Banach, elle converge : soit $f(x)$ sa limite.

Etape 2 : $f \in B(X,E)$

D'après (2.18), il existe N tel que pour tout $p, q \geq N$, et pour tout $x \in X$ on a :

$$\|f_p(x) - f_q(x)\| \leq 1. \tag{2.19}$$

Pour $x \in X$ fixé, prenons $p = N$, faisons tendre q vers $+\infty$ dans (2.19), comme $f_q(x)$ converge vers $f(x)$ on obtient $\|f_N(x) - f(x)\| \leq 1$ mais comme $x \in X$ est arbitraire dans l'inégalité précédente, nous obtenons :

$$\sup_{x \in X} \|f(x) - f_N(x)\| \leq 1 \Rightarrow (f - f_N) \in B(X,E)$$

et comme $f_N \in B(X,E)$ on en déduit que $f \in B(X,E)$.

Etape 3 : $(f_n)_n$ converge vers f dans $(B(X,E), \|.\|_\infty)$

Soit $\varepsilon > 0$, d' après (2.18), il existe N tq pour tout $p, q \geq N$ et tout $x \in X$ on a $\|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \varepsilon$. Comme précédemment, fixons $x \in X$, prenons $p \geq N$ et faisons tendre q vers $+\infty$, on obtient alors :

$$\|f_p(x) - f(x)\| \leq \varepsilon. \tag{2.20}$$

Mais comme (2.20) a lieu pour tout $p \geq N$ et tout $x \in X$ on a :

$$\forall p \geq N,\ \|f_p - f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

ce qui achève la preuve. □

Notons que dans ce qui précède, l'ensemble de départ X est totalement arbitraire. Un cas particulier intéressant est celui où $X = \mathbb{N}$, en effet dans ce cas $B(\mathbb{N}, E) = l^\infty(E)$ est l'espace des suites bornées d'éléments de E. En munissant $l^\infty(E)$ de la norme uniforme et en appliquant le théorème précédent on a ainsi :

Corollaire 2.1 *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace de Banach, alors* $l^\infty(E)$ *muni de la norme uniforme est un espace de Banach.*

Un autre cas intéréssant est celui où X est muni d'une distance d, dans ce cas on peut s'intéresser à l'espace vectoriel $C_b^0(X, E)$ des applications continues et bornées[2] de X dans E. En munissant $C_b^0(X, E)$ de la norme uniforme définie par (2.17), on a :

Théorème 2.6 *Soit* (X, d) *un espace métrique et* $(E, \|.\|)$ *un espace de Banach, alors* $(C_b^0(X, E), \|.\|_\infty)$ *est un espace de Banach.*

Preuve:
Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy de $(C_b^0(X, E), \|.\|_\infty)$, d'après le théorème 2.5, nous savons que $(f_n)_n$ converge vers une limite $f \in B(X, E)$ dans $(B(X, E), \|.\|_\infty)$, il nous suffit donc de montrer que f est continue pour pouvoir conclure.

Soit $\varepsilon > 0$ et soit N tq pour tout $n \geq N$ on ait :

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.21}$$

Soit $x_0 \in X$, comme f_N est continue en x_0, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x \in B(x_0, \delta), \ \|f_N(x_0) - f_N(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.22}$$

Pour $x \in B(x_0, \delta)$ on a :

$$\begin{aligned}
\|f(x) - f(x_0)\| \leq & \|f(x) - f_N(x)\| + \|f_N(x) - f_N(x_0)\| + \|f_N(x_0) - f(x_0)\| \\
\leq & \|f - f_N\|_\infty + \varepsilon/3 + \|f - f_N\|_\infty \\
\leq & \varepsilon \text{ (avec (2.21))}
\end{aligned}$$

ce qui montre que f est continue en x_0.
□

Exercice 2.6 *Soit* $(E_1, N_1), ...(E_K, N_K)$ *des espaces de Banach et soit* $E := E_1 \times ... \times E_K$ *montrer que sur* E *:*

$$N(x_1, .., x_K) := \sum_{i=1}^{K} N_i(x_i), \ M(x_1, .., x_k) := \max_{i=1,..,K} N_i(x_i).$$

sont des normes équivalentes et que E *muni d'une de ces normes est un espace de Banach.*

[2] Notons au passage que si (X, d) est compact alors toute application f continue de (X, d) dans $(E, \|.\|)$ est bornée puisque $f(X)$ est compact donc borné.

2.6 Attention à la dimension infinie

Il s'agit dans ce paragraphe d'attirer votre attention sur le fait que certaines propriétés "bien commodes" des evn de dimension finie sont fausses en dimension infinie :

- dans un evn de dimension infinie, un fermé borné n'est pas automatiquement compact ou, ce qui revient au même, il peut exister des suites bornées sans sous-suite convergente,
- en dimension infinie, toutes les normes ne sont pas équivalentes (je vous renvoie à l'exemple 2.5),
- en dimension infinie, le choix d'une norme a de l'importance: muni de la norme uniforme $C^0([0,1],\mathbb{R})$ est un espace de Banach mais muni de la norme $\|.\|_1$, il n'est pas complet, comme nous allons le voir. Autrement dit, en dimension infinie il n'est pas automatique qu'un evn soit un Banach.

Bref, un certain nombre de propriétés topologiques automatiques en dimension infinie (complétude, compacité des fermés bornés, ou, comme nous le verrons au prochain chapitre, la continuité des applications linéaires...) sont en défaut dès que l'on passe à la dimension infinie.

Passons maintenant en revue quelques exemples.

Une suite bornée sans valeur d'adhérence dans $(C^0_b(\mathbb{R},\mathbb{R}),\|.\|_\infty)$ **:**

Posons pour $x\in\mathbb{R}$, $f_0(x):=\max(0,1-|x|)$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n(x):=f(x-n)$. La suite (f_n) est bornée dans $(C^0_b(\mathbb{R},\mathbb{R}),\|.\|_\infty)$, en effet : $\|f_n\|_\infty=\|f_0\|_\infty=1$. Supposons par l'absurde que la suite (f_n) admette une sous suite $(f_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers une limite f dans $(C^0_b(\mathbb{R},\mathbb{R}),\|.\|_\infty)$. Notons d'abord que $f_n=0$ sur $]-\infty,n-1]$ on doit donc avoir $f=0$ sur $]-\infty,\varphi(n)-1]$ pour tout n et donc $f=0$ sur $\mathbb{R}$. Mais si $(f_{\varphi(n)})$ converge vers 0 (dans $(C^0_b(\mathbb{R},\mathbb{R}),\|.\|_\infty)$), alors $\|f_{\varphi(n)}\|_\infty$ tend vers 0, ce qui est absurde puisque $\|f_{\varphi(n)}\|_\infty=1$.

Cet exemple montre que la boule unité fermée de $C^0_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (pour $\|.\|_\infty$) n'est pas compacte.

Une suite bornée sans valeur d'adhérence dans $(C^0([0,1],\mathbb{R}),\|.\|_\infty)$ **:**

Soit pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $t\in[0,1]$, $f_n(t):=t^{1/n}$. On a $\|f_n\|_\infty=1$ pour tout n. Supposons par l'absurde qu'une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_n$ converge vers une limite f dans $(C^0([0,1],\mathbb{R}),\|.\|_\infty)$. En particulier pour tout $t\in[0,1]$, $f_{\varphi(n)}(t)$ converge vers $f(t)$. Comme $f_n(0)=0$ pour tout n on doit alors avoir

$f(0) = 0$. Pour $t \in]0,1]$, $f_n(t)$ converge vers 1 donc $f(t) = 1$ pour $t \in]0,1]$ mais avec $f(0) = 0$ ceci contredit la continuité supposée de f.

Une suite de Cauchy de $(C^0([-1,1], \|.\|_1)$ **qui ne converge pas :**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [-1,1]$ définissons

$$f_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad t \in [-1, -1/n] \\ nt & \text{si} \quad t \in [-1/n, 1/n] \\ 1 & \text{si} \quad t \in [1/n, 1] \end{cases}$$

Montrons d'abord que (f_n) est de Cauchy dans $(C^0([-1,1], \|.\|_1)$. Pour cela définissons la fonction (discontinue en 0) :

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad t \in [-1, 0[\\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \\ 1 & \text{si} \quad t \in]0, 1]. \end{cases}$$

Un calcul immédiat donne :

$$\int_{-1}^{1} |f_n - f| = \frac{1}{n} \tag{2.23}$$

ainsi pour tout $p, q \geq N$ on a :

$$\|f_p - f_q\|_1 \leq \int_{-1}^{1} |f_p - f| + \int_{-1}^{1} |f_q - f| \leq \frac{2}{N} \tag{2.24}$$

ce qui montre que la suite est de Cauchy.

Supposons par l'absurde que (f_n) converge dans $(C^0([-1,1], \|.\|_1)$ vers une limite g. Soit $\varepsilon > 0$, pour tout $n \geq 1/\varepsilon$ on a $f_n = f$ sur $[-1,1] \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]$ on a donc :

$$\|f_n - g\|_1 \geq \int_{[-1,1]\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} |f - g|$$

en faisant $n \to +\infty$ on en déduit que $f = g$ sur $[-1,1] \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]$ et comme $\varepsilon > 0$ est quelconque on a $f = g$ sur $[-1,1] \setminus \{0\}$ ce qui contredit la continuité supposée de g.

Cet exemple montre que $(C^0([-1,1], \|.\|_1)$ n'est pas un espace de Banach.

Exercice 2.7 *Soit $f_n(t) = t^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,1]$. Etudier la convergence simple, la convergence uniforme et la convergence en norme $\|.\|_1$ de la suite (f_n) dans $C^0([0,1], \mathbb{R})$.*

Montrer que (f_n) est de Cauchy dans $(C^0([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_1)$. Conclure.

Chapitre 3

Applications linéaires, bilinéaires continues, dualité

Dans ce qui suit étant donnés $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux e.v.n, on notera $L(E, F)$ (resp. $L_c(E, F)$) l'espace vectoriel des applications linéaires (resp. linéaires continues) de E dans F. Pour $E = F$, on notera simplement $L(E)$ (resp. $L_c(E, F)$) l'espace vectoriel des endomorphismes (resp. endomorphismes continus) de E.

3.1 Caractérisation

Théorème 3.1 *Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux e.v.n, et $f \in L(E, F)$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$f \in L_c(E, F)$,*
2. *f est continue en un point,*
3. *f est bornée sur la boule unité fermée de E, $\overline{B}_E(0, 1)$,*
4. *il existe une constante $M \geq 0$ tq $\|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$ $\forall x \in E$,*
5. *f est Lipschitzienne sur E.*

Preuve:

1) $\Rightarrow$ 2) est évident.

2) $\Rightarrow$ 3) : supposons f continue en $x_0 \in E$, alors $\exists r > 0$ telle que pour tout $x \in \overline{B}_E(x_0, r)$ on ait :

$$\|f(x) - f(x_0)\|_F \leq 1. \tag{3.1}$$

Soit $u \in \overline{B}_E(0,1)$ on a $x_0 + ru \in \overline{B}_E(x_0, r)$ et donc avec (3.1), il vient :

$$\|f(x_0 + ru) - f(x_0)\|_F = \|f(ru)\|_F = r\|f(u)\|_F \leq 1 \tag{3.2}$$

on en déduit donc que $\forall u \in \overline{B}_E(0,1)$, on a $\|f(u)\|_F \leq 1/r$.

3) $\Rightarrow$ 4) : Supposons donc qu'il existe $M > 0$ telle que :

$$\|f(u)\|_F \leq M, \; \forall u \in \overline{B}_E(0,1). \tag{3.3}$$

Soit $x \in E$ avec $x \neq 0$, on a $x/\|x\|_E \in \overline{B}_E(0,1)$ ainsi avec (3.3) :

$$\|f(x/\|x\|_E)\|_F = \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq M \Rightarrow \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E. \tag{3.4}$$

et la dernière inégalité dans (3.4) est évidente pour $x = 0$.

4) $\Rightarrow$ 5) : Par linéarité, on a pour tout $(x, y) \in E \times E$:

$$\|f(x) - f(y)\|_F = \|f(x - y)\|_F \leq M\|x - y\|_E \tag{3.5}$$

ce qui montre que f est M-Lipschitzienne sur E.

5) $\Rightarrow$ 1) est évident.

$\square$

Exemple 3.1 *Soit $E := C^0([-1,1], \mathbb{R})$. Considérons sur E, la norme 1 :*

$$\|f\|_1 := \int_{-1}^{1} |f(t)| dt$$

et la norme uniforme :

$$\|f\|_\infty := \max\{|f(t)|, \; t \in [-1,1]\}.$$

Soit enfin pour tout $f \in E$, $T(f) := f(0)$. T est clairement une forme linéaire sur E (i.e. $T \in L(E, \mathbb{R})$) et pour tout $f \in E$:

$$|T(f)| \leq \|f\|_\infty$$

si bien que T est continue lorsque E est muni de la norme uniforme.

Nous allons voir que T n'est PAS continue lorsque E est munie de la norme $\|.\|_1$. Pour cela, considérons la suite de fonctions :

$$f_n(t) := \max(0, n(1 - n|t|)), \; t \in [-1,1], \; n \in \mathbb{N}^*.$$

Un calcul élémentaire montre que $\|f_n\|_1 = 1$ pour tout n et $T(f_n) = n \to +\infty$. Ainsi T n'est pas bornée sur la boule unité fermée de $(E, \|.\|_1)$ et donc T n'est pas continue.

Exercice 3.1 *Les notations étant celles de l'exercice précédent, étudier la continuité de l'application (linéaire !) S de E dans $\mathbb{R}^3$ définie pour tout $f \in E$ par*

$$S(f) := (\int_{-1}^{1} f(t)dt, \int_{0}^{1} t^2 f(t)dt, \int_{-1}^{1} e^t f(t)dt)$$

lorsque l'on munit E de la norme $\|.\|_1$ puis de la norme $\|.\|_\infty$ et $\mathbb{R}^3$ de n'importe quelle norme (cf. théorème 2.2).

Comme d'habitude, on s'attend à ce que les choses se passent bien en dimension finie, en effet :

Théorème 3.2 *Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux e.v.n. Si E est de dimension finie alors $L(E, F) = L_c(E, F)$.*

Preuve:
Sans perte de généralité, on suppose que $E = \mathbb{R}^n$ et $\|.\|_E = \|.\|_\infty$. Munissons E d'une base $(e_1, .., e_n)$. Soit $f \in L(E, F)$ et $x \in E$, écrivons $x = \sum_i^n x_i e_i$, alors on a :

$$\|f(x)\|_F = \|\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)\|_F \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|f(e_i)\|_F \leq \|x\|_E \sum_{i=1}^{n} \|f(e_i)\|_F$$

ce qui prouve que $f \in L_c(E, F)$. $\square$

Remarque. Remarquons que la conclusion du théorème précédent est en général fausse si c'est F qui est de dimension finie (voir les exemples précédents).

Terminons ce paragraphe par un résultat remarquable dû à Banach sur la continuité de l'inverse d'une application linéaire <u>bijective</u> entre espaces de <u>Banach</u> :

Théorème 3.3 *Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces de <u>Banach</u> et $f \in L_c(E, F)$, si f est <u>bijective</u> alors $f^{-1} \in L_c(F, E)$.*

La démonstration de ce résultat profond dépasse le cadre de ce cours (le lecteur intéressé pourra consulter le livre de Brézis [1] : chapitre consacré au lemme de Baire et à ses conséquences). Nous admettrons donc ce résultat dans ce qui suit.

3.2 Espaces d'applications linéaires continues, dual topologique

Théorème 3.4 *Soit* $(E, \|.\|_E)$ *et* $(F, \|.\|_F)$ *deux e.v.n.*

1. *Sur* $L_c(E, F)$ *l'application :*

$$f \mapsto \|f\|_{L_c(E,F)} := \sup\{\|f(x)\|_F \,:\, \|x\|_E \leq 1\}$$

définit une norme.

2. *Si* $(F, \|.\|_F)$ *est un espace de Banach,* $L_c(E, F)$ *muni de la norme définie précédemment est un espace de Banach.*

Preuve:
L'assertion 1. est évidente et sa preuve laissée au lecteur.

Soit (f_n) une suite de Cauchy de $(L_c(E, F), \|.\|_{L_c(E,F)})$, soit g_n la restriction de f_n à $\overline{B}_E(0, 1)$. On a $g_n \in C_b^0(\overline{B}_E(0, 1), F)$ car f_n est continue et :

$$\|g_n\|_\infty = \|f_n\|_{L_c(E,F)}. \tag{3.6}$$

Par définition de g_n on a aussi pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$:

$$\|g_p - g_q\|_\infty = \|f_p - f_q\|_{L_c(E,F)}. \tag{3.7}$$

Ceci implique que (g_n) est de Cauchy dans $(C_b^0(\overline{B}_E(0, 1), F), \|.\|_\infty)$, donc, grâce au théorème 2.6, g_n converge vers une limite g dans $(C_b^0(\overline{B}_E(0, 1), F), \|.\|_\infty)$. Définissons alors f par $f(0) = 0$ et :

$$f(x) = \|x\| g(\frac{x}{\|x\|}). \tag{3.8}$$

Notons d'abord que $g = f$ sur $\overline{B}_E(0, 1)$, en effet $g(0) = f(0) = 0$ et si $x \in \overline{B}_E(0, 1) \setminus \{0\}$, pour tout n on a :

$$\|x\| g_n(\frac{x}{\|x\|}) = \|x\| f_n(\frac{x}{\|x\|}) = f_n(x) = g_n(x)$$

et donc $g = f$ sur $\overline{B}_E(0, 1)$, en passant à la limite dans la relation précédente.

Montrons que f est linéaire : soit $(x_1, x_2, t) \in E \times E \times \mathbb{R}$, pour tout n, par linéarité de f_n, on a [1] :

$$\begin{aligned} 0 =& f_n(x_1 + tx_2) - f_n(x_1) - tf_n(x_2) \\ =& \|x_1 + tx_2\| g_n(\frac{x_1 + tx_2}{\|x_1 + tx_2\|}) - \|x_1\| g_n(\frac{x_1}{\|x_1\|}) - t\|x_2\| g_n(\frac{x_2}{\|x_2\|}) \end{aligned}$$

[1] Dans ce qui suit, on fera un léger abus de notation, en posant $\|x\| g_n(x/\|x\|) = 0$ pour $x = 0$.

en passant à la limite on a $f(x_1 + tx_2) = f(x_1) + tf(x_2)$. On en déduit donc que f est linéaire.

Puisque $g = f$ sur $\overline{B}_E(0,1)$, f est bornée sur $\overline{B}_E(0,1)$ et donc $f \in L_c(E,F)$. Enfin, comme $g_n = f_n$ et $g = f$ sur $\overline{B}_E(0,1)$, on a :

$$\|g_n - g\|_\infty = \|f_n - f\|_{L_c(E,F)}$$

d'où l'on déduit que f_n converge vers f dans $(L_c(E,F), \|.\|_{L_c(E,F)})$.

□

Remarque. Soit $f \in L_c(E,F)$ et $x \in E \setminus \{0\}$ puisque $x/\|x\|_E$ est de norme 1 on a :

$$\|f\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right)\|_F \le \|f\|_{L_c(E,F)}$$

ce qui par homogénéité donne aussi :

$$\|f(x)\|_F \le \|f\|_{L_c(E,F)}\|x\|_E. \tag{3.9}$$

Evidemment (3.9) est aussi vérifiée par $x = 0$. Il faut retenir (3.9) qui s'avère très utile dans la pratique.

Remarque. Notons que dans le théorème précédent (comme dans le théorème 2.6) c'est l'espace d'arrivée qui doit être un Banach (l'espace de départ est un evn quelconque).

Définition 3.1 *Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{R}$-evn, on appelle dual topologique de E et l'on note E' l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur E : $E' := L_c(E,\mathbb{R})$*

On munit E' de la norme "duale" de la norme de E :

$$\forall f \in E', \|f\|_{E'} := \sup\{|f(x)| : \|x\|_E \le 1\} \tag{3.10}$$

Il résulte du théorème (3.4) et de la complétude de $\mathbb{R}$ que $(E', \|.\|_{E'})$ est un espace de Banach.

Attention : ne pas confondre le dual algébrique de E, $E^* := L(E,\mathbb{R})$ et son dual topologique E' (je vous renvoie aux exemples du début du chapitre).

3.3 Applications bilinéaires continues

On va maintenant étendre les résultats précédents aux applications bilinéaires. Les preuves sont analogues à celles des paragraphes précédents et donc laissées en exercice au lecteur.

Etant donnés trois $\mathbb{R}$-ev E, F et G, on appelle application bilinéaire de $E \times F$ à valeurs dans G toute application :

$$a : \left\{ \begin{array}{ccc} E \times F & \to & G \\ (x, y) & \mapsto & a(x, y) \end{array} \right.$$

telle que :

– pour tout $y \in F$, l'application $x \mapsto a(x, y)$ est linéaire de E dans G,

– pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto a(x, y)$ est linéaire de F dans G.

On note $L_2(E \times F, G)$ l'ensemble des applications bilinéaires de $E \times F$ à valeurs dans G. On vérifie aisément que $L_2(E \times F, G)$ a une structure de $\mathbb{R}$-ev.

Exemple 3.2 *$E = F = \mathbb{R}^n$, $G = \mathbb{R}$ et $a(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.*

Exemple 3.3 *$E = M_n(\mathbb{R})$, $F = G = \mathbb{R}^n$ et l'application qui à $(A, x) \in E \times F$ associe Ax.*

Exemple 3.4 *E_0 $\mathbb{R}$-ev quelconque, $E = F = G = L(E_0)$ et l'application qui à $(u, v) \in E \times F$ associe $u \circ v$.*

Lorsque E, F et G sont munies de normes respectives $\|.\|_E$, $\|.\|_F$, et $\|.\|_G$, on peut s'intéresser à la continuité des éléments de $L_2(E \times F, G)$. On note $L_{2,c}(E \times F, G)$ l'ensemble des éléments continus de $L_2(E \times F, G)$. Notons que $L_{2,c}(E \times F, G)$ est un sev de $L_2(E \times F, G)$. On a alors la caractérisation :

Théorème 3.5 *Soit $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ et $(G, \|.\|_G)$ trois e.v.n, et $a \in L_2(E \times F, G)$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$a \in L_{2,c}(E \times F, G)$,*
2. *il existe une constante $M \geq 0$ tq $\|a(x, y)\|_G \leq M \|x\|_E \|y\|_F$, $\forall (x, y) \in E \times F$.*

Preuve:

Adapter la preuve du théorème 3.1.

□

Lorsque E et F sont de dimension finie, on a simplement :

Théorème 3.6 *Soit* $(E, \|.\|_E)$*,* $(F, \|.\|_F)$ *et* $(G, \|.\|_G)$ *trois e.v.n. Si* E *et* F *sont de dimension finie alors* $L_2(E \times F, G) = L_{2,c}(E \times F, G)$*.*

Preuve:

Adapter la preuve du théorème 3.2. □

Théorème 3.7 *Soit* $(E, \|.\|_E)$*,* $(F, \|.\|_F)$ *et* $(G, \|.\|_G)$ *trois e.v.n*

1. *Sur* $L_{2,c}(E \times F, G)$ *l'application :*

   $$a \mapsto \|a\|_{L_{2,c}(E\times F,G)} := \sup\{\|a(x,y)\|_G : \|x\|_E \leq 1, \ \|y\|_F \leq 1\}$$

   définit une norme.
2. *Si* $(G, \|.\|_G)$ *est un espace de Banach,* $L_{2,c}(E \times F, G)$ *muni de la norme définie précédemment est un espace de Banach.*

Preuve:

Adapter la preuve du théorème 3.4. □
Noter que si $a \in L_{2,c}(E \times F, G)$, on a :

$$\|a(x,y)\|_G \leq \|a\|_{L_{2,c}(E\times F,G)} \|x\|_E \|y\|_F \ \forall (x,y) \in E \times F. \tag{3.11}$$

3.4 Un isomorphisme utile

Nous allons voir ici que l'on peut identifier $L(E, L(F,G))$ (respectivement $L_c(E, L_c(F,G))$) à $L_2(E \times F, G)$ (respectivement $L_{2,c}(E \times F, G)$). Cette identification est particulièrement utile en calcul différentiel dès lors que l'on considère des différentielles d'ordre 2 ou plus.

Plus précisément, soit $v \in L(E, L(F,G))$ et définissons pour tout $(x,y) \in E \times F$:

$$a_v(x,y) := (v(x))(y)$$

il est immédiat de vérifier que a_v est bilinéaire : $a_v \in L_2(E \times F, G)$. Soit alors Φ l'application :

$$\Phi : \begin{cases} L(E, L(F,G)) & \rightarrow & L_2(E \times F, G) \\ v & \mapsto & a_v \end{cases}$$

Il est clair que Φ est linéaire (donc si on veut absolument utiliser des notations, $\Phi \in L(L(E, L(F,G)), L_2(E \times F, G))$).

Soit maintenant $a \in L_2(E \times F, G)$, alors pour tout $x \in E$, l'application $a(x,.)$ appartient à $L(F,G)$ ($a(x,.)(y) := a(x,y)$ pour tout $y \in F$). Par ailleurs par bilinéarité on a pour tout $(x_1, x_2, \lambda) \in E^2 \times F$:

$$a(\lambda x_1 + x_2, .) = \lambda a(x_1, .) + a(x_2, .).$$

Ce qui signifie que l'application :

$$A_a : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & L(F,G) \\ x & \mapsto & A_a(x) := a(x,.) \end{array} \right.$$

appartient à $L(E, L(F,G))$. Soit maintenant

$$\Psi : \left\{ \begin{array}{ccc} L_2(E \times F, G) & \to & L(E, L(F,G)) \\ a & \mapsto & A_a \end{array} \right.$$

Soit $a \in L_2(E \times F, G)$ et $(x,y) \in E \times F$ on a :

$$(\Phi \circ \Psi)(a)(x,y) = (A_a(x))(y) = a(x,y)$$

a, x et y étant arbitraire on a donc

$$\Phi \circ \Psi = \text{id sur } L_2(E \times F, G)$$
$$\Psi \circ \Phi = \text{id sur } L(E, L(F,G)).$$

Autrement dit Φ est un isomorphisme et Ψ est l'inverse de Φ. L'isomorphisme Φ permet donc bien d'identifier $L(E, L(F,G))$ à $L_2(E \times F, G)$. L'identification précédente est purement algébrique. Supposons maintenant que E, F et G sont munies de normes respectives $\|.\|_E$, $\|.\|_F$, et $\|.\|_G$. On a alors

Théorème 3.8 *Soit Φ et Ψ définis comme précédemment, on a alors :*

1. *Soit $v \in L(E, L(F,G))$ alors on a :*

$$v \in L_c(E, L_c(F,G)) \Leftrightarrow \Phi(v) \in L_{2,c}(E \times F, G).$$

2. *Pour tout $v \in L_c(E, L_c(F,G))$, on a :*

$$\|v\|_{L_c(E, L_c(F,G))} = \|\Phi(v)\|_{L_{2,c}(E \times F, G)}$$

Preuve:

Par définition, $\Phi(v) \in L_{2,c}(E \times F, G)$ ssi il existe $M \geq 0$ tel que

$$\|v(x)(y)\|_G \leq M \|x\|_E \|y\|_F \ \forall (x,y) \in E \times F.$$

Ceci équivaut à : il existe $M \geq 0$ tel que

$$\forall x \in E,\ v(x) \in L_c(F,G) \text{ et } \|v(x)\|_{L_c(F,G)} \leq M\|x\|_E$$

ce qui signifie exactement que $v \in L_c(E, L_c(F,G))$.

Soit $v \in L_c(E, L_c(F,G))$, on a :

$$\begin{aligned}\|\Phi(v)\|_{L_{2,c}(E\times F,G)} &= \sup\{\|(v(x))(y)\|_G : \|x\|_E \leq 1,\ \|y\|_F \leq 1\} \\ &= \sup\{\|v(x)\|_{L_c(F,G)} : \|x\|_E \leq 1\} = \|v\|_{L_c(E,L_c(F,G))}\end{aligned}$$

□

Le théorème 3.8 exprime donc non seulement que $L_c(E, L_c(F,G)))$ et $L_{2,c}(E\times F, G)$ sont isomorphes mais en plus isométriques (Φ est une isométrie de $L_c(E, L_c(F,G))$ dans $L_{2,c}(E\times F,G)$, ces espaces étant munis de leur norme naturelle).

Chapitre 4

Espaces de Hilbert

4.1 Définitions et propriétés premières

Définition 4.1 *Soit E un $\mathbb{R}$-ev, on appelle produit scalaire (ps) sur E toute application $\langle .,. \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ qui est :*

1. *bilinéaire : pour tout $x \in E$ (fixé) $y \mapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire, et pour tout $y \in E$ (fixé) $x \mapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire,*
2. *symétrique : $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, $\forall (x, y) \in E \times E$,*
3. *définie positive : $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\forall x \in E$ et $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.*

Notons les identités faciles à établir en utilisant la bilinéarité et la symétrie :

$$\begin{aligned} \langle x+y, x+y \rangle &= \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2 \langle x, y \rangle , \\ \langle x-y, x-y \rangle &= \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle - 2 \langle x, y \rangle , \ \forall (x, y) \in E \times E. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Définition 4.2 *On appelle espace préhilbertien la donnée d'un couple $(E, \langle .,. \rangle)$ avec E un $\mathbb{R}$-ev et $\langle .,. \rangle$ un produit scalaire sur E.*

La donnée d'un produit scalaire permet de définir une norme sur E, et ce grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

Proposition 4.1 *Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien.*

1. *pour tout $(x, y) \in E \times E$ on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$| \langle x, y \rangle | \leq (\langle x, x \rangle)^{1/2} (\langle y, y \rangle)^{1/2}. \tag{4.2}$$

De plus il y a égalité dans (4.2) ssi x et y sont liés.

l'application $x \mapsto (\langle x, x \rangle)^{1/2}$ est une norme sur E appelée norme associée au ps $\langle .,. \rangle$.

Preuve:

1) : Définissons pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$g(t) := \langle x+ty, x+ty \rangle = t^2 \langle y,y \rangle + 2t \langle x,y \rangle + \langle x,x \rangle$$

g est un trinôme en t (non dégénéré si $y \neq 0$ mais si $y = 0$ les 2 membres de (4.2) valent 0) et $g(t) \geq 0$ $\forall t$ par positivité du ps. Le discriminant de g est donc négatif soit :

$$(\langle x,y \rangle)^2 \leq \langle x,x \rangle \langle y,y \rangle,$$

on obtient (4.2) en prenant la racine carrée de l'inégalité précédente.

Il est clair que si x et y sont liés, il y a égalité dans (4.2). Réciproquement si il y a égalité dans (4.2) alors le discriminant de g est nul et donc g admet une racine double $t_0 \in \mathbb{R}$, mais $g(t_0) = 0$ ssi $x + t_0 y = 0$ et donc x et y sont liés.

2) : Notons $\|x\| := (\langle x,x \rangle)^{1/2}$, comme $\langle .,. \rangle$ est un ps, on a $\|x\| = 0$ ssi $x = 0$. La bilinéarité implique clairement $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$. Reste à montrer l'inégalité triangulaire : soit $(x,y) \in E \times E$ on a

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 =& \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x,y \rangle \\
\leq& \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \text{ (d'après Cauchy-Schwarz)} \\
=& (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$

ce qui achève de montrer que $\|.\|$ est une norme sur E. $\square$

Notons $\|.\|$ la norme associée au ps $\langle .,. \rangle$ remarquons que la connaissance de cette norme permet de "retrouver" le produit scalaire par l'identité suivante (identité de polarisation) :

$$\langle x,y \rangle = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2). \tag{4.3}$$

Mentionnons aussi l'identité du parallélogramme :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \tag{4.4}$$

Remarque. Il découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que pour tout $x \in H$, la forme linéaire $y \mapsto \langle x,y \rangle$ est continue sur H.

Définition 4.3 *Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien. On dit que $(E, \langle .,. \rangle)$ est un espace de Hilbert ssi E muni de la norme associée à $\langle .,. \rangle$ est complet.*

Exemple 4.1 *$E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel : $\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^N x_i y_i$. Plus généralement, toute matrice carrée de taille n symétrique et définie positive A définit un ps sur $\mathbb{R}^n$ via :*

$$\langle x, y\rangle := x' A y.$$

Evidemment, le cas du ps usuel correspond à $A = I_n$.

Exemple 4.2 *l^2 l'espace des suites réelles (x_n) tq $\sum |x_n|^2 < +\infty$ muni du produit scalaire :*

$$\langle x, y\rangle := \sum_{n\geq 0} x_n y_n.$$

Exemple 4.3 *L'espace de Lebesgue $L^2([0,1], \mathbb{R})$ muni de :*

$$(f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

est un Hilbert mais $C^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la même structure est seulement préhilbertien.

Etant donné un espace préhilbertien $(H, \langle ., \rangle)$, on dit que deux vecteurs u et v sont orthogonaux ssi $\langle u, v\rangle = 0$. Pour $A \subset H$ on appelle orthogonal de A l'ensemble :

$$A^{\perp} := \{x \in H : \langle x, y\rangle = 0, \forall y \in A\}.$$

On vérifie sans peine que $A^{\perp}$ est un sev fermé de H car intersection de sev fermés.

4.2 Projection sur un convexe fermé

Le théorème de projection nous sera très utile par la suite, notamment pour établir les théorèmes de Riesz et de séparation. Il peut (et doit, dans le cadre de ce cours) être compris comme un résultat "idéal" en optimisation. Il énonce en effet l'existence, l'unicité et donne une caractérisation pour le problème (d'optimisation !) de projection (point le plus proche) sur un convexe fermé d'un espace de Hilbert : on peut difficilement demander plus....

On rappelle ici qu'un sous ensemble C d'un ev H est convexe ssi pour tout $(x, y) \in C \times C$ et tout $t \in [0, 1]$ on a : $tx + (1 - t)y \in C$.

Théorème 4.1 *Soit $(H, \langle ., . \rangle)$ un espace de Hilbert et C un convexe fermé non vide de H. Pour tout $x \in H$ il existe un unique élément de C appelé projection de x sur C et notée $p_C(x)$ tq :*

$$\|x - p_C(x)\| = \inf\{\|x - y\| \ , \ y \in C\}.$$

$p_C(x)$ est caractérisé par : $p_C(x) \in C$ et les inéquations variationnelles :

$$\langle x - p_C(x), y - p_C(x) \rangle \leq 0, \ \forall y \in C. \tag{4.5}$$

Preuve:

Notons $d^2(x, C)$ le carré de la distance de x à C :

$$d^2(x, C) := \inf\{\|x - y\|^2, \ y \in C\}.$$

Rappelons l'identité du parallélogramme sous la forme suivante :

$$\|\frac{u - v}{2}\|^2 + \|\frac{u + v}{2}\|^2 = \frac{1}{2}(\|u^2\| + \|v\|^2) \ , \ \forall (u, v) \in H^2. \tag{4.6}$$

Unicité

Supposons y_1 et y_2 dans C tels que :

$$\|x - y_1\|^2 = \|x - y_2\|^2 = d^2(x, C) \tag{4.7}$$

par ailleurs, comme $(y_1 + y_2)/2 \in C$ puisque C est convexe, on a :

$$\|x - (y_1 + y_2)/2\|^2 \geq d^2(x, C). \tag{4.8}$$

En appliquant (4.6) à $u = (x - y_1)$ et $v = (x - y_2)$ et en utilisant (4.7) et (4.8), il vient :

$$\begin{aligned} d^2(x, C) = \frac{1}{2}(\|x - y_1\|^2 + \|x - y_2\|^2) \\ = \|x - (y_1 + y_2)/2\|^2 + \|(y_1 - y_2)/2\|^2 \geq d^2(x, C) + \|(y_1 - y_2)/2\|^2 \end{aligned} \tag{4.9}$$

et donc $y_1 = y_2$.

Existence

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $y_n \in C$ tq :

$$\|x - y_n\|^2 \leq d^2(x, C) + 1/n^2 \tag{4.10}$$

L'identité (4.6) appliquée à $u = (x - y_p)$ et $v = (x - y_q)$ donne d'abord :

$$\frac{1}{2}(\|x - y_p\|^2 + \|x - y_q\|^2) = \|x - (y_p + y_q)/2\|^2 + \|(y_p - y_q)/2\|^2. \quad (4.11)$$

Ensuite, comme $(y_p - y_q)/2 \in C$, on a :

$$\|x - (y_p + y_q)/2\|^2 \geq d^2(x, C). \quad (4.12)$$

De (4.10), (4.11) et (4.12) il vient donc :

$$\|(y_p - y_q)\|^2 \leq \frac{1}{2p^2} + \frac{1}{2q^2} \quad (4.13)$$

on déduit aisément de (4.13), que (y_n) est de Cauchy donc converge, notons $p_C(x)$ sa limite. Comme C est fermé, $p_C(x) \in C$ et on a $\|x - p_C(x)\|^2 = d^2(x, C)$ en passant à la limite dans (4.10).

Caractérisation variationnelle

Soit $y \in C$ et $t \in [0, 1]$, comme $(1 - t)p_C(x) + ty \in C$ on a :

$$\begin{aligned}\|x - p_C(x)\|^2 \leq \|x - ((1 - t)p_C(x) + ty)\|^2 &= \|x - p_C(x) - t(y - p_C(x))\|^2 \\ &= \|x - p_C(x)\|^2 + t^2\|y - p_C(x))\|^2 - 2t\,\langle x - p_C(x), y - p_C(x)\rangle\end{aligned} \quad (4.14)$$

En simplifiant par $\|x - p_C(x)\|^2$, en divisant par t et en faisant tendre t vers 0^+ on obtient que $p_C(x)$ vérifie (4.5).

Réciproquement, supposons que $z \in C$ vérifie :

$$\langle x - z, y - z\rangle \leq 0, \ \forall y \in C. \quad (4.15)$$

Soit $y \in C$, on a alors :

$$\|x - y\|^2 = \|x - z\|^2 + \|z - y\|^2 + 2\,\langle x - z, z - y\rangle \geq \|x - z\|^2$$

ce qui montre que $z = p_C(x)$.

□

Notons que la preuve précédente peut être reprise telle quelle pour traiter la variante suivante :

Théorème 4.2 *Soit $(H, \langle ., .\rangle)$ un espace préhilbertien et C une partie convexe complète non vide de H. Pour tout $x \in H$ il existe un unique élément de C appelé projection de x sur C et notée $p_C(x)$ tq :*

$$\|x - p_C(x)\| = \inf\{\|x - y\| \ , \ y \in C\}.$$

$p_C(x)$ est caractérisé par : $p_C(x) \in C$ et les inéquations variationnelles :

$$\langle x - p_C(x), y - p_C(x)\rangle \leq 0, \ \forall y \in C. \quad (4.16)$$

Une première propriété de la projection sur un convexe fermé est donnée par :

Proposition 4.2 *Les hypothèses et notations sont celles du théorème 4.1 ou 4.2. Pour tout $(x, y) \in H^2$, on a :*

$$\langle x - y, p_C(x) - p_C(y)\rangle \geq 0 \ \textit{et} \ \|p_C(x) - p_C(y)\| \leq \|x - y\| \tag{4.17}$$

En particulier p_C est continue.

Preuve:
En utilisant les inéquations variationnelles caractérisant $p_C(x)$ et $p_C(y)$ on a :

$$\langle x - p_C(x), p_C(y) - p_C(x)\rangle \leq 0 \text{ et } \langle y - p_C(y), p_C(x) - p_C(y)\rangle \leq 0.$$

Sommant ces inégalités et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient :

$$\|p_C(x) - p_C(y)\|^2 \leq \langle p_C(x) - p_C(y), x - y\rangle \leq \|p_C(x) - p_C(y)\|\|x - y\| \tag{4.18}$$

ce qui implique (4.17).
$\square$

Un cas particulier important est celui où C est un sev fermé de H. Dans ce cas non seulement le théorème 4.1 s'applique (un sev est convexe!) mais dans ce cas p_C est linéaire (et continue d'après (4.17)) : c'est la projection orthogonale sur C.

Proposition 4.3 *Soit C un sev fermé d'un Hilbert $(H, \langle ., .\rangle)$ et définissons p_C comme au théorème 4.1. Pour $x \in H$, $p_C(x)$ est caractérisé par :*

$$p_C(x) \in C \ \textit{et} \ (x - p_C(x)) \in C^{\perp}.$$

Enfin $p_C \in L_c(H, C)$ et p_C s'appelle projection orthogonale sur C.

Preuve:
Nous savons que $p_C(x)$ est caractérisé par : $p_C(x) \in C$ et (4.5). Or C est un sev donc $2p_C(x)$ et $p_C(x)/2$ sont dans C, en prenant $y = 2p_C(x)$ puis $y = p_C(x)/2$ dans (4.5) il vient d'abord $\langle x - p_C(x), p_C(x)\rangle = 0$, donc (4.5) se réécrit

$$\langle x - p_C(x), y\rangle \leq 0 \ \forall y \in C$$

mais en changeant $y \in C$ en $-y \in C$ on obtient bien $(x - p_C(x)) \in C^{\perp}$.

Il suffit de montrer que p_C est linéaire : soit $(x_1, x_2, t) \in H^2 \times \mathbb{R}$. Posons $z = p_C(x_1) + tp_C(x_2)$, on a $z \in C$ et $x_1 + tx_2 - z = (x_1 - p_C(x_1)) + t(x_2 - p_C(x_2))$ donc $(x_1 + tx_2 - z) \in C^\perp$ on a donc $z = p_C(x_1 + tx_2)$ ce qui montre la linéarité de p_C.

□

Notons que (toujours dans le cas C sev) p_C est alors une projection au sens algébrique du terme ($p_C \circ p_C = p_C$) et que $\mathrm{id} - p_C$ est la projection orthogonale sur $C^\perp$.

4.3 Le dual d'un espace de Hilbert

Une conséquence importante du théorème de projection est que l'on peut identifier un Hilbert à son dual topologique. C'est l'objet du théorème de représentation de Riesz :

Théorème 4.3 *Soit $(H, \langle ., . \rangle)$ un espace de Hilbert, et $f \in H'$ alors il existe un unique $x \in H$ tel que :*

$$f(u) = \langle x, u \rangle \,, \ \forall u \in H. \tag{4.19}$$

Preuve:
L'unicité est évidente et laissée au lecteur. Si $f = 0$, on prend $x = 0$, supposons donc $f \neq 0$, dans ce cas $F := \ker(f)$ est un hyperplan fermé de H. Soit $x_0 \in H$ tel que $f(x_0) = 1$. En appliquant la proposition 4.3, définissons y_0 la projection orthogonale de x_0 sur F, on a alors $x_0 \neq y_0$ puisque $x_0 \notin F$ et y_0 est caractérisé par :

$$y_0 \in F = \ker(f), \text{ et } (x_0 - y_0) \in F^\perp. \tag{4.20}$$

en particulier, comme $\langle x_0 - y_0, y_0 \rangle = 0$ on a :

$$\langle x_0 - y_0, x_0 \rangle = \|x_0 - y_0\|^2 \neq 0 \tag{4.21}$$

Définissons alors :

$$x := \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|^2} = \frac{x_0 - y_0}{\langle x_0 - y_0, x_0 \rangle} \tag{4.22}$$

d'après (4.20), $x \in F^\perp$ et donc pour $u \in F$ on a $f(u) = \langle x, u \rangle = 0$. Par ailleurs :

$$\langle x, x_0 \rangle = \frac{\langle x_0 - y_0, x_0 \rangle}{\langle x_0 - y_0, x_0 \rangle} = 1 = f(x_0).$$

On conclut que (4.19) est vraie car $F \oplus \mathbb{R}x_0 = H$.

□

Remarque. Notons x_f la solution de :

$$\langle x, u\rangle = f(u),\ \forall u \in H.$$

Et considérons l'application T de H dans H' qui à f associe x_f. Il est facile de voir que $T \in L_c(H, H')$ et que T est un isomorphisme. On a même mieux (le démontrer en exercice) : T est une isométrie

$$\|T(f)\| = \|f\|_{H'},\ \forall f \in H'.$$

4.4 Séparation

Une autre application importante du théorème de projection concerne les théorèmes de séparation (Hahn-Banach) dans les Hilbert. Séparer deux ensembles signifie grosso modo "faire passer un hyperplan entre les deux". Nous allons commencer par la forme la plus simple (séparation d'un point et d'un convexe fermé) :

Théorème 4.4 *Soit $(H, \langle ., .\rangle$ un espace de Hilbert, $x_0 \in H$, C un convexe fermé tel que $x_0 \notin C$, alors il existe $p \in H$, $p \neq 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que*

$$\langle p, x_0\rangle \leq \langle p, y\rangle - \varepsilon,\ \forall y \in C. \tag{4.23}$$

Preuve:
Posons $K := C - x_0 = \{y - x_0,\ y \in C\}$, K est un convexe fermé et $0 \notin K$. Soit $p := p_K(0)$ la projection de 0 sur K, comme $O \notin K$ on a $p \neq 0$, par ailleurs p vérifie les inéquations variationnelles :

$$(\langle 0 - p, z - p\rangle \leq 0,\ \forall z \in K) \iff \big(\langle p, z\rangle \geq \|p\|^2 > 0,\ \forall z \in K\big). \tag{4.24}$$

De (4.24) et $K = C - x_0$, il vient donc :

$$\langle p, y\rangle \geq \langle p, x_0\rangle + \|p\|^2,\ \forall y \in C. \tag{4.25}$$

□

Il faut bien comprendre géométriquement ce que signifie le théorème précédent : la séparation de x_0 et C exprime le fait que x_0 et C se situent de part et d'autre d'un hyperplan affine (parallèle à $p^\perp$) c'est à dire dans deux demi-espaces distincts. Le théorème précédent est un résultat de séparation stricte (présence du $\varepsilon > 0$), autrement dit C est inclus dans le demi-espace ouvert $\{x \in H :\ \langle p, x - x_0\rangle > \varepsilon/2\}$ tandis que x_0 est évidemment dans $\{x \in H :\ \langle p, x - x_0\rangle < \varepsilon/2\}$.

Remarque. La convexité de C est une hypothèse fondamentale : dans $\mathbb{R}^2$ soit $C = \overline{B}((0,0),1) \setminus B((0,1),1/2)$, $x_0 := (0,3/4) \notin C$ et on ne peut pas séparer x_0 de C.

Remarque. Il existe des théorèmes de séparation valables dans des cadres beaucoup plus généraux que celui des espaces de Hilbert. Les ingrédients de démonstration sont cependant plus délicats et dépassent le cadre de ce cours.

Soit A et B deux parties non vides d'un ev, l'ensemble $A - B$ est défini par :

$$A - B := \{a - b, \ (a,b) \in A \times B\}.$$

Lemme 4.1 *Soit $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace de Hilbert, A et B deux parties non vides de H. On a :*

1. *Si A et B sont convexes, alors $A - B$ est convexe,*
2. *Si A est compact et B est fermé, alors $A - B$ est fermé.*

Preuve:
La preuve de l'assertion 1. est immédiate et laissée au lecteur. Prouvons 2., supposons que la suite $x_n = a_n - b_n$ ($(a_n, b_n) \in A \times B$) converge vers une limite x. Comme A est compact, (a_n) admet une sous suite $(a_{\varphi(n)})$ qui converge vers un élément a de A. On en déduit que $b_{\varphi(n)} = a_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}$ converge vers $a - x$, comme B est fermé $b := a - x$ est dans B donc $x \in A - B$.
$\Box$

Remarque. Pour A et B seulement fermés on n'a pas en général $A - B$ fermé. Dans $\mathbb{R}^2$ soit $A := \mathbb{R}_+ \times \{0\}$ et $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, \ y \geq 1/x\}$ A et B sont deux convexes fermés et $(0,0) \notin A - B$. En considérant $a_n = (n,0)$ et $b_n = (n, 1/n)$ il est facile de voir que $(0,0) \in \overline{(A - B)}$.

Théorème 4.5 *Soit $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace de Hilbert, K un convexe compact et C un convexe fermé de H tels que $K \cap C = \emptyset$, alors il existe $p \in H$, $p \neq 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que*

$$\langle p, y \rangle \leq \langle p, x \rangle - \varepsilon, \ \forall (x,y) \in K \times C. \tag{4.26}$$

Preuve:
Posons $D := K - C$, D est un convexe fermé de H d'après le lemme 4.1 et $0 \notin D$ puisque $K \cap C = \emptyset$. En appliquant le théorème 4.4, on peut séparer (strictement) 0 de D et donc il existe $p \in H$, $p \neq 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$0 \leq \langle p, z \rangle - \varepsilon, \ \forall z \in D. \tag{4.27}$$

C'est à dire, par définition de D :

$$\langle p, y \rangle \leq \langle p, x \rangle - \varepsilon, \; \forall (x, y) \in K \times C. \tag{4.28}$$

□

4.5 Lemme de Farkas

Nous terminons ce chapitre par une conséquence particulièrement importante du théorème de séparation : le lemme de Farkas (en fait de Farkas-Minkowski). En optimisation, ce résultat est la clé de voûte de la démonstration du théorème de Kuhn et Tucker.

Rappelons qu'une partie K d'un $\mathbb{R}$-ev E est un <u>cône</u> ssi :

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times K, tx \in K.$$

Nous aurons d'abord besoin du lemme suivant :

Lemme 4.2 *Soit E un evn, $q \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, ..., a_q) \in E^q$ et soit :*

$$K := \left\{ \sum_{i=1}^{q} \lambda_i a_i, \; (\lambda_1, ..., \lambda_q) \in \mathbb{R}_+^q \right\}$$

Alors K est un cône convexe fermé de E.

Preuve:
Le fait que K soit un cône convexe est évident. Pour montrer qu'il est fermé, faisons une récurrence sur q. Pour $q = 1$, le résultat est évident. Faisons donc l'hypothèse au rang $q \geq 1$ que pour tout $(a_1, ..., a_q) \in E^q$, le cône :

$$\left\{ \sum_{i=1}^{q} \lambda_i a_i, \; (\lambda_1, ..., \lambda_q) \in \mathbb{R}_+^q \right\}$$

est fermé. Soit maintenant, $(a_1, ..., a_{q+1}) \in E^{q+1}$, il s'agit de montrer que le cône :

$$K := \left\{ \sum_{i=1}^{q+1} \lambda_i a_i, \; (\lambda_1, ..., \lambda_{q+1}) \in \mathbb{R}_+^{q+1} \right\}$$

est fermé. Considérons d'abord le cas, où $-a_i \in K$ pour $i = 1, ..., q+1$, dans ce cas K est le sev engendré par les vecteurs $(a_1, ..., a_{q+1})$, K est donc un sev de dimension finie de E, il est par conséquent fermé (s'en convaincre !).

Supposons maintenant qu'il existe $i \in \{1, ..., q+1\}$ tel que $-a_i \notin K$, quitte à permuter les indices nous pouvons supposer

$$-a_{q+1} \notin K. \tag{4.29}$$

Montrons que K est fermé. Rappelons d'abord que par hypothèse de récurrence le cône suivant est fermé :

$$K_0 := \left\{ \sum_{i=1}^{q} \lambda_i a_i, \ (\lambda_1, ..., \lambda_{q+1}) \in \mathbb{R}_+^{q+1} \right\}.$$

Soit $y_n \in K^{\mathbb{N}}$ convergeant dans E vers y, il s'agit de montrer que $y \in K$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $\lambda_{i,n} \geq 0$, $i = 1, ..., q$ et $\mu_n \geq 0$ tel que :

$$y_n = \sum_{i=1}^{q} \lambda_{i,n} a_i + \mu_n a_{q+1} = z_n + \mu_n a_{q+1} \tag{4.30}$$

($z_n := \sum_{i=1}^{q} \lambda_{i,n} a_i \in K_0$). Montrons que μ_n est bornée : sinon il existerait une sous suite que nous noterons encore μ_n tendant vers $+\infty$, en divisant (4.30) par μ_n, en passant à la limite, et en utilisant le fait que K_0 est fermé, on obtiendrait :

$$-a_{q+1} = \lim_n \frac{z_n}{\mu_n} \in K_0$$

ce qui contredirait (4.29). Comme μ_n bornée on peut, à une sous-suite près, supposer que μ_n converge vers $\mu \geq 0$. Comme $y_n = z_n + \mu_n a_{q+1}$ converge vers y on en déduit que z_n converge vers $z = y - \mu a_{q+1}$, en utilisant à nouveau que K_0 est fermé on a $z \in K_0$ et donc $y = z + \mu a_{q+1}$ appartient à K.
□

Le lemme de Farkas s'énonce comme suit :

Proposition 4.4 *Soit $(H, \langle ., . \rangle)$ un espace de Hilbert, $q \in \mathbb{N}^*$ et $(a, a_1, ..., a_q) \in H^{q+1}$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *pour tout $x \in H$, si $\langle a_i, x \rangle \leq 0$ pour $i = 1, ..., q$ alors $\langle a, x \rangle \leq 0$,*
2. *il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_q) \in \mathbb{R}_+^q$ tels que $a = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i a_i$.*

Preuve:
L'implication 2. $\Rightarrow$ 1. est évidente. Remarquons que 2. signifie simplement que $a \in K$ avec

$$K := \left\{ \sum_{i=1}^{q} \lambda_i a_i, \ (\lambda_1, ..., \lambda_q) \in \mathbb{R}_+^q \right\}.$$

Supposons que 1. est satisfaite et $a \notin K$. En vertu du lemme 4.2 K est convexe fermé : on peut donc séparer strictement a de K. Il existe donc $x \in H$ et $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\sup_{p \in K} \langle p, x \rangle \leq \langle a, x \rangle - \varepsilon. \tag{4.31}$$

Soit $p \in K$ comme $tp \in K$ pour tout $t > 0$, (4.31) implique en particulier :

$$\sup_{t>0} t \langle p, x \rangle < +\infty$$

ce qui implique donc $\langle p, x \rangle \leq 0$ pour tout $p \in K$. Comme $0 \in K$, il vient donc :

$$\sup_{p \in K} \langle p, x \rangle = 0$$

En reportant dans (4.31), on a donc :

$$\sup_{p \in K} \langle p, x \rangle = 0 \leq \langle a, x \rangle - \varepsilon. \tag{4.32}$$

Ceci implique enfin que $\langle a_i, x \rangle \leq 0$ pour $i = 1, ..., q$ et $\langle a, x \rangle \geq \varepsilon > 0$ ce qui contredit 1.. $\Box$

Une conséquence immédiate du lemme de Farkas est la variante suivante :

Corollaire 4.1 *Soit $(H, \langle ., . \rangle)$ un espace de Hilbert, $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et $(a_1, ..., a_p, a_{p+1}, ..., a_{p+q}, a) \in H^{p+q+1}$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *pour tout $x \in H$, si $\langle a_i, x \rangle \leq 0$ pour $i = 1, ..., p$ et $\langle a_i, x \rangle = 0$ pour $i = p+1, ..., p+q$ alors $\langle a, x \rangle \leq 0$,*
2. *il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}_+^p$ et $(\lambda_{p+1}, ..., \lambda_{p+q}) \in \mathbb{R}^q$ tels que $a = \sum_{i=1}^{p+q} \lambda_i a_i$.*

Deuxième partie

Calcul différentiel

Chapitre 5

Quelques rappels

5.1 Plusieurs notions de différentiabilité

Dans ce qui suit on se donne $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux $\mathbb{R}$-evn, Ω un ouvert de E et f une application définie sur Ω à valeurs dans F. Si $x \in \Omega$ alors il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \Omega$ en particulier si $h \in E$ et $t \in \mathbb{R}$ est assez petit (tel que $|t|\|h\|_E < r$) alors $x + th \in \Omega$. On a alors une première notion de dérivabilité : celle de dérivabilité dans la direction h :

Définition 5.1 *Soit $x \in \Omega$ et $h \in E$, on dit que f est dérivable en x dans la direction h ssi la limite suivante existe (au sens de la topologie de $(F, \|.\|_F)$) :*

$$\lim_{t \to 0,\ t \neq 0} \frac{1}{t}(f(x + th) - f(x)).$$

Si cette limite existe, on l'appelle dérivée directionnelle de f en x dans la direction h et on la note $Df(x; h)$.

Notons que f est dérivable en x dans la direction h ssi les limites (à droite et à gauche) suivantes (au sens de la topologie de $(F, \|.\|_F)$) :

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}(f(x + th) - f(x)) \text{ et } \lim_{t \to 0^-} \frac{1}{t}(f(x + th) - f(x)).$$

existent et sont égales. Ceci conduit à la définition :

Définition 5.2 *Soit $x \in \Omega$ et $h \in E$, on dit que f est dérivable à droite en x dans la direction h ssi la limite suivante existe (au sens de la topologie de $(F, \|.\|_F)$) :*

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}(f(x + th) - f(x)).$$

Si cette limite existe, on l'appelle dérivée à droite de f en x dans la direction h et on la note $D^+f(x; h)$.

En remarquant que si f est dérivable à droite en x dans la direction $-h$ alors :

$$D^+f(x;-h) = -\lim_{t\to 0^-} \frac{1}{t}(f(x+th) - f(x))$$

nous en déduisons que f est dérivable en x dans la direction h ssi f est dérivable à droite en x dans les directions h et $-h$ et :

$$D^+f(x;-h) = -D^+f(x;h).$$

Trois exercices (très) faciles, avant d'aller plus loin :

Exercice 5.1 *Montrer que $Df(x;0)$ existe (aucune hypothèse sur f) et vaut 0.*

Exercice 5.2 *Montrer que si f est dérivable à droite en x dans la direction h, alors pour tout $\lambda > 0$, f est dérivable à droite en x dans la direction λh et :*

$$D^+f(x;\lambda h) = \lambda D^+f(x;h).$$

Exercice 5.3 *Montrer que si f est dérivable en x dans la direction h, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, f est dérivable en x dans la direction λh et :*

$$Df(x;\lambda h) = \lambda Df(x;h).$$

Définition 5.3 *Soit $x \in \Omega$ on dit que f est Gâteaux-dérivable en x ssi f admet une dérivée directionnelle dans la direction h pour tout $h \in E$ et l'application $h \mapsto Df(x;h)$ est <u>linéaire</u> et <u>continue</u>. On note alors $Df(x;h) := D_Gf(x)(h)$ et $D_Gf(x) \in L_c(E,F)$ s'appelle la dérivée au sens de Gâteaux de f en x. On dit que f est Gâteaux dérivable sur Ω ssi f est Gâteaux-différentiable en chaque point de $x \in \Omega$.*

Remarque. La Gâteaux différentiabilité est une notion assez faible qui n'<u>entraine pas</u> automatiquement la continuité. Pour s'en persuader, on étudiera avec profit le comportement au voisinage de 0 de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad y = x^2 \text{ et } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque. Le fait que les dérivées directionnelles $Df(x;h)$ existent $\forall h \in E$ n'impliquent pas que f soit Gâteaux-dérivable en x. Pour s'en persuader, étudier la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \\ \frac{x^3}{x^2+|y|} & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque. (importante) La définition de la Gâteaux-différentiabilité dépend du choix des normes sur E et F. Il est cependant facile de voir que le choix de normes équivalentes sur E et F conduit à la même définition. En particulier, si E et F sont de dimension finie, le choix de normes particulières est sans incidence sur la définition 5.3.

Une notion plus forte est la notion de différentiabilité au sens de Fréchet :

Définition 5.4 *Soit $x \in \Omega$ on dit que f est Fréchet-dérivable (ou simplement dérivable ou différentiable) en x ssi il existe $L \in L_c(E, F)$ et une fonction ε définie sur un voisinage de 0 dans E et à valeurs dans F tels que :*

$$f(x+h) = f(x) + L(h) + \|h\|_E \cdot \varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \to 0} \|\varepsilon(h)\|_F = 0. \tag{5.1}$$

Sous forme quantifiée, (5.1) signifie exactement : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $h \in E$, on a :

$$\|h\|_E \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow \|f(x+h) - f(x) - L(h)\|_F \leq \varepsilon \|h\|_E$$

Remarque. (importante) La définition de la (Fréchet)-différentiabilité dépend du choix des normes sur E et F. Il est cependant facile de voir que le choix de normes équivalentes sur E et F conduit à la même définition (s'en convaincre à titre d'exercice facile). En particulier, si E et F sont de dimension finie, le choix de normes particulières est sans incidence sur la définition 5.4.

Remarque. Si f est dérivable en x alors f est continue en x (noter la différence avec la Gâteaux différentiabilité).

On écrit aussi usuellement (5.1) sous la forme synthétique :

$$f(x+h) = f(x) + L(h) + o(h) \tag{5.2}$$

la notation $o(h)$ désignant une fonction qui "tend vers 0 (dans F) plus vite que h lorsque h tend vers 0 (dans E)", c'est à dire :

$$\lim_{h \to 0,\ h \neq 0} \frac{\|o(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0. \tag{5.3}$$

Remarque. Lorsque E est de dimension finie, en vertu du théorème 3.2 $L_c(E, F) = L(E, F)$ et donc on peut omettre la condition "L continue" dans la définition 5.4.

Lemme 5.1 *Soit $x \in \Omega$ s'il existe $L_1 \in L_c(E,F)$ et $L_2 \in L_c(E,F)$ tels que :*

$$f(x+h) = f(x) + L_1(h) + o(h) = f(x) + L_2(h) + o(h).$$

alors $L_1 = L_2$.

Preuve:
On a $(L_1 - L_2)h = o(h)$ donc pour $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $h \in B(0,\delta)$, on a :

$$\|(L_1 - L_2)(h)\|_F \leq \varepsilon \|h\|_E$$

et donc

$$\|L_1 - L_2\|_{L_c(E,F)} \leq \varepsilon$$

comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on en déduite $L_1 = L_2$.
□

Le lemme précédent montre qu'il existe au plus un élément L de $L_c(E,F)$ vérifiant (5.2), ceci permet de définir la dérivée (au sens de Fréchet) de f en x, $f'(x)$ de manière intrinsèque :

Définition 5.5 *Soit $x \in \Omega$ et f différentiable en x, on appelle différentielle (ou dérivée) de f en x, et l'on note $f'(x)$ l'unique élément de $L_c(E,F)$ vérifiant :*

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)(h) + o(h).$$

On dit que f est différentiable sur Ω ssi f est différentiable en chaque point de $x \in \Omega$

Si f est différentiable en x alors f est Gâteaux différentiable en x, admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions, et :

$$f'(x) = D_G f(x),\ Df(x;h) = f'(x)(h)\ \forall h \in E.$$

Bien retenir que la dérivée de f en x (qu'elle soit au sens Gâteaux ou Fréchet) est une application linéaire continue de E vers F. Lorsque f est différentiable sur Ω (Gâteaux ou Fréchet), sa dérivée ($f' : x \mapsto f'(x)$ ou $D_G f : x \mapsto D_G f(x)$) est donc une application définie sur Ω à valeurs dans $L_c(E,F)$.

Définition 5.6 *On dit que f est de classe C^1 sur Ω (ce que l'on note $f \in C^1(\Omega,F)$) ssi f est différentiable sur Ω et $f' \in C^0(\Omega, L_c(E,F))$.*

On a alors le :

Théorème 5.1 *Si f est Gâteaux-différentiable sur Ω et $D_G f \in C^0(\Omega, L_c(E, F))$ alors f est de classe C^1 sur Ω .*

Nous prouverons ce résultat au chapitre suivant. Le théorème 5.1 est très utile car il permet de procéder comme suit pour montrer en pratique que f est de classe C^1 :

- **Etape 1 :** On calcule $Df(x; h)$ pour $(x, h) \in \Omega \times E$.
- **Etape 2 :** On montre que $h \mapsto Df(x; h)$ est linéaire continue donc f est Gâteaux-différentiable en x et $Df(x; h) = D_G f(x)(h)$.
- **Etape 3 :** On montre que $D_G f : x \mapsto D_G f(x)$ est continue de Ω dans $L_c(E, F)$.

Concernant les applications bijectives, on a les définitions :

Définition 5.7 *Soit Ω un ouvert de E, Ω' un ouvert de F et f une bijection de Ω sur Ω' on dit que :*

- *f est un homéomorphisme de Ω sur Ω' si $f \in C^0(\Omega, \Omega')$ et $f^{-1} \in C^0(\Omega', \Omega)$,*
- *f est un C^1-difféomorphisme (ou difféomorphisme de classe C^1) de Ω sur Ω' si $f \in C^1(\Omega, \Omega')$ et $f^{-1} \in C^1(\Omega', \Omega)$.*

Lorsque l'espace de départ E est un espace de Hilbert et que l'espace d'arrivée est $\mathbb{R}$, alors la dérivée étant une forme linéaire continue sur E, on peut en utilisant le théorème de Riesz identifier la dérivée à un élément de E, cela conduit à la notion de vecteur gradient :

Définition 5.8 *Soit $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace de Hilbert, Ω un ouvert de E, f une application définie sur E à valeurs réelles et $x \in \Omega$. Si f est Gâteaux-différentiable en x, on appelle gradient de f en x et l'on note $\nabla f(x)$ l'unique élément de E tel que :*

$$D_G f(x)(h) = \langle \nabla f(x), h \rangle \text{ pour tout } h \in E.$$

Dans le cas particulier $E = \mathbb{R}^n$ (muni de son ps usuel), nous verrons par la suite que le gradient de f en x est le vecteur formé par les dérivées partielles par rapport aux n coordonnées de f en x.

5.2 Règles de calcul

Proposition 5.1 *Soit f et g deux applications définies sur Ω à valeurs dans F et $x \in \Omega$, on a :*

1. *si f est constante au voisinage de x alors f est différentiable en x et $f'(x) = 0$,*
2. *si f est différentiable en x, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, αf est différentiable en x et :*
$$(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$$
3. *Si f et g sont différentiables en $x \in$ alors $f + g$ aussi et :*
$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$
4. *Si $L \in L_c(E, F)$ alors $L \in C^1(E, F)$ et : $L'(z) = L$ pour tout $z \in E$.*

Sur la dérivabilité des applications bilinéaires continues on a le résultat dont la preuve est laissée en exercice au lecteur :

Proposition 5.2 *Soit E, F et G, trois $\mathbb{R}$-evn, $a \in L_{2,c}(E \times F, G)$ alors $a \in C^1(E \times F, G)$ et pour tout $(x, y) \in E \times F$ et $(h, k) \in E \times F$, on a :*

$$a'(x, y)(h, k) = a(x, k) + a(h, y).$$

Proposition 5.3 *Soit E, $F_1, ..., F_p$ des $\mathbb{R}$-evn, Ω un ouvert de E, et pour $i = 1, ..., p$, f_i une applications définie sur Ω à valeurs dans F_i. Pour $x \in \Omega$ on définit :*

$$f(x) = (f_1(x), ..., f_p(x)) \in \prod_{i=1}^{p} F_i,$$

alors f est différentiable en $x \in \Omega$ ssi f_i est différentiable en $x \in \Omega$ pour $i = 1, ..., p$ et l'on a dans ce cas :

$$f'(x)(h) = (f_1'(x)(h), ..., f_p'(x)(h)) \text{ pour tout } h \in E$$

On peut noter le résultat précédent sous forme synthétique :

$$f' = (f_1, ..., f_p)' = (f_1', ..., f_p')$$

qui exprime que la dérivation se fait composante par composante.

Concernant la dérivabilité d'une composeé, on a :

Théorème 5.2 *Soit E, F et G trois evn, Ω un ouvert de E, U un ouvert de F, f une application définie sur Ω à valeurs dans F, g une application définie sur U à valeurs dans G et $x \in \Omega$. Si f est différentiable en x, $f(x) \in U$ et g est différentiable en $f(x)$ alors $g \circ f$ est différentiable en x et l'on a :*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x).$$

Corollaire 5.1 *Si, en plus des hypothèses du théorème précédent, on suppose que f est de classe C^1 sur Ω, que $f(\Omega) \subset U$ et que g est de classe C^1 sur U alors $g \circ f$ est de classe C^1 sur Ω.*

Sur la dérivabilité d'un produit (scalaire $\times$ vecteur), on a :

Proposition 5.4 *Soit E, et F et deux evn, Ω un ouvert de E, f une application définie sur Ω à valeurs dans F, u une application définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $x \in \Omega$. Si f et u sont différentiables en x, alors $u \cdot f$ est différentiable en x et l'on a :*

$$(u \cdot f)'(x)(h) = (u'(x)(h)) \cdot f(x) + u(x) \cdot f'(x)(h) \text{ pour tout } h \in E.$$

Enfin, nous admettrons le résultat suivant sur la dérivabilité de l'inverse. Retenez que le résultat qui suit n'est valable que dans le cadre complet car sa démonstration utilise le théorème de Banach 3.3.

Théorème 5.3 *Soit E, F deux espaces de Banach, Ω un ouvert de E, U un ouvert de F, f un homéomorphisme de Ω dans U ($f^{-1} : U \to \Omega$) et $x \in \Omega$. Si f est différentiable en x et si $f'(x)$ est inversible alors f^{-1} est différentiable en $f(x)$ et :*

$$(f^{-1})'(f(x)) = [f'(x)]^{-1}.$$

5.3 Dérivées partielles

Intéressons nous maintenant au cas où l'espace de départ est un produit d'evn : $E = E_1 \times ... \times E_p$ chaque E_k est muni d'une norme N_k et E est muni de la norme produit :

$$N : x = (x_1, ..., x_p) \mapsto N(x) := N_1(x_1) + ... + N_p(x_p).$$

(ou de n'importe quelle norme équivalente).

Dans ce qui suit, on considère Ω un ouvert de E de la forme $\Omega = \Pi_{k=1}^{p} \Omega_k$ avec Ω_k un ouvert de E_k, F un evn et f une application définie sur Ω à valeurs dans F.

Définition 5.9 *Soit $x = (x_1, ..., x_p) \in \Omega$ et $k \in \{1, ..., p\}$, on dit que f admet une dérivée partielle par rapport à la k-ième variable en x ssi la k-ième application partielle :*

$$y \in \Omega_k \mapsto f(x_1, ..., x_{k-1}, y, x_{k+1}, , x_p) \in F$$

est différentiable en x_k. On appelle alors dérivée partielle de f par rapport à la k-ième variable en x et l'on note $\partial_k f(x)$ (ou aussi souvent $\partial_{x_k} f(x)$, $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$, $D_k f(x)$, $f_{x_k}(x)$, $f'_{x_k}(x)$) la dérivée de cette application partielle en x_k.

Remarque. La notion de dérivée partielle est reliée à celle de dérivée directionnelle. En effet, il est facile de voir que si f admet une dérivée partielle par rapport à la k-ième variable en x alors f est dérivable en x dans la direction $(0, ..., 0, h_k, 0, ..., 0)$ et l'on a :

$$Df(x; (0, ..., 0, h_k, 0, ..., 0)) = \partial_k f(x)(h_k)$$

Noter que la notion de différentiabilité de la définition précédente est celle de Fréchet et bien comprendre que $\partial_k f(x) \in L_c(E_k, F)$. Le lien entre dérivée et et dérivées partielles est donné par des formules connues et utiles :

Proposition 5.5 *Soit $x = (x_1, ..., x_p) \in \Omega$, si f est différentiable en x alors, pour tout $k \in \{1, ..., p\}$, f admet une dérivée partielle par rapport à la k-ième variable en x et on a :*

$$\partial_k f(x)(h_k) = f'(x)(0, ..., h_k, ..., 0), \ \forall h_k \in E_k, \tag{5.4}$$

et pour tout $h = (h_1, ..., h_p) \in E$:

$$f'(x)(h) = \sum_{k=1}^{p} \partial_k f(x)(h_k). \tag{5.5}$$

Le fait d'être différentiable implique donc d'admettre des dérivées partielles, la réciproque est fausse (cf remarque sur les dérivées directionnelles). En revanche si f admet des dérivées partielles et que celles ci dépendent continûment de x alors f est de classe C^1, c'est l'objet du :

Théorème 5.4 *Si pour tout $k \in \{1, ..., p\}$ et tout $x \in \Omega$, f admet une dérivée partielle par rapport à la k-ième variable en x et si l'application $x \mapsto \partial_k f(x)$ (définie sur Ω et à valeurs dans $L_c(E_k, F)$) est continue sur Ω alors f est de classe C^1 sur Ω et la formule (5.5) est satisfaite.*

Ce théorème très utile en pratique sera démontré au prochain chapitre.

5.4 Représentation matricielle en dimension finie

Nous allons maintenant nous intéresser au cas où E et F sont de dimension finie. Dans ce cas, puisque la dérivée de f en x est une application linéaire de E dans F, on peut la représenter sous la forme d'une matrice. Comme d'habitude quand on fait du calcul matriciel, il est utile de représenter les vecteurs sous forme de vecteurs colonnes. On suppose donc dans ce paragraphe que $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$, Ω est un ouvert de $E = \mathbb{R}^n$ et f une application définie sur Ω à valeurs dans $F = \mathbb{R}^p$. On note les éléments de $\mathbb{R}^n$ sous la forme :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

et f, sous la forme :

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ . \\ . \\ . \\ . \\ f_p(x) \end{pmatrix}$$

avec f_i définie sur Ω à valeurs réelles est la i-ème composante de f. Nous savons que f est différentiable en $x \in \Omega$ ssi chaque composante de f, f_1, ..., f_p est différentiable en x et dans ce cas chaque f_i admet une dérivée partielle par rapport à chaque variable x_j. D'après la formule (5.5) on a pour tout $i \in \{1, , p\}$ et tout $h \in \mathbb{R}^n$:

$$f_i'(x)(h) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f_i(x) h_j$$

et donc :

$$f'(x)(h) = \begin{pmatrix} f_1'(x)(h) \\ . \\ . \\ . \\ . \\ f_p'(x)(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \partial_j f_1(x) h_j \\ . \\ . \\ . \\ . \\ \sum_{j=1}^n \partial_j f_i(x) h_j \end{pmatrix}$$

ce qui peut se réecrire sous forme matricielle :

$$f'(x)(h) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & . & . & \partial_n f_1(x) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \partial_1 f_p(x) & . & . & \partial_n f_p(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ h_n \end{pmatrix}$$

Ainsi l'application linéaire $f'(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est représentée dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ par la matrice de format $p \times n$ de terme général $\partial_j f_i(x)$ que l'on appelle <u>matrice jacobienne</u> de f en x et que l'on note $Jf(x)$:

$$Jf(x) := \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & . & . & \partial_n f_1(x) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \partial_1 f_p(x) & . & . & \partial_n f_p(x) \end{pmatrix}$$

ainsi, sous forme matricielle l'expression de la différentielle de f en x est donnée par :

$$f'(x)(h) = Jf(x)h, \text{ pour tout } h = \begin{pmatrix} h_1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ h_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Notons que les règles de calcul (composition, inverse...) se traduisent matriciellement. Si f est différentiable en x et si g est une application définie sur un voisinage de $f(x)$ dans $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ et si g est différentiable en $f(x)$, alors $g \circ f$ est différentiable en x et l'on a :

$$J(g \circ f)(x) = Jg(f(x)) \times Jf(x).$$

Prenons par exemple $n = p = 2$ et $k = 1$, en appliquant l'expression matricielle précédente de la dérivée d'une composée, il vient :

$$\begin{aligned} \partial_1(g \circ f)(x_1, x_2) &= \partial_1 g(f(x_1, x_2))\partial_1 f_1(x_1, x_2) + \partial_2 g(f(x_1, x_2))\partial_1 f_2(x_1, x_2), \\ \partial_2(g \circ f)(x_1, x_2) &= \partial_1 g(f(x_1, x_2))\partial_2 f_1(x_1, x_2) + \partial_2 g(f(x_1, x_2))\partial_2 f_2(x_1, x_2). \end{aligned}$$

De même, si f est un homéomorphisme d'un voisinage de x sur un voisinage de $f(x)$ et si la matrice $Jf(x)$ est inversible (ce qui implique que $n = p$) alors f^{-1} est différentiable en $f(x)$ et l'on a :

$$Jf^{-1}(f(x)) = [Jf(x)]^{-1}.$$

Dans le cas du but réel c 'est à dire $F = \mathbb{R}$, $Jf(x)$ est le vecteur ligne :

$$Jf(x) := (\partial_1 f_1(x), ..., \partial_n f_1(x))$$

ainsi :

$$f'(x)(h) = \langle \nabla f(x), h \rangle = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(x) h_j = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ . \\ . \\ . \\ . \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ h_n \end{pmatrix} \text{ pour tout } h \in \mathbb{R}^n$$

en identifiant on a donc l'expression du gradient de f en x :

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ . \\ . \\ . \\ . \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix}.$$

Dans le cas polaire où $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}^p$ et en notant $f = (f_1, ..., f_p)$, si f est dérivable en t, alors $f'(t) \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^p)$:

$$f'(t)(h) = (f_1'(t), ..., f_p'(t))h, \text{ pour tout } h \in \mathbb{R}$$

et on identife simplement $f'(t)$ au vecteur de $\mathbb{R}^p$, $(f_1'(t), ..., f_p'(t))$.

Chapitre 6

Accroissements finis, formules de Taylor

6.1 Inégalités d'accroissements finis

Commencons par des rappels sur le cas réel. Rappelons d'abord le théorème de Rolle :

Théorème 6.1 *Soit $a < b$ deux réels et $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$. Si $f(a) = f(b)$ et f est dérivable sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Le théorème des accroissements finis (TAF en abrégé) s'énonce alors comme suit

Théorème 6.2 *Soit $a < b$ deux réels et $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$. Si f est dérivable sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Etant donnés, un evn E et $(a, b) \in E^2$ on rappelle que :

$$[a, b] = \{ta + (1 - t)b,\ t \in [0, 1]\} \text{ et }]a, b[= \{ta + (1 - t)b,\ t \in]0, 1[\}$$

On déduit alors du théorème 6.2 un TAF pour des fonctions de plusieurs variables <u>à valeurs réelles</u> :

Théorème 6.3 *Soit E un evn, Ω un ouvert de E, $a \neq b$ deux points de Ω tels que $[a, b] \subset \Omega$ et f une fonction définie sur Ω <u>à valeurs réelles</u>. Si f est continue sur $[a, b]$ et la dérivée directionnelle $Df(x; b - a)$ existe en tout $x \in]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :*

$$f(b) - f(a) = Df(c; b - a).$$

Preuve:
Définissons pour $t \in [0,1]$, $g(t) := f(a + t(b-a))$, g est continue sur $[0,1]$ et si $t \in]0,1[$ on a :

$$\lim_{h\to 0,\ h\neq 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \lim_{h\to 0,\ h\neq 0} \frac{f(a + (t+h)(b-a)) - f(a + t(b-a))}{h}$$

et comme la dérivée directionnelle $Df(a + t(b-a); b-a)$ existe, nous en déduisons que g est différentiable sur $]0,1[$ avec :

$$g'(t) = Df(a + t(b-a); b-a)$$

on applique alors le TAF à g : il existe $t \in]0,1[$ tel que $g(1) - g(0) = g'(t)$ en posant $c = a + t(b-a)$ on a donc :

$$f(b) - f(a) = Df(c; b-a).$$

$\square$

Pour des fonctions à valeurs dans un evn F, l'inégalité des accroissements finis (IAF) s'énonce comme suit :

Théorème 6.4 *Soit E et F deux $\mathbb{R}$-evn, Ω un ouvert de E, f une fonction définie sur Ω à valeurs dans F, $(a,b) \in \Omega^2$ tels que $a \neq b$, $[a,b] \subset \Omega$ et f est continue sur $[a,b]$. Si la dérivée directionnelle $Df(x; b-a)$ existe en tout $x \in]a,b[$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que :*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|Df(c; b-a)\|. \tag{6.1}$$

Preuve:
Nous allons nous limiter au cas où F est un espace de Hilbert et admettrons le résultat dans le cas général. Soit $p \in F$ et pour $t \in E$, définissons :

$$g(t) := \langle p, f(a + t(b-a)\rangle$$

alors g (à valeurs réelles) vérifie les hypothèses du théorème 6.2 : il existe $t \in]0,1[$ (noter que t dépend de p) tel que :

$$\langle p, f(b) - f(a)\rangle = g(1) - g(0) = g'(t) = \langle p, Df(c; b-a)\rangle \tag{6.2}$$

(où l'on a posé $c = a + t(b-a) \in]a,b[$). Si $f(b) = f(a)$, le résultat cherché, est évident, on suppose donc $f(b) \neq f(a)$, en appliquant (6.2) à $p = (f(b) - f(a))/\|f(b) - f(a)\|$ et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz il vient alors :

$$\begin{aligned}\left\langle f(b) - f(a), \frac{f(b) - f(a)}{\|f(b) - f(a)\|}\right\rangle &= \|f(b) - f(a)\| = \langle p, Df(c; b-a)\rangle \\ &\leq \|p\|\|Df(c; b-a)\| = \|Df(c; b-a)\|.\end{aligned}$$

□

Si f est Gâteaux-dérivable sur Ω, alors la conclusion du théorème 6.4 implique qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|D_G f(c)(b-a)\| \leq \|D_G f(c)\| \|b-a\|. \tag{6.3}$$

Notons aussi que si f est Gâteaux-dérivable sur Ω et si $[a, b] \subset \Omega$ alors f est continue sur $[a, b]$ (exercice).

On en déduit plusieurs corollaires :

Corollaire 6.1 *Soit E et F deux $\mathbb{R}$-evn, Ω un ouvert de E, f une fonction définie sur Ω à valeurs dans F, $(a, b) \in \Omega^2$ tels que $a \neq b$, $[a, b] \subset \Omega$ et f est continue sur $[a, b]$. Si la dérivée directionnelle $Df(x; b-a)$ existe en tout $x \in]a, b[$ alors :*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{c \in]a,b[} \|Df(c; b-a)\|. \tag{6.4}$$

(le sup pouvant valoir $+\infty$.)

Si f est Gâteaux-dérivable sur Ω, alors la conclusion du corollaire 6.1 implique :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{c \in]a,b[} \|D_G f(c)\| \|b-a\|. \tag{6.5}$$

On en déduit donc

Corollaire 6.2 *Soit E et F deux $\mathbb{R}$-evn, Ω un ouvert <u>convexe</u> de E, f une fonction définie sur Ω à valeurs dans F. Si f est Gâteaux-dérivable sur Ω et si $\|D_G f(x)\| \leq k$ pour tout $x \in \Omega$ alors pour tout $(a, b) \in \Omega^2$, on a :*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq k\|b-a\|. \tag{6.6}$$

(f est k-lipschitzienne sur Ω).

Une autre inégalité de type IAF bien utile nous est fournie par :

Corollaire 6.3 *Soit E et F deux $\mathbb{R}$-evn, Ω un ouvert de E, f une fonction définie sur Ω à valeurs dans F, $(a, b) \in \Omega^2$ tels que $a \neq b$, $[a, b] \subset \Omega$ et f est continue sur $[a, b]$. Si f est Gâteaux-dérivable sur Ω alors pour tout $z \in \Omega$ on a :*

$$\|f(b) - f(a) - D_G f(z)(b-a)\| \leq \sup_{c \in]a,b[} \|D_G f(c) - D_G f(z)\| \|b-a\|$$

en particulier :

$$\|f(b) - f(a) - D_G f(a)(b-a)\| \leq \sup_{c \in]a,b[} \|D_G f(c) - D_G f(a)\| \|b-a\|$$

Preuve:

Appliquer le corollaire 6.1 à la fonction $x \mapsto f(x) - D_G f(z)(x)$.

□

6.2 Applications

Nous sommes désormais en mesure de prouver le théorème 5.1 que nous rappelons :

Théorème 6.5 *Si f est Gâteaux-différentiable sur Ω et $D_G f \in C^0(\Omega, L_c(E,F))$ alors f est de classe C^1 sur Ω.*

Preuve:
Si nous montrons que pour tout $x \in \Omega$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $h \in E$ tel que $\|h\| \le \delta_\varepsilon$, on a :

$$\|f(x+h) - f(x) - D_G f(x)(h)\| \le \varepsilon \|h\|$$

alors nous aurons montré que f est différentiable et $f'(x) = D_G f(x)$ pour tout x et donc que f est de classe C^1 sur Ω puisque $D_G f \in C^0(\Omega, L_c(E,F))$. Soit $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset \Omega$, soit $\delta \in]0,r[$ et $h \in B(x,\delta)$, alors $[x, x+h] \subset B(x,\delta)$ et le corollaire 6.1 donne :

$$\begin{aligned} \|f(x+h) - f(x) - D_G f(x)(h)\| &\le \sup_{c \in [x,x+h]} \|D_G f(c) - D_G f(x)\| h\| \\ &\le \sup_{c \in B(x,\delta)} \|D_G f(c) - D_G f(x)\| \|h\| \end{aligned}$$

Comme $D_G f \in C^0(\Omega, L_c(E,F))$, il existe $\delta_\varepsilon \in]0,r[$ tel que :

$$\sup_{c \in B(x,\delta_\varepsilon)} \|D_G f(c) - D_G f(x)\| \le \varepsilon$$

on en déduit le résultat voulu. $\Box$

Nous pouvons également prouver le théorème 6.6 que nous rappelons :

Théorème 6.6 *Soit $E_1, ..., E_p$ et F des evn, $E := E_1 \times ... \times E_p$ et Ω un ouvert de E. Si pour tout $k \in \{1, ..., p\}$ et tout $x \in \Omega$, f admet une dérivée partielle par rapport à la k-ième variable en x et si l'application $x \mapsto \partial_k f(x)$ (définie sur Ω et à valeurs dans $L_c(E_k, F)$) est continue sur Ω alors f est de classe C^1 sur Ω et la formule (5.5) est satisfaite.*

Preuve:
Nous allons démontrer le résultat pour $p = 2$, et laisser le soin au lecteur de traiter le cas général de manière analogue. Soit $x = (x_1, x_2) \in \Omega$, il nous faut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $(h_1, h_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $\|h_1\| + \|h_2\| \le \delta_\varepsilon$, on a :

$$\|f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x) - \partial_1 f(x)(h_1) - \partial_2 f(x)(h_2)\| \le \varepsilon(\|h_1\| + \|h_2\|).$$

On commence par remarquer que :

$$f(x_1+h_1,x_2+h_2)-f(x)-\partial_1 f(x)(h_1)-\partial_2 f(x)(h_2)=(f(x_1+h_1,x_2+h_2)$$
$$-f(x_1,x_2+h_2)-\partial_1 f(x)(h_1))+(f(x_1,x_2+h_2)-f(x_1,x_2)-\partial_2 f(x)(h_2))$$

Remarquons ensuite que pour tout $y\in\Omega$, f est différentiable en y dans les directions $(h_1,0)$ et $(0,h_2)$ avec :

$$Df(y;(h_1,0))=\partial_1 f(y)(h_1) \text{ et } Df(y;(0,h_2))=\partial_2 f(y)(h_2)$$

On déduit alors du théorème 6.4, qu'il existe $t_1\in]0,1[$ tel que

$$\|f(x_1+h_1,x_2+h_2)-f(x_1,x_2+h_2)-\partial_1 f(x)(h_1)\|\le\|(\partial_1 f(x_1+t_1h_1,x_2+h_2)-\partial_1 f(x))(h_1)\|.$$

De même il existe $t_2\in]0,1[$ tel que

$$\|f(x_1,x_2+h_2)-f(x_1,x_2)-\partial_2 f(x)(h_2)\|\le\|(\partial_2 f(x_1,x_2+t_2h_2)-\partial_2 f(x))(h_2))\|.$$

Comme $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont continues, il existe δ_ε tel que $B(x,\delta_\varepsilon)\subset\Omega$ et pour tout $y\in B(x,\delta_\varepsilon)$:

$$\max(\|\partial_1 f(y)-\partial_1 f(x)\|,\|\partial_2 f(y)-\partial_2 f(x)\|)\le\varepsilon$$

Si $\|h_1\|+\|h_2\|\le\delta_\varepsilon$, les points $(x_1+t_1h_1,x_2+h_2)$ et $(x_1,x_2+t_2h_2)$ appartiennent à $B(x,\delta_\varepsilon)$ et donc :

$$\|f(x_1+h_1,x_2+h_2)-f(x)-\partial_1 f(x)(h_1)-\partial_2 f(x)(h_2)\|\le\varepsilon(\|h_1\|+\|h_2\|).$$

□

6.3 Dérivées secondes

Soit E et F deux evn, Ω un ouvert de E et f une application définie sur Ω à valeurs dans F, on a la :

Définition 6.1 *Soit $x\in\Omega$, on dit que f est deux fois (Fréchet) dérivable en x s'il existe un ouvert $U\subset\Omega$ tel que $x\in\Omega$ et :*
- *f est dérivable sur U,*
- *l'application $y\in U\mapsto f'(y)\in L_c(E,F)$ est dérivable en x.*

Dans ce cas, la dérivée seconde de f en x est donnée par :

$$f''(x):=(f')'(x)\in L_c(E,L_c(E,F)).$$

La définition précédente peut s'exprimer par :

$$f'(x+h) - f'(x) = f''(x)(h) + o(h) \text{ dans } L_c(E,F)$$

la notation $o(h)$ désignant une fonction telle que :

$$\frac{\|o(h)\|_{L_c(E,F)}}{\|h\|} \to 0 \text{ quand } h \to 0,\ h \neq 0$$

ce qu'on peut aussi écrire $o(h) = \|h\|\varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h) \in L_c(E,F)$ tel que :

$$\|\varepsilon(h)\|_{L_c(E,F)} \to 0 \text{ quand } h \to 0.$$

Grâce aux résultats du paragraphe 3.4, on peut identifier $L_c(E, L_c(E,F))$ à $L_{2,c}(E\times E, F)$, ceci permet d'identifier $f''(x)$ à l'application bilinéaire continue que nous notons aussi $f''(x)$:

$$f''(x)(h,k) = (f''(x)(h))(k) \text{ pour tout } (h,k) \in E^2.$$

Nous ferons systématiquement cette identification par la suite.

Si nous fixons $k \in E$ et supposons f deux fois différentiable en x, on a alors :

$$(f'(x+h) - f'(x))(k) = (f''(x)(h))(k) + o(h)(k) = f''(x)(h,k) + o(h)$$

ainsi l'application $f'(.)(k) : y \mapsto f'(y)(k)$ est différentiable en x et l'on a :

$$(f'(.)(k))'(x)(h) = f''(x)(h,k).$$

Ainsi $f''(x)(h,k)$ est la dérivée en x de $f'(.)(k)$ dans la direction h.

Remarquons que si f est deux fois différentiable en x, alors f' est continue x.

Définition 6.2 *On dit que f est de classe C^2 sur Ω (ce que l'on note $f \in C^2(\Omega, F)$) ssi $f \in C^1(\Omega, F)$, f deux fois différentiable en chaque point de Ω et $f'' \in C^0(\Omega, L_{2,c}(E \times E, F))$.*

On peut continuer par récurrence à définir la différentiabilité à des ordres plus élevés, nous en resterons cependant à la dérivée seconde dans ce cours car cela est suffisant en optimisation. Nous renvoyons le lecteur intéressé à Cartan [2] pour les dérivés d'ordre plus élevé.

6.4 Théorème de Schwarz

Une propriété importante des dérivées secondes est leur symétrie, c'est l'objet du théorème de Schwarz. D'abord un résultat préliminaire :

Proposition 6.1 *Si f est deux fois différentiable en x alors la quantité :*

$$\frac{1}{(\|h\|+\|k\|)^2}\left(f(x+h+k)-f(x+k)-f(x+h)+f(x)-f''(x)(h,k)\right)$$

tend vers 0 *quand* (h,k) *tend vers* $(0,0)$, $(h,k)\in E\times E\setminus\{(0,0)\}$.

Preuve:
Par définition pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\delta_\varepsilon>0$ tel que $B(x,\delta_\varepsilon)\subset\Omega$ et pour tout $v\in B(0,\delta_\varepsilon)$:

$$\|f'(x+v)-f'(x)-f''(x)(v)\|\leq\frac{\varepsilon}{2}\|v\|. \tag{6.7}$$

Soit $r>0$ tel que $B(x,r)\subset\Omega$ et f soit différentiable sur $B(x,r)$, définissons pour $(h,k)\in E\times E$ tels que $\|h\|+\|k\|\leq r$:

$$\Phi(h,k):=f(x+h+k)-f(x+k)-f(x+h)+f(x)-f''(x)(h,k)$$

Φ est différentiable, $\Phi(h,0)=0$ avec l'inégalité des accroissements finis on a alors :

$$\|\Phi(h,k)\|=\|\Phi(h,k)-\Phi(h,0)\|\leq\sup_{u\in[0,k]}\|\partial_2\Phi(h,u)\|\|k\|. \tag{6.8}$$

On a par ailleurs :

$$\partial_2\Phi(h,u)=f'(x+h+u)-f'(x+u)-f''(x)(h)$$

par linéarité de $f''(x)$ on a $f''(x)(h)=f''(x)(h+u)-f''(x)(u)$ et donc :

$$\partial_2\Phi(h,u)=(f'(x+h+u)-f'(x)-f''(x)(h+u))-(f'(x+u)-f'(x)-f''(x)(u)).$$

Si $\|h\|+\|k\|\leq\delta_\varepsilon$, on a aussi pour tout $u\in[0,k]$, $\|u\|\leq\|h\|+\|u\|\leq\|h\|+\|k\|\leq\delta_\varepsilon$, et en utilisant (6.7) on a donc :

$$\|\partial_2\Phi(h,u)\|\leq\frac{\varepsilon}{2}\left(\|h+u\|+\|u\|\right)\leq\varepsilon(\|h\|+\|k\|)$$

avec (6.8), il vient donc que si $\|h\|+\|k\|\leq\delta_\varepsilon$, alors :

$$\|\Phi(h,k)\|\leq\varepsilon(\|h\|+\|k\|)\|k\|\leq\varepsilon(\|h\|+\|k\|)^2$$

d'où l'on déduit le résultat voulu. $\square$

Le théorème de Schwarz s'énonce comme suit :

Théorème 6.7 *Si f est deux fois différentiable en x alors l'application bilinéaire continue $f''(x)$ est symétrique :*

$$f''(x)(h,k) = f''(x)(k,h) \text{ pour tout } (h,k) \in E \times E.$$

Preuve:
Pour $(h,k) \in E^2$ assez petits définissons :

$$S(h,k) = (f(x+h+k) - f(x+k) - f(x+h) + f(x))$$

S est symétrique ($S(h,k) = S(k,h)$) et d'après la proposition 6.1, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que si $\|h\| + \|k\| \leq \delta_\varepsilon$ on a :

$$\|S(h,k) - f''(x)(h,k)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}(\|h\| + \|k\|)^2.$$

Si $\|h\| + \|k\| \leq \delta_\varepsilon$, en utilisant $S(h,k) = S(k,h)$ on a donc :

$$\begin{aligned}\|f''(x)(h,k) - f''(x)(k,h)\| &\leq \|S(h,k) - f''(x)(h,k)\| + \|S(k,h) - f''(x)(k,h)\| \\ &\leq \varepsilon(\|h\| + \|k\|)^2\end{aligned}$$

Soit $(u,v) \in E \times E$ et $t > 0$ tel que $t(\|u\| + \|v\|) \leq \delta_\varepsilon$, par bilinéarité de $f''(x)$ on a $f''(x)(tu,tv) = t^2 f''(x)(u,v)$, $f''(x)(tv,tu) = t^2 f''(x)(v,u)$, et donc

$$\|f''(x)(tv,tu) - f''(x)(tu,tv)\| = t^2\|f''(x)(v,u) - f''(x)(u,v)\| \leq \varepsilon t^2(\|u\| + \|v\|)^2$$

et donc $\|f''(x)(v,u) - f''(x)(u,v)\| \leq \varepsilon(\|u\| + \|v\|)^2$, $\varepsilon > 0$ étant arbitraire on a donc $f''(x)(v,u) = f''(x)(u,v)$. $\Box$

6.5 Dérivées partielles secondes

On considère maintenant le cas où E est un produit d'evn : $E = E_1 \times .... \times E_p$. Nous savons que si f est différentiable en $x = (x_1, ..., x_p) \in \Omega$, alors pour tout $k \in \{1, ..., p\}$, f admet une dérivée partielle en x, $\partial_k f(x) \in L_c(E, F)$, par rapport à sa k-ième variable. Nous savons également que pour $h = (h_1, ..., h_p) \in E$ on a :

$$f'(x)(h) = \sum_{k=1}^{p} \partial_k f(x)(h_k) \text{ et } \partial_k f(x)(h_k) = f'(x)(0, ..., 0, h_k, 0, ..., 0).$$

Pour $i \in \{1, ..., p\}$, et $j \in \{1, ..., p\}$, on peut s'intéresser à la dérivée partielle de $\partial_j f$ par rapport à sa i-ème variable, d'où la :

Définition 6.3 *Soit $x \in \Omega$, et $(i,j) \in \{1,...,p\}^2$, on dit que f admet une dérivée partielle seconde d'indice (i,j) en x si :*
- *il existe un voisinage ouvert U de x dans Ω sur lequel f admet une dérivée partielle par rapport à sa j-ème variable,*
- *l'application $y \in U \mapsto \partial_j f(y)$ admet une dérivée partielle par rapport à sa i-ème variable en x.*

Dans ce cas, la dérivée partielle seconde d'indice (i,j) en x, notée $\partial^2_{ij} f(x)$ est donnée par :

$$\partial^2_{ij} f(x) := \partial_i(\partial_j f)(x).$$

Comme $\partial_j f(x) \in L_c(E_j, F)$, on a $\partial^2_{ij} f(x) \in L_c(E_i, L_c(E_j, F))$. En utilisant à nouveau les résultats du paragraphe 3.4, on peut identifier $L_c(E_i, L_c(E_j, F))$ à $L_{2,c}(E_i \times E_j, F)$, ceci permet d'identifier $\partial^2_{ij} f(x)$ à l'application bilinéaire continue que nous notons aussi $\partial^2_{ij} f(x)$:

$$\partial^2_{ij} f(x)(h_i, k_j) = (\partial^2_{ij} f(x)(h_i))(k_j) \text{ pour tout } (h_i, k_j) \in E_i \times E_j.$$

Nous ferons systématiquement cette identification par la suite.

Les relations entre dérivée seconde et dérivées secondes partielles nous sont fournies par la :

Proposition 6.2 *Si f est deux fois dérivable en x alors pour tout $(i,j) \in \{1,...,p\}^2$, f admet une dérivée partielle seconde d'indice (i,j) en x, $\partial^2_{ij} f(x) \in L_{2,c}(E_i \times E_j, F)$ et pour tout $(h_i, k_j) \in E_i \times E_j$ on a :*

$$\partial^2_{ij} f(x)(h_i, k_j) = f''(x)((0, ...0, h_i, 0, ...0), (0, ...0, k_j, 0, ...0)) \tag{6.9}$$

et les relations de symétrie :

$$\partial^2_{ij} f(x)(h_i, k_j) = \partial^2_{ji} f(x)(k_j, h_i). \tag{6.10}$$

De plus pour tout $h = (h_1, ..., h_p)$ et $k = (k_1, ..., k_p)$ dans E on a :

$$f''(x)(h, k) = \sum_{1 \le i,j \le p} \partial^2_{ij} f(x)(h_i, k_j). \tag{6.11}$$

Preuve:

Si f est deux fois dérivable en x, alors f est dérivable sur un voisinage ouvert U de x et donc admet des dérivées partielles sur U, soit $y \in U$ et $k_j \in E_j$, on a :

$$\partial_j f(y)(k_j) = f'(y)(0, ..., 0, k_j, 0, ..., 0)$$

le membre de droite est dérivable en x :

$$(\partial_j f(.)(k_j))'(x)(h) = f''(x)(h)(0, ..., 0, k_j, 0, ..., 0) \text{ pour tout } h \in E$$

il admet donc en particulier une dérivée partielle par rapport à sa i-ème variable. Ainsi f admet une dérivée partielle seconde d'indice (i,j) en x et pour $h_i \in E_i$, en prenant $h = (0, ..., 0, h_i, 0, ..., 0)$ dans l'identité précédente, il vient :

$$\partial^2_{ij} f(x)(h_i, k_j) = \partial_i(\partial_j f(.)(k_j))(x)(h_i)$$
$$= f''(x)((0, ..., 0, h_i, 0, ..., 0), (0, ..., 0, k_j, 0, ..., 0)).$$

Les relations de symétrie découlent de (6.9) et du théorème de Schwarz. Enfin, (6.11) découle de (6.9) et de la bilinéarité de $f''(x)$.

□

Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}$, en notant $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a :

$\partial^2_{ij} f(x)(h_i, k_j) = f''(x)(h_i e_i, k_j e_j) = h_i{\cdot}k_j f''(x)(e_i, e_j)$ pour tout $(h_i, k_j) \in \mathbb{R}^2$.

On identifie alors $\partial^2_{ij} f(x)$ au réel $f''(x)(e_i, e_j)$. Les relations de symétrie prennent alors la forme $\partial^2_{ij} f(x) = \partial^2_{ji} f(x)$.
Dans ce cas, $f''(x)$ est une forme bilinéaire symétrique qui avec la formule (6.11) s'écrit :

$$f''(x)(h,k) = \sum_{1 \le i,j \le n} \partial^2_{ij} f(x) h_i \cdot k_j.$$

La matrice hessienne de f en x notée $D^2 f(x)$ (ou parfois aussi $Hf(x)$) est alors par définition la matrice de la forme bilinéaire symétrique $f''(x)$ dans la base canonique, c'est donc la matrice de terme général $f''(x)(e_i, e_j) = \partial^2_{ij} f(x)$. $D^2 f(x)$ est une matrice symétrique et son expression est

$$D^2 f(x) := \begin{pmatrix} \partial^2_{11} f(x) & . & . & \partial^2_{1n} f(x) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \partial^2_{n1} f(x) & . & . & \partial^2_{nn} f(x) \end{pmatrix}.$$

Pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a alors :

$$f''(x)(h,k) = \left\langle D^2 f(x)(h), k \right\rangle == \sum_{1 \le i,j \le n} \partial^2_{ij} f(x) h_i \cdot k_j.$$

6.6 Formules de Taylor

Soit E et F deux evn, Ω un ouvert de E et f une application définie sur Ω à valeurs dans F, et $x \in \Omega$. La Formule de Taylor à l'ordre 2 en x est l'objet du :

Théorème 6.8 *Si f est deux fois dérivable en x, on a :*

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)(h) + \frac{1}{2}f''(x)(h,h) + o(\|h\|^2) \tag{6.12}$$

avec :

$$\frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|^2} \to 0 \text{ quand } h \to 0,\ h \neq 0.$$

Preuve:

Il s'agit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe δ_ε tel que si $\|h\| \leq \delta_\varepsilon$ alors

$$\|f(x+h) - f(x) - f'(x)(h) - \frac{1}{2}f''(x)(h,h)\| \leq \varepsilon\|h\|^2. \tag{6.13}$$

Définissons donc

$$R(h) := f(x+h) - f(x) - f'(x)(h) - \frac{1}{2}f''(x)(h,h)$$

R est bien définie et de classe C^1 sur un voisinage de 0 dans E, $R(0) = 0$ et :

$$R'(h) = f'(x+h) - f'(x) - \frac{1}{2}(f''(x)(h,.) + f''(x)(.,h))$$

et comme $f''(x)$ est symétrique, on a :

$$R'(h) = f'(x+h) - f'(x) - f''(x)(h).$$

Donc il existe δ_ε tel que pour tout u tel que $\|u\| \leq \delta_\varepsilon$, on a :

$$\|R'(u)\| \leq \varepsilon\|u\|$$

Si $\|h\| \leq \delta_\varepsilon$, l'inégalité des accroissements finis implique :

$$\begin{aligned}\|R(h)\| = \|R(h) - R(0)\| &\leq \sup_{u\in[0,h]} \|R'(u)\|\|h\| \\ &\leq \varepsilon\|h\|^2.\end{aligned}$$

on a donc établi (6.13). $\square$

Si f est deux fois différentiable au voisinage sur Ω (ou simplement sur un voisinage de x) on a :

Théorème 6.9 *Si $h \in E$ est tel que $[x, x+h] \subset \Omega$ et f est deux fois dérivable en chaque point de Ω alors on a :*

$$\|f(x+h) - f(x) - f'(x)(h) - \frac{1}{2}f''(x)(h,h)\| \leq \sup_{z\in[x,x+h]} \|f''(z) - f''(x)\|\|h\|^2. \tag{6.14}$$

Preuve:
On définit $R(h)$ comme dans la preuve précédente, il s'agit alors de montrer que :

$$\|R(h)\| \leq \sup_{z\in[x,x+h]} \|f''(z) - f''(x)\| \|h\|^2. \tag{6.15}$$

Utilisant $R(0) = 0$ et l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\|R(h)\| \leq \sup_{u\in[0,h]} \|R'(u)\| \|h\|. \tag{6.16}$$

Comme, on a :

$$R'(u) = f'(x+u) - f'(x) - f''(x)(u)$$

si $u \in [0,h]$, en appliquant l'inégalité des accroissements finis du corollaire 6.3 à f' entre x et $x+u$, il vient donc :

$$\begin{aligned} \|R'(u)\| &\leq \sup_{z\in[x,x+u]} \|f''(z) - f''(x)\| \|u\| \\ &\leq \sup_{z\in[x,x+h]} \|f''(z) - f''(x)\| \|h\|^{\cdot} \end{aligned}$$

Reportant la majoration précédente dans (6.16), nous en déduisons exactement (6.15). $\square$

Enfin, terminons par une formule exacte pour f à valeurs dans $\mathbb{R}^p$: la formule de Taylor à l'ordre 2 avec reste intégral :

Théorème 6.10 *Soit f définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, et $(x,h) \in \Omega \times E$ tels que $[x,x+h] \subset \Omega$. Si f est deux fois dérivable en chaque point de $[x,x+h]$ et si l'application $t \mapsto f''(x+th)$ est continue sur $[0,1]$, alors on a :*

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)(h) + \int_0^1 (1-t) f''(x+th)(h,h)dt \tag{6.17}$$

ce qui signifie exactement en notant $f_1, ..., f_p$ les composantes de f que l'on a :

$$f_i(x+h) = f_i(x) + f_i'(x)(h) + \int_0^1 (1-t) f_i''(x+th)(h,h)dt \text{ pour } i = 1, ..., p. \tag{6.18}$$

Preuve:
Comme on veut montrer l'identité (6.18) composante par composante, on peut poser $f = f_i$ et supposer que $p = 1$. Posons pour $t \in [0,1]$,

$$g(t) := f(x+th)$$

par hypothèse g est deux fois différentiable avec :

$$g'(t) = f'(x+th)(h), \ g''(t) = f''(x+th)(h,h)$$

d'où, avec une intégration par parties :

$$f(x+h) - f(x) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)dt = \int_0^1 (1-t)g''(t)dt - [(1-t)g'(t)]_0^1$$
$$= \int_0^1 (1-t)f''(x+th)(h,h)dt + g'(0) = f'(x)(h) + \int_0^1 (1-t)f''(x+th)(h,h)dt.$$

□

Remarque. L'hypothèse $F = \mathbb{R}^p$ dans le théorème précédent nous a uniquement servi pour la définition de l'intégrale. Si l'on peut généraliser de manière satisfaisante la construction de l'intégrale à des fonctions à valeurs dans F evn de dimension infinie, alors on pourra généraliser la formule de Taylor avec reste intégral à des fonctions à valeurs dans F. Cette généralisation est possible lorsque F est un espace de Banach mais elle dépasse largement le cadre de ce cours.

6.7 Fonctions convexes

La convexité est une notion clé comme nous l'avons déja souligné (théorèmes de projection et de séparation dans un espace de Hilbert) qui joue un rôle fondamental en optimisation. Rappelons la définition basique :

Définition 6.4 *Soit E un $\mathbb{R}$-ev, C une partie convexe de E et f une application définie sur C à valeurs rélles, on dit que f est convexe sur C ssi $\forall (x,y) \in C^2$ et $\forall t \in [0,1]$, on a :*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

On dit que f est strictement convexe sur C ssi $\forall (x,y) \in C^2$ avec $x \neq y$ et $\forall t \in]0,1[$, on a :

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y).$$

Notons que dans la définition précédente, puisque Ω est convexe $tx+(1-t)y \in \Omega$ $\forall (x,y) \in C^2$ et $\forall t \in [0,1]$, ainsi $f(tx + (1-t)y)$ est bien défini.

Exercice 6.1 *Soit E, C et f comme précédemment, on définit, l'épigraphe de f par :*

$$\mathrm{Epi}(f) := \{(x, \lambda) \in C \times \mathbb{R} : f(x) \leq \lambda\}$$

Montrer alors que f est convexe sur C ssi $\mathrm{Epi}(f)$ *est une partie convexe de $E \times \mathbb{R}$.*

Une première application de la notion en optimisation est fournie par :

Proposition 6.3 *Soit E un $\mathbb{R}$-ev, C une partie convexe de E et f une fonction strictement convexe sur C, alors il existe au plus un point de C en lequel f atteint son minimum.*

Preuve:
Suposons au contraire qu'il existe x_1 et x_2 distincts dans C tels que :

$$f(x_1) = f(x_2) \leq f(x) \; \forall x \in C$$

par convexité de C, $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) \in C$ et par stricte convexité de f, on aurait alors :

$$f(x_1) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq f(\frac{x_1 + x_2}{2}) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

□

Dans le cadre différentiable, on a la caractérisation suivante :

Proposition 6.4 *Soit E un $\mathbb{R}$-evn, Ω un ouvert convexe de E et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur Ω. On a les équivalences :*

1. *f est convexe sur Ω,*
2. *pour tout $(x, y) \in \Omega^2$, on a :*

$$f(x) - f(y) \geq f'(y)(x - y). \tag{6.19}$$

Preuve:
Supposons que f soit convexe, soit $(x, y) \in \Omega^2$ pour $t \in \times[0, 1]$ définissons

$$g(t) := f(tx + (1 - t)y) - tf(x) - (1 - t)f(y)$$

par convexité $g(t) \leq 0$ pour tout $t \in [0, 1]$ et $g(0) = 0$ on a donc :

$$\frac{g(t) - g(0)}{t} \leq 0 \text{ pour tout } t \in]0, 1]$$

en passant à la limite on obtient :

$$0 \geq g'(0^+) = f'(y)(x - y) - f(x) + f(y)$$

Réciproquement supposons que (6.19) soit satisfaite pour tout $(x, y) \in \Omega^2$. Soit $(z_1, z_2) \in \Omega^2$ on a :

$$f(z_1) - f(z_2) \geq f'(z_2)(z_1 - z_2) \text{ et } f(z_2) - f(z_1) \geq f'(z_1)(z_2 - z_1)$$

en sommant il vient :

$$(f'(z_1) - f'(z_2))(z_1 - z_2) \geq 0. \tag{6.20}$$

On définit, pour $t \in [0, 1]$, $g(t)$ comme précédemment. Pour établir la convexité de f il faut montrer que $g \leq 0$ sur $[0, 1]$. On a $g(0) = g(1) = 0$, g est dérivable sur $]0, 1[$:

$$g'(t) = f'(tx+(1-t)y)(x-y)-f(x)+f(y) = f'(y+t(x-y))(x-y)-f(x)+f(y)$$

Soit $1 > t > s > 0$ on a alors, en appliquant (6.20) à $z_1 = y + t(x - y)$ et $z_2 = y + s(x - y)$ $(z_1 - z_2 = (t - s)(x - y))$

$$g'(t) - g'(s) = (f'(y + t(x - y)) - f'(y + s(x - y)))\,(x - y) \geq 0$$

d'où l'on déduit que g' est croissante sur $]0, 1[$. Soit $t \in]0, 1[$, on déduit de la formule des accroissements finis qu'il existe $\theta \in]0, t[$ et $\theta' \in]t, 1[$ tels que :

$$g(t) = g(0) + g'(\theta)t = g'(\theta)t \text{ et } g(1) - g(t) = -g(t) = g'(\theta')(1 - t)$$

Comme $\theta' > t > \theta$ on a $g'(\theta') \geq g'(\theta)$ et donc :

$$-\frac{g(t)}{1-t} \geq \frac{g(t)}{t}$$

ce qui implique bien que $g(t) \leq 0$.

$\square$

La caractérisation différentielle (6.19) de la convexité est importante et exprime géométriquement le fait que f est convexe ssi son graphe se situe au dessus de tous ses plans tangents. Lorsque E est un Hilbert, (6.19) se traduit par

$$f(x) - f(y) \geq \langle \nabla f(y), x - y \rangle\,,\ \forall (x, y) \in \Omega \times \Omega.$$

Une application de la caractérisation différentielle (6.19) de la convexité en optimisation est :

Proposition 6.5 *Soit E un $\mathbb{R}$-evn, Ω un ouvert convexe de E et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application convexe différentiable sur Ω, et $x^* \in \Omega$, on a les équivalences entre*

$$f(x^*) \leq f(x),\ \forall x \in \Omega \ \text{ et } f'(x^*) = 0.$$

Preuve:
Supposons que f atteigne son minimum sur Ω en x^*, alors pour $h \in E$ et $t > 0$ assez petit pour que $x^* + th \in \Omega$ on a :

$$\frac{1}{t}(f(x^* + th) - f(x^*)) \geq 0$$

comme f est différentiable en x^*, en passant à la limite on obtient $f'(x^*)(h) \geq 0$, h étant arbitraire on a aussi $f'(x^*)(-h) \geq 0$ et donc $f'(x^*) = 0$.

Supposons que $f'(x^*) = 0$, alors pour tout $x \in \Omega$, en utilisant (6.19), on a :

$$f(x) \geq f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) = f(x^*).$$

$\square$

Dans le cadre deux fois différentiable, on a la caractérisation :

Proposition 6.6 *Soit E un $\mathbb{R}$-evn, Ω un ouvert convexe de E et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application deux fois différentiable sur Ω. On a les équivalences :*

1. *f est convexe sur Ω,*
2. *pour tout $(x, h) \in \Omega \times E$, on a :*

$$f''(x)(h, h) \geq 0. \tag{6.21}$$

($f''(x)$ est une forme quadratique semi-définie positive)

Preuve:
Supposons d'abord que f soit convexe. Soit $x \in \Omega$ et $h \in E$ tel que $x + h \in \Omega$ (ce qui implique par convexité de Ω que $x + th \in \Omega$, pour tout $t \in [0, 1]$), avec (6.19), on a pour tout $t \in [0, 1]$:

$$f(x + th) \geq f(x) + tf'(x)(h)$$

or la formule de Taylor à l'ordre 2 en x donne :

$$f(x + th) = tf'(x)(h) + t^2 f''(x)(h, h) + o(t^2)$$

et donc :

$$t^2 f''(x)(h, h) + o(t^2) \geq 0$$

divisant par t^2 et faisant tendre t vers 0 il vient bien

$$f''(x)(h, h) \geq 0.$$

Réciproquement supposons que (6.21) soit satisfaite pour tout $(x, h) \in \Omega \times E$. Soit $(x, y) \in \Omega^2$, comme dans la preuve de la proposition 6.4, pour $t \in \times[0, 1]$, on définit

$$g(t) := f(tx + (1 - t)y) - tf(x) - (1 - t)f(y)$$

et il s'agit de montrer que $g(t) \leq 0$ pour tout $t \in [0, 1]$. On remarque que g est deux fois différentiable sur $]0, 1[$ avec :

$$g'(t) = f'(y+t(x-y))(x-y)-f(x)+f(y),\; g''(t) = f''(y+t(x-y))(x-y, x-y)$$

ainsi (6.21) implique $g'' \geq 0$ et donc g' est croissant sur $[0, 1]$ on achève alors la preuve exactement comme pour la proposition 6.4. $\Box$

Exercice 6.2 *Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}^2$ ssi $\forall x \in \mathbb{R}^2$, la Hessienne de f en x a une trace et un déterminant positif.*

Chapitre 7

Inversion locale, fonctions implicites

Ce chapitre est consacré à deux résultats centraux : les théorèmes de l'inversion locale et celui des fonctions implicites. En optimisation, nous utiliserons ces résultats essentiellement en dimension finie, cependant nous allons les établir dans le cadre plus général des espaces de Banach et ce, afin de bien mettre en évidence que ces deux résultats très importants reposent sur le théorème de point fixe de Banach-Picard et donc n'utilisent que la complétude.

7.1 Théorème de l'inversion locale

Le théorème de l'inversion locale énoncé ci-dessous exprime que si la différentielle $f'(a)$ de l'application f au point a est inversible (en tant qu'application linéaire) alors (l'application non linéaire) f est inversible sur un voisinage de a. C'est précisément le but du calcul différentiel que de déduire d'une propriété de $f'(a)$ une information sur le comportement de f au voisinage de a.

Théorème 7.1 *Soit E et F deux espaces de Banach, Ω un ouvert de E, $f \in C^1(\Omega, F)$ et $a \in \Omega$. Si $f'(a)$ est inversible alors il existe deux voisinages ouverts U et V respectivement de a et $f(a)$ tels que la restriction $f : U \to V$ soit un difféomorphisme de classe C^1.*

Preuve:

Etape 1 : réduction

Posons pour tout $x \in \Omega - a$:

$$g(x) := [f'(a)]^{-1}(f(x+a) - f(a))$$

g est une application de classe C^1 de l'ouvert $\Omega - a \subset E$ dans E de plus $g(0) = 0$ et $g'(0) = \mathrm{id}$. Comme g est obtenue comme composée de f et d'opérations affines inversibles (et indéfiniment différentiables !) il suffit de montrer le résultat pour g.

Pour $x \in \Omega - a$, posons :

$$\Phi(x) := x - g(x).$$

Comme $\Phi'(0) = 0$, il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in \overline{B}(0,r)$ on a[1] :

$$\|\Phi'(x)\| \leq 1/2. \tag{7.1}$$

Etape 2 : g est une bijection de $\overline{B}(0,r)$ dans $\overline{B}(0,r/2)$

Soit $y \in \overline{B}(0,r/2)$, pour tout $x \in \overline{B}(0,r)$ définissons :

$$\Phi_y(x) := \Phi(x) + y = x - g(x) + y.$$

Remarquons alors que :

$$g(x) = y \Leftrightarrow \Phi_y(x) = x. \tag{7.2}$$

Pour x_1 et x_2 dans $\overline{B}(0,r)$ et $y \in \overline{B}(0,r/2)$, en utilisant (7.1) et le corollaire 6.1, on a :

$$\|\Phi_y(x_1) - \Phi_y(x_2)\| = \|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\| \leq \sup_{z\in[x_1,x_2]} \|\Phi'(z)\|\|x_1 - x_2\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|$$

en particulier puisque $\Phi_y(0) = y$ on a pour tout $x \in \overline{B}(0,r)$:

$$\|\Phi_y(x)\| \leq \|y\| + \frac{1}{2}\|x\| \leq r/2 + r/2 = r.$$

Ce qui précède montre que, pour tout $y \in \overline{B}(0,r/2)$, Φ_y est une contraction de $\overline{B}(0,r)$. Il découle du théorème du point fixe pour les contractions que ϕ_y admet un unique point fixe dans $\overline{B}(0,r)$. Avec (7.2), nous en déduisons donc que pour tout $y \in \overline{B}(0,r/2)$, il existe un unique $x \in \overline{B}(0,r)$ tel que $g(x) = y$. Donc g est une bijection de $\overline{B}(0,r)$ dans $\overline{B}(0,r/2)$.

[1] Ici la norme $\|\Phi'(x)\|$ désigne naturellement $\|\Phi'(x)\|_{L_c(E)}$.

Etape 3 : g^{-1} est 2-Lipschitzienne sur $\overline{B}(0, r/2)$

Soit $(y_1, y_2) \in \overline{B}(0, r/2)^2$, $x_1 := g^{-1}(y_1)$ et $x_2 := g^{-1}(y_2)$. Avec les notations de l'étape 2, on a : $x_1 := \Phi_{y_1}(x_1)$ et $x_2 := \Phi_{y_2}(x_2)$. On a alors :

$$\begin{aligned}\|g^{-1}(y_1) - g^{-1}(y_2)\| &= \|x_1 - x_2\| = \|\Phi_{y_1}(x_1) - \Phi_{y_2}(x_2)\| = \|y_1 - y_2 + \Phi(x_1) - \Phi(x_2)\| \\ &\leq \|y_1 - y_2\| + \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\| = \|y_1 - y_2\| + \frac{1}{2}\|g^{-1}(y_1) - g^{-1}(y_2)\|.\end{aligned}$$

Comme voulu, on a donc bien :

$$\|g^{-1}(y_1) - g^{-1}(y_2)\| \leq 2\|y_1 - y_2\|.$$

Etape 4 : g^{-1} est différentiable sur $B(0, r/2)$

Soit $y \in B(0, r/2)$ et $x := g^{-1}(y) \in \overline{B}(0, r)$, tout d'abord rappelons qu'avec (7.1), on a :

$$\|\Phi'(x)\| = \|\mathrm{id} - g'(x)\| \leq \frac{1}{2} < 1,$$

ceci impliquant en particulier que $g'(x)$ est inversible.[2]

Nous allons montrer que g^{-1} est différentiable en y et plus précisément que $(g^{-1})'(y) = [g'(x)]^{-1} = [g'(g^{-1}(y))]^{-1}$. Tout d'abord notons qu'il découle du théorème de Banach 3.3 que $[g'(x)]^{-1}$ est continu. Il s'agit donc de montrer que pour $\varepsilon > 0$ il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $k \in B(0, \delta_\varepsilon)$ tel que $y + k \in B(0, r/2)$ on a :

$$\|g^{-1}(y + k) - g^{-1}(y) - [g'(x)]^{-1}k\| \leq \varepsilon\|k\|. \tag{7.3}$$

Soit $k \in E$ assez petit pour que $y + k \in B(0, r/2)$ et posons $x_k := g^{-1}(y + k)$. D'après l'étape précédente, on a :

$$\|x_k - x\| = \|g^{-1}(y + k) - g^{-1}(y)\| \leq 2\|k\|. \tag{7.4}$$

Par ailleurs, puisque $k = g(x_k) - g(x) = g'(x)(x_k - x) + o(\|x_k - x\|) = g'(x)(x_k - x) + \Delta_k$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\|x_k - x\| \leq \delta \Rightarrow \ \|\Delta_k\| := \|g(x_k) - g(x) - g'(x)(x_k - x)\| \leq \tfrac{\varepsilon\|x_k - x\|}{2\|[g'(x)]^{-1}\|}. \tag{7.5}$$

Si $\|k\| \leq \delta/2$ alors (7.4) entraine que $\|x_k - x\| \leq \delta$, en utilisant (7.5) et à nouveau (7.4), il vient donc :

$$\begin{aligned}\|g^{-1}(y + k) - g^{-1}(y) - [g'(x)]^{-1}k\| &= \|x_k - x - [g'(x)]^{-1}(g'(x)(x_k - x) + \Delta_k)\| \\ = \|[g'(x)]^{-1}\Delta_k\| \leq \|[g'(x)]^{-1}\|\|\Delta_k\| &\leq \|[g'(x)]^{-1}\|\frac{\varepsilon\|x_k - x\|}{2\|[g'(x)]^{-1}\|} \leq \varepsilon\|k\|.\end{aligned}$$

on a donc établi (7.3) ce qui achève la preuve. □

[2]Rappelons ici que si $u \in L_c(E)$ vérifie $\|\mathrm{id} - u\| < 1$ alors u est inversible d'inverse continue (voir le poly d'exercices).

Remarque. Soit p entier $p \geq 2$, alors dans l'énoncé du théorème de l'inversion locale, on peut remplacer partout "de classe C^1" par "de classe C^p" (à faire en exercice).

7.2 Fonctions implicites

Le théorème des fonctions implicites permet localement de passer d'une condition implicite entre les variables x et y du type $f(x, y) = c$ à une relation explicite du type $y = g(x)$.

Théorème 7.2 *Soit E, F et G trois espaces de Banach, A et B deux ouverts respectivement de E et F, $(a, b) \in A \times B$, $f \in C^1(A \times B, G)$ et $c := f(a, b)$. Si $\partial_2 f(a, b)$ est inversible (dans $L_c(F, G)$) alors il existe U un voisinage ouvert de a, V un voisinage ouvert de b et $g \in C^1(U, V)$ tel que :*

$$\{(x, y) \in U \times V \ : f(x, y) = c\} = \{(x, g(x)) \ : x \in U\}.$$

Ce qui implique en particulier : $g(a) = b$ et $f(x, g(x)) = c \ \forall x \in U$.

Preuve:
Soit $\Phi(x, y) := (x, f(x, y)), \forall (x, y) \in A \times B$; on a alors $\Phi \in C^1(A \times B, E \times G)$. Soit $(h, k) \in E \times F$, $\Phi'(a, b)(h, k) = (h, \partial_1 f(a, b)h + \partial_2 f(a, b)k)$. Pour $(u, v) \in E \times G$, comme $\partial_2 f(a, b)$ est inversible, on a :

$$\Phi'(a, b)(h, k) = (u, v) \Leftrightarrow (h, k) = (u, [\partial_2 f(a, b)]^{-1}(v - \partial_1 f(a, b)u)).$$

Ainsi $\Phi'(a, b)$ est inversible, avec le théorème de l'inversion locale, nous en déduisons qu'il existe M voisinage ouvert de (a, b) dans $A \times B$ et N voisinage ouvert de $\Phi(a, b) = (a, c)$ tel que Φ réalise un difféomorphisme de classe C^1 de M sur N. Sans perte de généralité, on peut supposer que $M = M_a \times M_b$, avec M_a (resp. M_b) voisinage ouvert de a dans A (resp. de b dans B). Notons alors $\Phi^{-1} : N \to M_a \times M_b$ sous la forme $\Phi^{-1}(x, z) =: (u(x, z), v(x, z)) = (x, v(x, z))$. Posons alors

$$U := \{x \in M_a : (x, c) \in N \text{ et } v(x, c) \in M_b\}, \ V := M_b.$$

Par construction U est un voisinage ouvert de a et V un voisinage ouvert de b. Pour tout $x \in U$, définissons $g(x) := v(x, c)$ on a alors $g \in C^1(U, V)$. Soit $(x, y) \in U \times V$, on alors $(x, c) \in N$, $g(x) = v(x, c) \in V$ et donc :

$$\begin{aligned} f(x, y) = c \Leftrightarrow \Phi(x, y) = (x, c) &\Leftrightarrow (x, y) = \Phi^{-1}(x, c) \\ &\Leftrightarrow (x, y) = (x, v(x, c)) \Leftrightarrow (x, y) = (x, g(x)). \end{aligned}$$

□

Remarque. En dérivant l'identité $f(x, g(x)) = c$ on a :

$$\partial_1 f(x, g(x)) + \partial_2 f(x, g(x)) \circ g'(x) = 0$$

et comme, au voisinage de a, $\partial_2 f(x, g(x))$ est inversible, on a :

$$g'(x) = -[\partial_2 f(x, g(x))]^{-1} \circ (\partial_1 f(x, g(x))).$$

Remarque. On a utilisé le théorème de l'inversion locale pour établir celui des fonctions implicites. On peut montrer (le faire à titre d'exercice) que ces deux énoncés sont en fait équivalents.

Remarque. L'hypothèse $\partial_2 f(a, b)$ inversible du théorème ne peut être affaiblie. Pour s'en persuader, le lecteur pourra considérer le cas du cercle trigonométrique $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) := x^2 + y^2 = 1\}$. On a $\partial_2 f(1, 0) = 0$ et il n'existe pas de voisinage de $(1, 0)$ sur lequel S^1 se représente localement comme un graphe $x \mapsto g(x)$.

Troisième partie

Optimisation

Chapitre 8

Résultats d'existence et rappels

8.1 Vocabulaire

Soit E un ensemble et f une fonction définie sur E à valeurs réelles. Résoudre le problème de minimisation :

$$\inf_{x \in E} f(x) \tag{8.1}$$

c'est trouver $x^* \in E$ tel que $f(x^*) \leq f(x)$ pour tout $x \in E$. Un tel x^* (s'il existe) est alors une solution de (8.1). La quantité $\inf_{x \in E} f(x)$ (valant éventuellement $-\infty$, voir plus bas) est appelée valeur du problème (8.1). Cette valeur est différente de $-\infty$ si et seulement si f est minorée sur E, évidemment seul ce cas présente de l'intérêt.

A ce stade, un petit rappel s'impose sur les bornes inférieures de parties de $\mathbb{R}$, en effet la valeur du problème (8.1) est par définition la borne inférieure du sous-ensemble de $\mathbb{R}$, $f(E) := \{f(x) : x \in E\}$. Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$, sa borne inférieure, $\inf A$ est par définition son minorant maximal dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ce qui signifie d'une part :

$$a \geq \inf A, \, \forall a \in A$$

et d'autre part

$$\forall b > \inf A, \text{ il existe } a \in A \text{ tel que } a \leq b.$$

Si A n'est pas minorée, alors l'ensemble de ses minorants est réduit à $\{-\infty\}$ et donc $\inf A = -\infty$. Enfin, on étend la borne inférieure à l'ensemble vide en posant $\inf \emptyset = +\infty$.

Si E est un ensemble non vide et f une fonction définie sur E à valeurs réelles et <u>minorée</u>, alors la valeur $\alpha := \inf_{x \in E} f(x)$ est un nombre réel, ce réel

α est caractérisé par :

$$f(x) \geq \alpha,\ \forall x \in E \text{ et } \forall \varepsilon > 0,\ \exists x_\varepsilon \text{ tel que } f(x_\varepsilon) \leq \alpha + \varepsilon\ .$$

En spécifiant $\varepsilon = \varepsilon_n$ avec $(\varepsilon_n)_n$ une suite de réels strictement positifs tendant vers 0, nous en déduisons qu'il existe $x_n \in E$ tel que

$$f(x_n) \leq \inf_{x \in E} f(x) + \varepsilon_n.$$

Comme $f(x_n) \geq \inf_{x \in E} f(x)$, on a donc :

$$\lim_n f(x_n) = \inf_{x \in E} f(x). \tag{8.2}$$

Toute suite $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ vérifiant (8.2) est appelée suite minimisante du problème (8.1). Lorsque f n'est pas minorée sur E, alors $\alpha := \inf_{x \in E} f(x) = -\infty$ et une suite minimisante est simplement une suite $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\lim_n f(x_n) = \inf_{x \in E} f(x) = -\infty. \tag{8.3}$$

Notons bien que sans aucune hypothèse supplémentaire, il existe toujours des suites minimisantes du problème (8.1).

Lorsque l'ensemble E est fini, (8.1) relève des méthodes de l'optimisation combinatoire qui ne sont pas l'objet de ce cours. Nous considèrerons ici le cas de l'optimisation continue (E est un "continuum", par exemple un ouvert d'un $\mathbb{R}$-evn) ce qui nous permettra d'utiliser les résultats de topologie et de calcul différentiel vus précédemment. En particulier, E sera toujours muni d'une structure métrique. Dans le cadre métrique, on distingue naturellement les notions locales et globales de solution :

Définition 8.1 *Soit (E, d) un espace métrique et f une fonction définie sur E à valeurs réelles.*

1. *On dit que x^* est une solution globale de (8.1) ou un point de minimum global de f sur E ssi $f(x^*) \leq f(x)$ pour tout $x \in E$.*
2. *On dit que x^* est une solution locale de (8.1) ou un point de minimum local de f sur E ss'il existe $r > 0$ tel que $f(x^*) \leq f(x)$ pour tout $x \in E$ tel que $d(x, x^*) < r$.*
3. *On dit que x^* est un point de minimum global strict de f sur E ssi $f(x^*) < f(x)$ pour tout $x \in E \setminus \{x^*\}$.*
4. *On dit que x^* un point de minimum local strict de f sur E ss'il existe $r > 0$ tel que $f(x^*) < f(x)$ pour tout $x \in E$ tel que $d(x, x^*) < r$ et $x \neq x^*$.*

Enfin, on a écrit (8.1) sous la forme d'un problème de minimisation, ce qui englobe aussi les problèmes de maximisation, en effet maximiser une fonction revient à minimiser son opposé.

8.2 Théorème d'existence de Weierstrass et variantes

La première question à se poser dans un problème d'optimisation est : existe-t-il (au moins) une solution ? Nous allons rappeler quelques critères simples qui assurent l'existence d'une telle solution. Rappelons d'abord le théorème classique de Weierstrass (voir chapitre 1) :

Théorème 8.1 *Soit (E, d) un espace métrique compact et $f \in C^0(E, \mathbb{R})$ alors il existe $x^* \in E$ tel que :*

$$f(x^*) = \inf \{f(x),\, x \in E\}.$$

Preuve:
Nous avons déja établi ce résultat, on se propose ici d'en donner une preuve (légèrement) différente reposant sur la notion de suite minimisante : ce type de preuve est le point de départ de ce qu'on appelle la méthode directe du calcul des variations. Soit donc $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ une suite minimisante de f sur E :

$$\lim_n f(x_n) = \inf_{x \in E} f(x). \tag{8.4}$$

Comme E est compact, on peut, quitte à extraire une sous-suite que nous continuerons à noter $(x_n)_n$, supposer que $(x_n)_n$ converge vers un élément $x^* \in E$. Comme f est continue, $f(x_n)$ converge vers $f(x^*)$, en utilisant (8.4), il vient donc :

$$f(x^*) = \inf \{f(x),\, x \in E\}.$$

□

En pratique, les hypothèses de continuité et surtout celle de compacité sont assez restrictives et comme nous allons le voir, peuvent être (un peu) affaiblies.

Intuitivement, comme on s'intéresse ici à minimiser f, la situation où f n'a des sauts que "vers le bas" n'est pas gênante (considérer par exemple $f(0) = 0$, $f(x) = 1$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$). Cette intuition conduit naturellement à la notion de semi-continuité inférieure :

Définition 8.2 *Soit (E, d) un espace métrique, f une application définie sur E à valeurs réelles et $x_0 \in E$, on dit que :*

1. *f est semi-continue inférieurement (s.c.i. en abrégé) en x_0 ssi :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists r > 0 \text{ tq } x \in E,\ d(x, x_0) \leq r \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon. \tag{8.5}$$

2. *f est semi-continue inférieurement (s.c.i. en abrégé) sur E ssi f est s.c.i. en chaque point de E.*

Rappelons qu'étant donnée une suite de réels $(\alpha_n)_n$, on note $\mathrm{liminf}_n \alpha_n$ la plus petite valeur d'adhérence de $(\alpha_n)_n$ dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On a alors la caractérisation suivante de la semi-continuité inférieure en un point :

Proposition 8.1 *Soit (E, d) un espace métrique, f une application définie sur E à valeurs réelles et $x_0 \in E$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est semi-continue inférieurement en x_0,*
2. *pour toute suite $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ convergeant vers x_0 on a :*

$$\mathrm{liminf} f(x_n) \geq f(x_0), \tag{8.6}$$

Preuve:
1. $\Rightarrow$ 2. : soit $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ convergeant vers x_0 et $(x_{\varphi(n)})_n$ une sous-suite telle que

$$\lim_n f(x_{\varphi(n)}) = \mathrm{liminf}_n f(x_n)$$

Supposons par l'absurde que $\mathrm{liminf}_n f(x_n) < f(x_0)$ et soit $\varepsilon > 0$ tel que

$$\lim_n f(x_{\varphi(n)}) = \mathrm{liminf}_n f(x_n) \leq f(x_0) - \varepsilon. \tag{8.7}$$

Puisque f est s.c.i. en x_0 il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in B(x_0, r)$ on a : $f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon/2$. Pour n assez grand, on a $x_{\varphi(n)} \in B(x_0, r)$ et donc : $f(x_{\varphi(n)}) \geq f(x_0) - \varepsilon/2$ en passant à la limite on a donc :

$$\lim_n f(x_{\varphi(n)}) \geq f(x_0) - \varepsilon/2$$

ce qui contredit (8.7)

2. $\Rightarrow$ 1. : Supposons que f ne soit pas s.c.i. en x_0 alors il existe ε tel que pour tout $r > 0$, il existe $x \in B(x_0, r)$ tel que $f(x) < f(x_0) - \varepsilon$. En prenant $r = 1/n$, il existe donc $x_n \in B(x_0, r)$ tel que $f(x_n) < f(x_0) - \varepsilon$, on a alors :

$$\lim_n x_n = x_0 \text{ et } \mathrm{liminf} f(x_n) \leq f(x_0) - \varepsilon$$

ce qui contredit 2..

□

Etant donnée f une application définie sur E à valeurs réelles, on définit son épigraphe par :

$$\mathrm{Epi}(f) := \{(x, t) \in E \times \mathbb{R} : t \geq f(x)\}$$

On a alors la caractérisation suivante de la semi-continuité inférieure :

Proposition 8.2 *Soit (E, d) un espace métrique, f une application définie sur E à valeurs réelles alors f est semi-continue inférieurement sur E ssi* $\mathrm{Epi}(f)$ *est fermé dans $E \times \mathbb{R}$.*

Preuve:
Supposons d'abord f semi-continue inférieurement sur E. Soit (x_n, t_n) une suite d'éléments de $\mathrm{Epi}(f)$ convergeant vers (x_0, t_0) dans $E \times \mathbb{R}$. Pour tout n on a $f(x_n) \le t_n$ et comme f est s.c.i. en x_0 on a :

$$f(x_0) \le \mathrm{liminf} f(x_n) \le \mathrm{liminf} t_n = t_0$$

ainsi $(x_0, t_0) \in \mathrm{Epi}(f)$.

Supposons maintenant que $\mathrm{Epi}(f)$ est fermé. Soit $x_0 \in E$ et $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ convergeant vers x_0, soit $(x_{\varphi(n)})$ une sous-suite telle que :

$$\lim_n f(x_{\varphi(n)}) = \mathrm{liminf}_n f(x_n)$$

Pour tout n, $(x_{\varphi(n)}, f(x_{\varphi(n)}) \in \mathrm{Epi}(f))$ et

$$\lim_n (x_{\varphi(n)}, f(x_{\varphi(n)}) = (x_0, \mathrm{liminf}_n f(x_n)).$$

Comme $\mathrm{Epi}(f))$ est fermé, on en déduit que $(x_0, \mathrm{liminf}_n f(x_n)) \in \mathrm{Epi}(f))$ ce qui signifie exactement :

$$\mathrm{liminf}_n f(x_n)) \ge f(x_0).$$

□

Le théorème de Weierstrass s'étend aux fonctions qui sont seulement s.c.i :

Théorème 8.2 *Soit (E, d) un espace métrique* <u>*compact*</u> *et f une fonction* <u>*s.c.i.*</u> *de E dans $\mathbb{R}$ alors il existe $x^* \in E$ tel que :*

$$f(x^*) = \inf \{f(x),\ x \in E\}.$$

Preuve:
Soit $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ une suite minimisante de f sur E :

$$\lim_n f(x_n) = \inf_{x \in E} f(x). \tag{8.8}$$

Comme E est compact, on peut, quitte à extraire une sous-suite que nous continuerons à noter $(x_n)_n$, supposer que $(x_n)_n$ converge vers un élément $x^* \in E$. Comme f est s.c.i en x^*, on a :

$$\lim_n f(x_n) = \mathrm{liminf} f(x_n) \ge f(x^*),$$

en utilisant (8.8), il vient donc :

$$f(x^*) = \inf\{f(x),\, x \in E\}.$$

□

Dans un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, on peut remplacer l'hypothèse de compacité par l'hypothèse (8.9), appelée hypothèse de coercivité.

Théorème 8.3 *Soit E une partie non vide fermée de $\mathbb{R}^n$, f une fonction s.c.i. de E dans $\mathbb{R}$ telle que*[1] *:*

$$\lim_{x\in E,\ \|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty \tag{8.9}$$

alors il existe $x^* \in E$ tel que :

$$f(x^*) = \inf\{f(x),\, x \in E\}.$$

Preuve:
Soit $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ une suite minimisante de f sur E :

$$\lim_n f(x_n) = \inf_{x\in E} f(x) < +\infty. \tag{8.10}$$

Montrons d'abord que $(x_n)_n$ est bornée : si tel n'était pas le cas, il existerait une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ vérifiant :

$$\lim_n \|x_{\varphi(n)}\| = +\infty,$$

avec l'hypothèse de coercivité (8.9), on aurait alors :

$$\lim_n f(x_{\varphi(n)}) = +\infty,$$

ce qui contredirait (8.10). On a montré que $(x_n)_n$ est bornée dans E, fermé d'un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, il existe donc une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant vers un élément $x^* \in E$. Comme f est s.c.i en x^*, on a :

$$\text{liminf} f(x_{\varphi(n)}) \geq f(x^*),$$

en utilisant (8.10), il vient donc :

$$f(x^*) = \inf\{f(x),\, x \in E\}.$$

□

[1] Rappelons que (8.9) signifie que $\forall\, M > 0$, $\exists r > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|x\| \geq r \Rightarrow f(x) \geq M$.

8.3 Conditions d'optimalité

On s'intéresse dans toute cette partie au problème :

$$\inf_{x \in \Omega} f(x) \tag{8.11}$$

Avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction définie sur Ω à valeurs réelles satisfaisant certaines hypothèses de différentiabilité qui seront précisées au fur et à mesure. Le problème (8.11) avec $\Omega = \mathbb{R}^n$ par exemple est le problème-type d'optimisation sans contrainte. Les résultats de ce paragraphe sont supposés connus aussi les énoncerons-nous sans démonstration.

Rappelons d'abord la condition nécessaire du premier ordre classique (appelée aussi règle de Fermat) qui exprime que les points d'extrema locaux de f sur Ω sont des points critiques de f :

Proposition 8.3 *Si $x^* \in \Omega$ est un point de minimum local de f sur Ω et si f est différentiable en x^* alors :*

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

Dans le cas convexe on a beaucoup mieux : le fait d'être point critique est une condition suffisante de minimum global :

Proposition 8.4 *Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, f une fonction convexe sur Ω. Si f est différentiable en $x^* \in \Omega$ et $\nabla f(x^*) = 0$, alors x^* est une solution de (8.11) i.e. un point de minimum global de f sur Ω.*

La condition classique nécessaire du second-ordre nous est fournie par :

Proposition 8.5 *Si $x^* \in \Omega$ est un point de minimum local de f sur Ω et si f est deux fois différentiable en x^*, alors on a :*

$\nabla f(x^*) = 0$ *et la matrice (symétrique)* $D^2 f(x^*)$ *est semi-définie-positive.*

Terminons par une condition suffisante de minimum local strict :

Proposition 8.6 *Si f est deux fois différentiable en $x^* \in \Omega$ et si l'on a :*

$\nabla f(x^*) = 0$ *et la matrice (symétrique)* $D^2 f(x^*)$ *est définie-positive,*

alors x^* est un point de minimum local strict de f sur Ω.

Remarque. Bien noter la différence entre la condition nécessaire de la proposition 8.5 et la condition suffisante de la proposition 8.6. Bien noter aussi que la condition suffisante de la proposition 8.6 n'est que locale mais assure que x^* est un minimum local strict.

Chapitre 9

Optimisation sous contraintes d'égalité

9.1 Notations et définitions premières

Dans ce chapitre nous nous intéressons à des problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité dans $\mathbb{R}^n$. Etant donnés Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f et $g_1, ..., g_m$ des fonctions définies sur Ω à valeurs réelles et $(c_1, ..., c_m) \in \mathbb{R}^m$, on considère donc le problème :

$$\inf_{x \in A} f(x) \tag{9.1}$$

avec :

$$A := \{x \in \Omega : g_j(x) = c_j, \ j = 1, ..., m\} \tag{9.2}$$

La fonction f à minimiser s'appelle fonction objectif ou coût. Les fonctions g_j et les réels c_j définissent les contraintes d'égalité de (9.1), les éléments de A s'appellent les éléments admissibles, on supposera évidemment dans ce qui suit que $A \neq \emptyset$. Comme précédemment, on distingue les solutions locales et globales, strictes et larges :

Définition 9.1 .

1. *On dit que x^* est une solution globale de (9.1) ou un point de minimum global de f sur A ssi $f(x^*) \leq f(x)$ pour tout $x \in A$.*
2. *On dit que x^* est une solution locale de (9.1) ou un point de minimum local de f sur A ss'il existe $r > 0$ tel que $f(x^*) \leq f(x)$ pour tout $x \in A$ tel que $\|x - x^*\| < r$.*
3. *On dit que x^* est un point de minimum global strict de f sur A ssi $f(x^*) < f(x)$ pour tout $x \in A \setminus \{x^*\}$.*

4. *On dit que x^* un point de minimum local strict de f sur A ss'il existe $r > 0$ tel que $f(x^*) < f(x)$ pour tout $x \in A$ tel que $\|x - x^*\| < r$ et $x \neq x^*$.*

Evidemment, la première question à se poser est celle de l'existence d'une solution de (9.1), pour cela, on utilise les résultats du paragraphe 8.2. En effet, ces derniers ont été obtenus dans des espaces métriques généraux, ils s'appliquent en particulier à la partie A de $\mathbb{R}^n$.

Il sera commode dans ce qui suit de noter sous forme plus synthétique les contraintes. Pour cela, on définit :

$$g : \left\{ \begin{array}{lll} \Omega & \to & \mathbb{R}^m \\ x & \mapsto & g(x) := (g_1(x), ..., g_m(x)) \end{array} \right.$$

Ainsi, en posant $c = (c_1, ..., c_m)$, l'ensemble admissible s'écrit simplement $A := g^{-1}(\{c\})$.

9.2 Un peu d'algèbre linéaire

Avant d'aller plus avant, rappelons quelques résultats d'algèbre linéaire. Tout d'abord, rappelons que si E est un $\mathbb{R}$-ev et E_1 et E_2 deux sev de E, on dit que E_1 et E_2 sont supplémentaires (ce que l'on note $E = E_1 \oplus E_2$) ssi pour tout $x \in E$ il existe un unique $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$. Autrement dit $E = E_1 \oplus E_2$ ssi :

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{lll} E_1 \times E_2 & \to & E \\ (x_1, x_2) & \mapsto & x_1 + x_2 \end{array} \right.$$

est un isomorphisme entre $E_1 \times E_2$ et E. Cet isomorphisme permet d'identifier E au produit $E_1 \times E_2$, dans ce cas on fera l'identification $x = x_1 + x_2 = \Phi^{-1}(x) = (x_1, x_2)$. Notons enfin que si E est de dimension finie alors Φ et Φ^{-1} sont continues, dans ce cas l'identification précédente $x = \Phi^{-1}(x)$ n'altère en rien les considérations topologiques et différentielles.

Proposition 9.1 *Soit E et F deux $\mathbb{R}$-ev, $v \in L(E, F)$, $E_1 := \ker(v)$ et E_2 un supplémentaire de E_1 alors la double restriction de v à E_2 et $\mathrm{Im}(v)$ est un isomorphisme.*

Preuve:
Notons w la double restriction de v à E_2 et $\mathrm{Im}(v)$, soit $y \in \mathrm{Im}(v)$, il existe $x \in E$ tel que $y = v(x)$. Comme $E_1 \oplus E_2 = E$, il existe un unique $(x_1, x_2) \in$

$E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$, par définition de E_1, on a $v(x_1) = 0$ donc $y = v(x_1+x_2) = v(x_2) = w(x_2)$ ainsi w est surjective. Supposons maintenant que $x \in E_2$ vérifie $w(x) = 0 = v(x)$ alors $x \in E_1 \cap E_2 = \{0\}$ ainsi w est injective.

$\square$

Lemme 9.1 *Soit E un $\mathbb{R}$-ev, $u_1, ..., u_m$ m formes linéaires sur E et $u \in L(E, \mathbb{R}^m)$ défini par $u(x) := (u_1(x), ..., u_m(x))$ pour tout $x \in E$. Les assertions suivantes sont alors équivalentes :*

1. *u est surjective,*
2. *$u_1, ..., u_m$ est une famille libre.*

Preuve:

Si $u_1, ..., u_m$ est une famille liée, il existe des réels non tous nuls $\lambda_1, ..., \lambda_m$ tels que $\sum_{j=1}^m \lambda_j u_j = 0$. Ainsi pour tout $x \in E$ on a $u(x) \in H$ où H est l'hyperplan de $\mathbb{R}^m$ défini par l'équation $\sum_{j=1}^m \lambda_j y_j = 0$ ainsi $\mathrm{Im}(u) \neq \mathbb{R}^m$.

Si u n'est pas surjective $\mathrm{Im}(u) \neq \mathbb{R}^m$ et donc $\mathrm{Im}(u) \subset H$ avec H un hyperplan de $\mathbb{R}^m$. Soit $\sum_{j=1}^m \lambda_j y_j = 0$ une équation de H ($\lambda_1, ..., \lambda_m$ réels non tous nuls), comme $u(x) \in H$ pour tout $x \in E$, on a

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j u_j(x) = 0, \, \forall x \in E.$$

Ainsi $u_1, ..., u_m$ est liée.

$\square$

Achevons ces préliminaires avec une variante d'un corollaire du Lemme de Farkas :

Lemme 9.2 *Soit E un $\mathbb{R}$-ev, $u_1, ..., u_m$ et v $m+1$ formes linéaires sur E. Les assertions suivantes sont alors équivalentes :*

1. *$\cap_{j=1}^m \ker u_j \subset \ker(v)$,*
2. *il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ telle que :*

$$v = \sum_{j=1}^m \lambda_j u_j.$$

Preuve:

Tout d'abord, il est évident que 2. implique 1.. Supposons maintenant que 1. ait lieu, il s'agit de montrer que $v \in F := \mathrm{vect}(u_1, ..., u_m)$. F est un sev de l'ev de dimension finie $G := \mathrm{vect}(u_1, ..., u_m, v)$. On identifie G à $\mathbb{R}^p$

($p = \dim(G)$) et on le munit de la structure hilbertienne usuelle de $\mathbb{R}^p$. Ainsi on identifie aussi G à son dual. Si $v \notin F$, comme F est un sev fermé de G on peut séparer v de F : il existe $x \in \mathbb{R}^p$ et $\varepsilon > 0$ tels que :

$$v(x) \leq \inf_{p \in F} p(x) - \varepsilon. \tag{9.3}$$

Comme G est un sev, nous déduisons de (9.3) que $p(x) = 0$ pour tout $p \in F$ (voir la démonstration du lemme de Farkas pour les détails), en particulier ceci implique que $x \in \cap_{j=1}^m \ker u_j$ et donc 1. implique que $v(x) = 0$. Or avec (9.3), on a $v(x) \leq -\varepsilon < 0$ ce qui constitue la contradiction recherchée. □

9.3 Conditions du premier ordre de Lagrange

Proposition 9.2 *Soit $x^* \in A$, une solution locale de (9.1). On suppose que :*

1. *f est différentiable en x^*,*
2. *g est de classe C^1 au voisinage de x^*,*
3. *$g'(x^*)$ est surjective*

alors pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$g'(x^*)(h) = 0 \Rightarrow \nabla f(x^*) \cdot h = 0 \tag{9.4}$$

Preuve:
Il s'agit de montrer que :

$$E_1 := \ker(g'(x^*)) = \cap_{j=1}^m \ker(g_j'(x^*)) \subset \ker(f'(x^*)) = \nabla f(x^*)^\perp. \tag{9.5}$$

Soit E_2 un supplémentaire de E_1, par la suite on notera les éléments de $\mathbb{R}^n$ sous la forme $x = (x_1, x_2)$ selon le "découpage" $\mathbb{R}^n = E_1 \oplus E_2$, on notera en particulier $x^* = (x_1^*, x_2^*)$. On notera également ∂_i, $i = 1, 2$ les différentielles partielles selon le découpage $\mathbb{R}^n = E_1 \oplus E_2$. Par construction, on a : $\partial_1 g(x^*) = 0$. D'après la proposition 9.1, $\partial_2 g(x^*)$ est un isomorphisme de E_2 sur $\mathrm{Im}(g'(x^*))$ et comme $g'(x^*)$ est surjective, $\mathrm{Im}(g'(x^*)) = \mathbb{R}^m$ donc $\partial_2 g(x^*)$ est un isomorphisme de E_2 vers $\mathbb{R}^m$.

Puisque $g(x^*) - c = 0$ et $\partial_2 g(x^*)$ est inversible, il résulte du théorème des fonctions implicites qu'il existe un voisinage ouvert U_1 de x_1^*, un voisinage ouvert U_2 de x_2^* et une application $\Psi \in C^1(U_1, U_2)$ tels que $U_1 \times U_2 \subset \Omega$, $\Psi(x_1^*) = x_2^*$ et :

$$A \cap (U_1 \times U_2) = \{(x_1, \Psi(x_1)) : x_1 \in U_1\}.$$

En dérivant la relation $g(x_1, \Psi(x_1)) = c$ valable sur U_1, il vient :

$$\partial_1 g(x_1, \Psi(x_1)) + \partial_2 g(x_1, \Psi(x_1)) \circ \Psi'(x_1) = 0 \ \forall x_1 \in U_1$$

en prenant $x_1 = x_1^*$, en utilisant $\partial_1 g(x^*) = 0$ et le fait que $\partial_2 g(x_1^*, \Psi(x_1^*)) = \partial_2 g(x^*)$ est inversible, on obtient donc :

$$\Psi'(x_1^*) = 0.$$

Soit $h \in E_1$, pour $t \in \mathbb{R}$ suffisamment petit, on a $x_1^* + th \in U_1$, $(x_1^* + th, \Psi(x_1^* + th)) \in A$ et :

$$f(x_1^* + th, \Psi(x_1^* + th)) \geq f(x^*) = f(x_1^*, \Psi(x_1^*)).$$

Ainsi la fonction d'une variable, $\gamma_h : t \mapsto f(x_1^* + th, \Psi(x_1^* + th))$, définie sur un voisinage ouvert de 0, présente un minimum local en $t = 0$, comme γ_h est dérivable en 0 il vient donc :

$$\dot{\gamma}_h(0) = 0 = (\partial_1 f(x^*) + \partial_2 f(x^*) \circ \Psi'(x_1^*))\,(h) \tag{9.6}$$

et comme $\Psi'(x_1^*) = 0$ on en déduit donc que $\partial_1 f'(x^*)(h) = 0$. Comme $h \in E_1$, on a donc :

$$\partial_1 f'(x^*)(h) = 0 = f'(x^*)(h).$$

On a donc bien établi que $E_1 := \ker(g'(x^*)) \subset \ker(f'(x^*)) = \nabla f(x^*)^{\perp}$. $\Box$

Retenez que l'idée essentielle de la preuve précédente est de se ramener à une minimisation <u>sans contrainte</u> et ce grâce au théorème des fonctions implicites.

Les conditions nécessaires du premier ordre dites de Lagrange sont alors fournies par le théorème suivant :

Théorème 9.1 *Soit $x^* \in A$, une solution locale de (9.1). On suppose que :*

1. *f est différentiable en x^*,*
2. *g est de classe C^1 au voisinage de x^*,*
3. *la famille $\nabla g_1(x^*), ..., \nabla g_m(x^*)$ est libre,*

alors il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ tels que :

$$\nabla f(x^*) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(x^*). \tag{9.7}$$

Preuve:
Il résulte du lemme 9.1 que $g'(x^*)$ est surjective et donc que les hypothèses de la proposition 9.2 sont satisfaites. Ainsi on a $\cap_{j=1}^m \ker(g_j'(x^*)) \subset \ker(f'(x^*))$ ce qui est équivalent à :

$$\cap_{j=1}^m \nabla g_j(x^*)^\perp \subset \nabla f(x^*)^\perp.$$

Ainsi le lemme 9.2 (ou le lemme de Farkas) permet d'en déduire qu'il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ tels que :

$$\nabla f(x^*) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla g_j(x^*).$$

□

Les réels $\lambda_1, ..., \lambda_m$ intervenant dans (9.7) sont appelés des multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes de (9.1) au point de minimum local x^*.

Remarque. L'hypothèse que la famille $\nabla g_1(x^*), ..., \nabla g_m(x^*)$ est libre implique que les multiplicateurs $\lambda_1, ...\lambda_m$ associés à x^* sont uniques. La conclusion du théorème 9.1 signifie simplement que le gradient de la fonction objectif en x^* appartient à l'espace vectoriel engendré par les gradients des contraintes en x^*.

Exemple 9.1 *Cherchons à minimiser $f(x_1, ..., x_n) = x_1 + ... + x_n$ sous la contrainte $g(x_1, ...x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$. Tout d'abord, par compacité de la sphère il existe au moins une solution. Ensuite notons que $\nabla g(x) = 2x$ ainsi les conditions du thèorème de Lagrange sont remplies. Ainsi si x^* est un minimiseur il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $1 = \lambda x_i^*$ pour $i = 1, ..., n$ ce qui implique que les composantes de x^* sont égales. Avec la contrainte cela laisse les deux possibilités :*

$$x^* = (n^{-1/2}, ..., n^{-1/2}) \text{ ou } x^* = -(n^{-1/2}, ..., n^{-1/2}).$$

Le premier cas correspond au point de maximum de f sur la sphère et le second au point de minimum de f sur la sphère.

Remarque. Attention à l'hypothèse "$g'(x^*)$ surjective" (équivalente, rappelons le, au fait que la famille $\nabla g_1(x^*), ..., \nabla g_m(x^*)$ est libre). Cette hypothèse ne peut être affaiblie pour que la conclusion du théorème de Lagrange reste valide (voir exemple ci-dessous). Par ailleurs, cette hypothèse porte sur x^*, qui est en pratique ce que l'on cherche et donc a priori inconnu! Enfin, remarquons que si $\nabla g_1(x^*), ..., \nabla g_m(x^*)$ est libre alors $m \leq n$ c'est à dire qu'il y a moins de contraintes que de variables....

Exemple 9.2 *Il est facile de construire des contre exemples à (9.7) si l'hypothèse "$g'(x^*)$ surjective" n'est pas vérifiée. Cherchons à minimiser $f(x,y) = x$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 0$: il n'y a qu'un point admissible $(0,0)$ et $\nabla f(0,0) = (1,0) \neq \lambda \nabla g(0,0) = 0$, dans ce cas, à cause de la dégénérescence $\nabla g(0,0) = (0,0)$, il n'y a pas de multiplicateur de Lagrange.*

Remarque. Nous verrons au paragraphe suivant comment en introduisant un Lagrangien généralisé, on peut aussi traiter les cas dégénérés où $g'(x^*)$ n'est pas surjective (i.e. $\nabla g_1(x^*), ..., \nabla g_m(x^*)$ liée)

Lorsque le problème (9.1) est convexe, la condition (9.7) est suffisante et assure que le minimum est global. Ce cas est celui où les contraintes sont affines et l'objectif convexe :

Proposition 9.3 *Supposons que Ω est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, que f est une fonction convexe sur Ω et que g_j est une fonction affine pour $j = 1, ..., m$. Si $x^* \in A$ est tel qu'il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ tels que :*

$$\nabla f(x^*) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(x^*). \tag{9.8}$$

alors $f(x^*) \leq f(x)$ pour tout $x \in A$.

Preuve:
Soit $x \in A$, par convexité de f, on a :

$$f(x) - f(x^*) \geq \nabla f(x^*) \cdot (x - x^*)$$

avec (9.8), il vient donc :

$$f(x) - f(x^*) \geq \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(x^*).(x - x^*). \tag{9.9}$$

Comme les g_j sont affines et $g_j(x) = g_j(x^*) = c_j$ on a aussi :

$$g_j(x) - g_j(x^*) = 0 = \nabla g_j(x^*).(x - x^*)$$

en reportant dans (9.9), il vient bien $f(x^*) \leq f(x)$. $\square$

9.4 Lagrangien et lagrangien généralisé

Le lagrangien du problème (9.1) est la fonction définie sur $\Omega \times \mathbb{R}^m$ par :

$$\mathcal{L}(x, \lambda_1, ...\lambda_m) := f(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (g_j(x) - c_j). \tag{9.10}$$

Remarquons alors que si f et les fonctions g_j sont différentiables en $x \in \Omega$ alors on a :

$$\nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda_1, ..., \lambda_m) = \nabla f(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(x). \tag{9.11}$$

et

$$\partial_{\lambda_j} \mathcal{L}(x, \lambda_1, ..., \lambda_m) = c_j - g_j(x) \tag{9.12}$$

Ainsi le fait que $x \in A$ i.e. vérifie la contrainte $g(x) = c$ peut s'exprimer par :

$$\partial_{\lambda_j} \mathcal{L}(x, \lambda_1, ..., \lambda_m) = 0 \text{ pour } j = 1, ..., m$$

ou, sous forme plus synthétique, en posant $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$:

$$\nabla_\lambda \mathcal{L}(x, \lambda) = 0. \tag{9.13}$$

Avec (9.11), la condition de Lagrange se traduit par :

$$\nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda_1, ..., \lambda_m) = 0.$$

Le théorème 9.1 peut donc se reformuler comme suit :

Théorème 9.2 *Soit $x^* \in A$, une solution locale de (9.1). On suppose que :*

1. *f est différentiable en x^*,*
2. *g est de classe C^1 au voisinage de x^*,*
3. *la famille $\nabla g_1(x^*), ..., \nabla g_m(x^*)$ est libre,*

alors il existe $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ tels que :

$$\mathcal{L}'(x^*, \lambda) = 0. \tag{9.14}$$

Nous avons déja discuté le caractère contraignant de la condition "$g'(x^*)$ surjective" qui porte sur le point inconnu x^*. Pour remédier à cela on peut ajouter un multiplicateur à la fonction objectif, ceci conduit à la définition du lagrangien généralisé. Le lagrangien généralisé du problème (9.1) est la fonction définie sur $\Omega \times \mathbb{R}^{m+1}$ par :

$$\mathcal{L}_0(x, \lambda_0, \lambda_1, ...\lambda_m) := \lambda_0 f(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (g_j(x) - c_j). \tag{9.15}$$

La condition du premier ordre peut en effet se formuler par :

Théorème 9.3 *Soit $x^* \in A$, une solution locale de (9.1). On suppose que :*

1. *f est différentiable en x^*,*
2. *g est de classe C^1 au voisinage de x^*,*

alors il existe des réels $(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ non tous nuls tels que :

$$\lambda_0 \nabla f(x^*) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(x^*). \tag{9.16}$$

Preuve:
Définissons pour tout $x \in \Omega$, $H(x) := (f(x), g(x)) \in \mathbb{R}^{m+1}$. Par hypothèse, H est différentiable en x^* : $H'(x^*) = (f'(x^*), g'(x^*))$. Distinguons alors deux cas :

Premier cas : $H'(x^*)$ est surjective. Ceci implique que $g'(x^*)$ est surjective on peut alors appliquer le théorème 9.1 et prendre $\lambda_0 = 1$ dans (9.16).

Deuxième cas : $H'(x^*)$ n'est pas surjective. Puisque

$$H'(x^*) = (f'(x^*), g_1'(x^*), ..., g_m'(x^*)),$$

il résulte alors du lemme 9.1 que la famille de formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$, $(f'(x^*), g_1'(x^*), ..., g_m'(x^*))$ est liée ce qui revient à dire que

$$\text{la famille } (\nabla f(x^*), \nabla g_1(x^*), ..., \nabla g_m(x^*)) \text{ est liée dans } \mathbb{R}^n.$$

Il existe donc des réels $(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ non tous nuls tels que :

$$\lambda_0 \nabla f(x^*) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(x^*).$$

$\square$

Remarque. Notons que la condition (9.16) est équivalente à :

$$\nabla_x \mathcal{L}_0(x^*, \lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m) = 0$$

par ailleurs, $g(x^*) - c = 0$ s'exprime aussi sous la forme

$$\partial_{\lambda_j} \mathcal{L}_0(x^*, \lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m) = 0 \text{ pour } j = 1, ..., m.$$

Notons enfin que

$$\partial_{\lambda_0} \mathcal{L}_0(x^*, \lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m) = f(x^*)$$

donc, en général $\mathcal{L}_0'(x^*, \lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m)$ est différent de 0.

9.5 Conditions du second ordre

Les conditions nécessaires du second-ordre pour un minimum local de (9.1) sont données par :

Théorème 9.4 *Soit $x^* \in A$, une solution locale de (9.1). On suppose que :*

1. *f est deux fois différentiable en x^*,*
2. *g est de classe C^2 au voisinage de x^*,*
3. *la famille $\nabla g_1(x^*), \ldots.., \nabla g_m(x^*)$ est libre,*

alors il existe $\lambda := (\lambda_1, \ldots., \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que :

$$\begin{aligned} \nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda) &= \nabla f(x^*) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(x^*) = 0 \text{ et} && (9.17) \\ \partial^2_{xx} \mathcal{L}(x^*, \lambda)(h, h) &\geq 0 \text{ pour tout } h \in \ker(g'(x^*)) && (9.18) \end{aligned}$$

Preuve:
Il résulte du théorème de Lagrange 9.1 qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tel que $\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda) = 0$, autrement dit :

$$f'(x^*) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g'_j(x^*). \tag{9.19}$$

Posons $E_1 := \ker(g'(x^*))$ et soit E_2 un supplémentaire de E_1. Comme précédemment, on notera les éléments de $\mathbb{R}^n$ sous la forme $x = (x_1, x_2)$ selon la décomposition $\mathbb{R}^n = E_1 \oplus E_2$, on notera en particulier $x^* = (x_1^*, x_2^*)$. On notera également ∂_i, $i = 1, 2$ les différentielles partielles selon le découpage $\mathbb{R}^n = E_1 \oplus E_2$. Par construction, on a : $\partial_1 g(x^*) = 0$. D'après la proposition 9.1, $\partial_2 g(x^*)$ est un isomorphisme de E_2 sur $\mathrm{Im}(g'(x^*))$ et comme $g'(x^*)$ est surjective, $\mathrm{Im}(g'(x^*)) = \mathbb{R}^m$ donc $\partial_2 g(x^*)$ est un isomorphisme de E_2 vers $\mathbb{R}^m$.

L'identité (9.19) implique en particulier :

$$\partial_2 f(x^*) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \partial_2 g_j(x^*). \tag{9.20}$$

Puisque $g(x^*) - c = 0$ et $\partial_2 g(x^*)$ est inversible, il résulte du théorème des fonctions implicites qu'il existe un voisinage ouvert U_1 de x_1^*, un voisinage ouvert U_2 de x_2^* et une application $\Psi \in C^2(U_1, U_2)$ tels que $U_1 \times U_2 \subset \Omega$, $\Psi(x_1^*) = x_2^*$ et :

$$A \cap (U_1 \times U_2) = \{(x_1, \Psi(x_1)) : x_1 \in U_1\}.$$

En dérivant une première fois la relation $g(x_1, \Psi(x_1)) = c$ valable sur U_1, il vient :

$$\partial_1 g(x_1, \Psi(x_1)) + \partial_2 g(x_1, \Psi(x_1)) \circ \Psi'(x_1) = 0 \ \forall x_1 \in U_1 \tag{9.21}$$

en prenant $x_1 = x_1^*$, en utilisant $\partial_1 g(x^*) = 0$ et le fait que $\partial_2 g(x_1^*, \Psi(x_1^*)) = \partial_2 g(x^*)$ est inversible, on obtient donc :

$$\Psi'(x_1^*) = 0. \tag{9.22}$$

En dérivant (9.21), il vient :

$$\begin{aligned} \partial_{11}^2 g(x_1, \Psi(x_1)) + 2\partial_{12}^2 g(x_1, \Psi(x_1)) \circ \Psi'(x_1) + \\ \partial_{22}^2 g(x_1, \Psi(x_1))(\Psi'(x_1), \Psi'(x_1)) + \partial_2 g(x_1, \Psi(x_1)) \circ \Psi''(x_1) = 0. \end{aligned} \tag{9.23}$$

pour $x_1 = x_1^*$, en utilisant (9.22), il vient alors :

$$\partial_{11}^2 g(x^*) + \partial_2 g(x^*) \circ \Psi''(x_1^*) = 0. \tag{9.24}$$

Pour $x_1 \in U_1$ posons $F(x_1) := f(x_1, \Psi(x_1))$, F présente alors un minimum local en x_1^* et comme F est deux fois dérivable en x_1^* on a :

$$F'(x_1^*)(h) = 0 \text{ pour tout } h \in E_1. \tag{9.25}$$

et

$$F''(x_1^*)(h, h) \geq 0 \text{ pour tout } h \in E_1. \tag{9.26}$$

Avec des calculs semblables à (9.23) et (9.24), on a :

$$F''(x_1^*)(h, h) = \partial_{11}^2 f(x^*)(h, h) + \partial_2 f(x^*)(\Psi''(x_1^*)(h, h))$$

(9.26) devient alors :

$$\partial_{11}^2 f(x^*)(h, h) + \partial_2 f(x^*)(\Psi''(x_1^*)(h, h)) \geq 0 \text{ pour tout } h \in E_1. \tag{9.27}$$

Avec (9.20) et (9.24), on a par ailleurs :

$$\begin{aligned} &\partial_{11}^2 f(x^*)(h, h) + \partial_2 f(x^*)(\Psi''(x_1^*)(h, h)) \\ =&\partial_{11}^2 f(x^*)(h, h) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \partial_2 g_j(x^*)(\Psi''(x_1^*)(h, h)) \\ =&\partial_{11}^2 f(x^*)(h, h) - \sum_{j=1}^m \lambda_j \partial_{11}^2 g_j(x^*)(h, h). \end{aligned}$$

Si bien que (9.27) se réecrit :

$$\left(\partial_{11}^2 f(x^*) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \partial_{11}^2 g_j(x^*)\right)(h,h) \geq 0 \text{ pour tout } h \in E_1 = \ker(g'(x^*))$$

or pour $h \in E_1$, on a :

$$\begin{aligned}\left(\partial_{11}^2 f(x^*) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \partial_{11}^2 g_j(x^*)\right)(h,h) =& (f''(x^*) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j''(x^*))(h,h) \\ =& \partial_{xx}^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda)(h,h)\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. □

Remarque. Attention à la condition $h \in \ker(g'(x^*))$ dans (9.18). La condition du second-ordre (9.18) :

$$\partial^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda)(h,h) \geq 0 \text{ pour tout } h \in \ker(g'(x^*))$$

signifie que la forme quadratique $\partial_{xx}^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda)$ est semi-définie positive sur $\ker(g'(x^*))$ (pas sur $\mathbb{R}^n$ en entier en général). Notons qu'on peut aussi exprimer cette forme quadratique sous la forme développée :

$$\partial_{xx}^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda) = f''(x^*) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j''(x^*)$$

Remarque. Notez bien que pour écrire la condition du second-ordre, il faut avoir déterminé d'abord les multiplicateurs de Lagrange.

Enfin, voici des conditions suffisantes pour un minimum local de (9.1) :

Théorème 9.5 *Soit $x^* \in A$. On suppose que :*

1. *f est deux fois différentiable en x^*,*
2. *g est de classe C^2 au voisinage de x^*,*
3. *la famille $\nabla g_1(x^*), ..., \nabla g_m(x^*)$ est libre,*

S'il existe $\lambda := (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que :

$$\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda) = \nabla f(x^*) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(x^*) = 0 \text{ et} \tag{9.28}$$

$$\partial_{xx}^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda)(h,h) > 0 \text{ pour tout } h \in \ker(g'(x^*)),\ h \neq 0 \tag{9.29}$$

alors x^* est un point de minimum local strict de f sur A.

Preuve:
En reprenant les notations de la preuve du théorème 9.5, il suffit de montrer que x_1^* est un point de minimum local strict de F (rappelons que $F(x_1) := f(x_1, \Psi(x_1))$ pour $x_1 \in U_1$). On commence par remarquer :

$$F'(x_1^*) = \partial_1 f(x^*) + \partial_2 f(x^*) \circ \Psi'(x_1^*)$$

Or, nous savons que

$$\Psi'(x_1^*) = 0,\ \partial_1 g(x^*) = 0 \text{ et } \partial_1 f(x^*) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \partial_1 g_j(x^*) = 0$$

et donc $F'(x_1^*) = 0$. Comme dans la preuve du théorème 9.5, on a aussi pour tout $h \in \ker(g'(x^*)) = E_1$:

$$\begin{aligned} F''(x_1^*)(h,h) =& \partial_{11}^2 f(x^*)(h,h) + \partial_2 f(x^*)(\Psi''(x_1^*)(h,h)) \\ =& (f''(x^*) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j''(x^*))(h,h) \\ =& \partial_{xx}^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda)(h,h) \end{aligned}$$

Ainsi par (9.29), $F''(x_1^*)$ est une forme quadratique définie positive sur E_1. On déduit alors de la proposition 8.6 que x_1^* est un point de minimum local strict de F et donc un point de minimum local strict de f sur A .

□

Chapitre 10

Optimisation sous contraintes générales

10.1 Notations

Dans ce chapitre nous nous intéressons à des problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité et d'inégalité dans $\mathbb{R}^n$. Etant donnés Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f, $g_1, ..., g_m$, $k_1, ..., k_p$ des fonctions définies sur Ω à valeurs réelles et des réels c_1, ... , c_m, d_1, ..., d_p, on considère le problème :

$$\inf_{x \in A} f(x) \tag{10.1}$$

avec :

$$A := \{x \in \Omega : g_j(x) = c_j,\ j = 1, ..., m, ,\ k_i(x) \leq d_i,\ i = 1, ..., p\} \tag{10.2}$$

La fonction f à minimiser s'appelle fonction objectif ou coût. Les fonctions g_j et les réels c_j définissent les contraintes d'égalité de (10.1), les fonctions k_i et les réels d_i définissent les contraintes d'inégalité de (10.1). Les éléments de A s'appellent les éléments admissibles, on supposera évidemment dans ce qui suit que $A \neq \emptyset$. Comme précédemment, on distingue les solutions locales et globales, strictes et larges :

Définition 10.1 .

1. *On dit que x^* est une solution globale de (9.1) ou un point de minimum global de f sur A ssi $f(x^*) \leq f(x)$ pour tout $x \in A$.*
2. *On dit que x^* est une solution locale de (9.1) ou un point de minimum local de f sur A ss'il existe $r > 0$ tel que $f(x^*) \leq f(x)$ pour tout $x \in A$ tel que $\|x - x^*\| < r$.*

3. *On dit que x^* est un point de minimum global strict de f sur A ssi $f(x^*) < f(x)$ pour tout $x \in A \setminus \{x^*\}$.*
4. *On dit que x^* un point de minimum local strict de f sur A ss'il existe $r > 0$ tel que $f(x^*) < f(x)$ pour tout $x \in A$ tel que $\|x - x^*\| < r$ et $x \neq x^*$.*

Pour étudier l'existence d'une solution de (10.1), on utilise les résultats du paragraphe 8.2.

Il sera commode dans ce qui suit de noter sous forme plus synthétique les contraintes d'égalité, on définit :

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R}^m \\ x & \mapsto & g(x) := (g_1(x), ..., g_m(x)) \end{array} \right.$$

Ainsi les contraintes d'égalité de (10.1) s'écrivent simplement $g(x) = c$ ($c := (c_1, ..., c_m)$).

Soit $x \in A$ si $k_i(x) = d_i$ alors on dit que la i-ème contrainte d'inégalité est <u>saturée</u> en x (certains disent plutôt <u>serrée</u>, et en anglais, on dit : binding). On note $I(x)$ l'ensemble des contraintes saturées en $x \in A$:

$$I(x) := \{i \in \{1, ..., p\} \text{ t.q. } k_i(x) = d_i\}.$$

10.2 Résultats préliminaires

Dans tout ce paragraphe on considère $x^* \in A$ tel que les conditions suivantes sont satisfaites :

1. g est de classe C^1 au voisinage de x^*,
2. k_i est différentiable en x^* pour tout $i \in I(x^*)$,
3. la famille $\nabla g_1(x^*), ..., \nabla g_m(x^*)$ est libre,
4. les contraintes d'inégalité sont <u>qualifiées</u> en x^* ce qui par définition signifie :

$$\exists h_0 \in \ker(g'(x^*)) \text{ tel que } \nabla k_i(x^*) \cdot h_0 < 0 \ \forall i \in I(x^*). \tag{10.3}$$

L'hypothèse de qualification (10.3) est très importante, elle peut également s'exprimer par

$$\exists h_0 \text{ tel que } \nabla g_j(x^*) \cdot h_0 = 0 \ \forall j \in \{1, ..., m\}, \text{ et}$$
$$\nabla k_i(x^*) \cdot h_0 < 0 \ \forall i \in I(x^*).$$

Posons $E_1 := \ker(g'(x^*))$ et soit E_2 un supplémentaire de E_1. Comme dans le chapitre précédent, on notera les éléments de $\mathbb{R}^n$ sous la forme $x = (x_1, x_2)$ selon le "découpage" $\mathbb{R}^n = E_1 \oplus E_2$, on notera en particulier $x^* = (x_1^*, x_2^*)$. On notera également ∂_i, $i = 1, 2$ les différentielles partielles selon le découpage $\mathbb{R}^n = E_1 \oplus E_2$. Par construction, on a : $\partial_1 g(x^*) = 0$. Comme au chapitre précédent, $\partial_2 g(x^*)$ est un isomorphisme de E_2 vers $\mathbb{R}^m$. Puisque $g(x^*) - c = 0$ et $\partial_2 g(x^*)$ est inversible, il résulte du théorème des fonctions implicites qu'il existe un voisinage ouvert U_1 de x_1^*, un voisinage ouvert U_2 de x_2^* et une application $\Psi \in C^1(U_1, U_2)$ tels que $U_1 \times U_2 \subset \Omega$, $\Psi(x_1^*) = x_2^*$ et :

$$\{(x_1, x_2) \in U_1 \times U_2 : g(x_1, x_2) = c\} = \{(x_1, \Psi(x_1)) : x_1 \in U_1\}. \tag{10.4}$$

En dérivant la relation $g(x_1, \Psi(x_1)) = c$ valable sur U_1, il vient :

$$\partial_1 g(x_1, \Psi(x_1)) + \partial_2 g(x_1, \Psi(x_1)) \circ \Psi'(x_1) = 0 \ \forall x_1 \in U_1$$

en prenant $x_1 = x_1^*$, en utilisant $\partial_1 g(x^*) = 0$ et le fait que $\partial_2 g(x_1^*, \Psi(x_1^*)) = \partial_2 g(x^*)$ est inversible, on obtient donc :

$$\Psi'(x_1^*) = 0. \tag{10.5}$$

Fixons maintenant $\varepsilon > 0$ et $h \in \mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$h \in E_1 = \ker(g'(x^*)) \text{ et } \nabla k_i(x^*) \cdot h \leq 0 \ \forall i \in I(x^*). \tag{10.6}$$

Définissons pour $t > 0$:

$$x_1(t) = x_1^* + t(h + \varepsilon h_0). \tag{10.7}$$

On a alors $x_1(0) = x_1^*$, $x_1(t) \in E_1$ et $x_1(t) \in U_1$ pour $t > 0$ assez petit. Définissons pour $t > 0$ assez petit pour que $x_1(t) \in U_1$:

$$x(t) := (x_1(t), \Psi(x_1(t))). \tag{10.8}$$

Par construction, notons que $x(0) = x^*$ et avec (10.4), $g(x(t)) = c$ pour $t > 0$ assez petit. On a alors :

Lemme 10.1 *Sous les hypothèses précédentes soit $x(t) \in U_1 \times U_2$ défini par (10.8) pour $t > 0$ assez petit, on a :*

$$x(t) = x^* + t(h + \varepsilon h_0) + o(t)$$

et $x(t) \in A$ pour $t > 0$ assez petit.

Preuve:

On a $x_1(t) = x^* + t(h + \varepsilon h_0)$, posons $x_2(t) = \Psi(x_1(t))$ comme $x_1(0) = x_1^*$ et Ψ est dérivable en x_1^* avec $\Psi'(x_1^*) = 0$, x_2 est dérivable en 0 avec :

$$\dot{x}_2(t) = \Psi'(x_1^*)(h + \varepsilon h_0) = 0$$

donc $x_2(t) = o(t)$ et comme $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, il vient :

$$x(t) = (x_1^* + t(h + \varepsilon h_0), x_2^* + o(t)) = x^* + t(h + \varepsilon h_0) + o(t). \tag{10.9}$$

On sait déja que $g(x(t)) = c$, il s'agit de montrer que $x(t)$ satisfait aussi les contraintes d'inégalité pour $t > 0$ assez petit, pour cela distinguons les contraintes saturées des contraintes non saturées en x^*. Si $i \notin I(x^*)$ alors $k_i(x^*) < d_i$ et puisque k_i est continue en $x^* = x(0)$ et $x(.)$ est continue en $t = 0$, on a par continuité $k_i(x(t)) < d_i$ pour $t > 0$ assez petit. Si $i \in I(x^*)$ alors on a $k_i(x^*) = k_i(x(0)) = d_i$ et avec(10.9) on a :

$$k_i(x(t)) = d_i + t\nabla k_i(x^*) \cdot (h + \varepsilon h_0) + o(t)$$

par hypothèse $\nabla k_i(x^*) \cdot h \leq 0$ et $\nabla k_i(x^*) \cdot h_0 < 0$ donc $k_i(x(t)) \leq d_i$ pour $t > 0$ assez petit.

□

10.3 Condition d'optimalité de Kuhn et Tucker

Nous sommes en mesure de prouver le théorème de Kuhn et Tucker (parfois aussi appelé théorème de Karush, Kuhn et Tucker ou KKT) :

Théorème 10.1 *Soit $x^* \in A$ une solution locale de (10.1) telle que :*

1. *f est différentiable en x^*,*
2. *g est de classe C^1 au voisinage de x^*,*
3. *k_i est différentiable en x^* pour tout $i \in I(x^*)$,*
4. *la famille $\nabla g_1(x^*), \ldots\ldots, \nabla g_m(x^*)$ est libre,*
5. *les contraintes d'inégalité sont qualifiées en x^* :*

$$\exists h_0 \in \ker(g'(x^*)) \text{ tel que } \nabla k_i(x^*) \cdot h_0 < 0 \ \forall i \in I(x^*).$$

alors il existe $(\lambda_1, \ldots., \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ et $\mu_i \geq 0$ pour tout $i \in I(x^*)$ tel que :

$$\nabla f(x^*) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(x^*) - \sum_{i \in I(x^*)} \mu_i \nabla k_i(x^*). \tag{10.10}$$

Preuve:
Soit h vérifiant (10.6) et $x(t)$ défini pour $t > 0$ assez petit par (10.8), d'après le lemme 10.1, on a $x(t) \in A$, comme $x(0) = x^*$ et $x(.)$ est continu en 0 on a donc pour $t > 0$ assez petit :

$$\frac{1}{t}(f(x(t)) - f(x(0)) \geq 0. \tag{10.11}$$

Comme f est différentiable en x^* et en utilisant la première partie du lemme 10.1, on peut passer à la limite $t \to 0^+$ dans (10.11), il vient alors :

$$\nabla f(x^*) \cdot (h + \varepsilon h_0) \geq 0. \tag{10.12}$$

comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on obtient aussi :

$$\nabla f(x^*) \cdot h \geq 0. \tag{10.13}$$

Comme (10.13) a lieu pour tout h vérifiant (10.6), on déduit (10.10) du lemme de Farkas. $\square$

Les réels λ_j et μ_i sont appelés des multiplicateurs de Kuhn et Tucker associés aux contraintes de (10.1) au point de minimum local x^*.

Lorsque le problème (10.1) est convexe, la condition (10.10) est suffisante et assure que le minimum est global.

Proposition 10.1 *Supposons que Ω est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, que f et $k_1, ..., k_p$ sont des fonctions convexes sur Ω, g_j est une fonction affine pour $j = 1, ..., m$. Si $x^* \in A$ est tel qu'il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ et $\mu_i \geq 0$ pour tout $i \in I(x^*)$ tel que :*

$$\nabla f(x^*) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(x^*) - \sum_{i \in I(x^*)} \mu_i \nabla k_i(x^*). \tag{10.14}$$

alors pour $f(x^*) \leq f(x)$ pour tout $x \in A$.

Preuve:
Soit $x \in A$, par convexité de f, on a :

$$f(x) - f(x^*) \geq \nabla f(x^*) \cdot (x - x^*)$$

avec (10.14), il vient donc :

$$f(x) - f(x^*) \geq - \sum_{i \in I(x^*)} \mu_i \nabla k_i(x^*).(x - x^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(x^*).(x - x^*). \tag{10.15}$$

Comme les g_j sont affines et $g_j(x) = g_j(x^*) = c_j$ on a aussi :

$$g_j(x) - g_j(x^*) = 0 = \nabla g_j(x^*).(x - x^*)$$

en reportant dans (9.9), il vient donc :

$$f(x^*) - f(x) \leq \sum_{i \in I(x^*)} \mu_i \nabla k_i(x^*).(x - x^*) \tag{10.16}$$

Pour $i \in I(x^*)$, $k_i(x^*) = d_i$ et puisque $x \in A$, on a $k_i(x) \leq d_i$, par convexité de k_i il vient alors :

$$0 \geq k_i(x) - k_i(x^*) \geq \nabla k_i(x^*).(x - x^*) \tag{10.17}$$

en reportant dans (10.16), il vient bien $f(x^*) \leq f(x)$. □

10.4 Lagrangien

On peut aussi formuler les conditions d'optimalité KKT, au moyen du lagrangien associé à (10.1). L'idée est d'introduire des multiplicateurs pour toutes les contraintes d'inégalité dans (10.10), pour tout i on a :
- soit $i \notin I(x^*)$ et $\mu_i = 0$ dans (10.10),
- soit $i \in I(x^*)$ et donc $k_i(x^*) - d_i$.

ce qu'on peut résumer par la condition de complémentarité entre multiplicateurs et contraintes qui exprime que si une contrainte n'est pas saturée le multiplicateurs associé est nul :

$$\mu_i(k_i(x^*) - d_i) = 0 \text{ pour tout } i \in \{1, ..., p\}. \tag{10.18}$$

Le lagrangien du problème (9.1) est la fonction définie pour tout $(x, \lambda, \mu) \in \Omega \times \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}_+)^p$ par :

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) := f(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (g_j(x) - c_j) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i (k_i(x) - d_i). \tag{10.19}$$

Remarquons alors que si f et les fonctions g_j sont différentiables en $x \in \Omega$ alors on a :

$$\nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = \nabla f(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(x) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i \nabla k_i(x). \tag{10.20}$$

$$\partial_{\lambda_j} \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = c_j - g_j(x) \tag{10.21}$$

et

$$\partial_{\mu_i}\mathcal{L}(x,\lambda,\mu) = k_i(x) - d_i \tag{10.22}$$

Ainsi le fait que $x^* \in A$ i.e. vérifie la contrainte $g(x^*) = c$ peut s'exprimer par :

$$\nabla_\lambda \mathcal{L}(x^*,\lambda,\mu) = 0. \tag{10.23}$$

Avec (9.11) et (10.18), la condition de Kuhn et Tucker se traduit par :

$$\nabla_x \mathcal{L}(x^*,\lambda,\mu) = 0.$$

Le théorème 10.10 peut donc se reformuler comme suit :

Théorème 10.2 *Soit $x^* \in A$ une solution locale de (10.1) telle que :*

1. *f est différentiable en x^*,*
2. *g est de classe C^1 au voisinage de x^*,*
3. *k_i est différentiable en x^* pour tout $i \in I(x^*)$,*
4. *la famille $\nabla g_1(x^*), ..., \nabla g_m(x^*)$ est libre,*
5. *les contraintes d'inégalité sont qualifiées en x^* :*

$$\exists h_0 \in \ker(g'(x^*)) \textit{ tel que } \nabla k_i(x^*) \cdot h_0 < 0 \ \forall i \in I(x^*).$$

alors il existe $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ et $(\mu_1, ..., \mu_m) \in \mathbb{R}^m_+$ tels que :

$$\mu_i(k_i(x^*) - d_i) = 0 \ \forall i \in \{1, , p\} \tag{10.24}$$

$$\nabla_x \mathcal{L}(x^*,\lambda,\mu) = 0. \tag{10.25}$$

$$\nabla_\lambda \mathcal{L}(x^*,\lambda,\mu) = 0. \tag{10.26}$$

Bibliographie

[1] H. Brézis *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris.

[2] H. Cartan *Cours de calcul différentiel*, Hermann, Paris.

[3] G. Cohen *Convexité et Optimisation*, Cours de l'ENPC, disponible à `http ://www-rocq.inria.fr/metalau/cohen/`

[4] J.-B. Hiriart Urruty *Optimisation et analyse convexe*, PUF, Paris.

[5] J.-B. Hiriart Urruty, C. Lemaréchal *Convex Analysis and Minimization Algorithms*, tomes I et II, Springer-Verlag, Berlin.