L3, 2006-2007
Calcul Différentiel et Optimisation
G. Carlier

Révisions

Exercice 1 *Montrer que le problème suivant admet au moins une solution:*

$$\inf\{x^2 + 2y^2 + \sin(xy),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Donner les conditions vérifiées par ces solutions.

Exercice 2 *Déterminer les différentielles première et seconde des applications suivantes:*

$$f(x,y) = xy + 3x - y^2,\ f(x,y,z) = (x - y^2 z, x^3 + xy^2 + z^3).$$

Exercice 3 *Donner un condition nécessaire et suffisante pour que la fonction suivante soit convexe:*

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + axy.$$

Exercice 4 *Soit $f \in C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, calculer les différentielles première et seconde de*

$$g(x,y,z) := f(x^2 + y^2 + z^2)$$

Exercice 5 *Résoudre rigoureusement (indication: trigo) le problème d'optimisation:*

$$\inf f(x,y) = x + y,\ \textit{sous la contrainte } x^2 + y^2 = 1.$$

Exercice 6 *Rappeler et prouver le théorème de Rolle et la formule des accroissements finis. Montrer que la formule des accroissements finis ne s'étend pas aux fonctions différentiables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ (on pourra considérer $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$).*

Exercice 7 *Etudier les propriétés de continuité et de différentiabilité des fonctions de deux variables:*

$$f(x,y) = \max(|x|, |y|),\ g(x,y) = \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} \textit{ si } (x,y) \neq (0,0),\ g(0,0) = 0.$$

Exercice 8 *Une fonction de deux variables à valeurs réelles admettant en tout point une dérivée directionnelle dans toutes les directions est-elle continue?*

Exercice 9 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application dérivable de I dans $\mathbb{R}$ montrer que $f'(I)$ est un intervalle.*

Exercice 10 *Minimiser (avec soin) la fonction suivante sur $\mathbb{R}^2$:*

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2 - xy + 3x + 5y - 5.$$

Exercice 11 *Soit u et v dans $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $L \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, étudier la continuité et la différentiabilité de l'application f définie pour $t \in \mathbb{R}$ par:*

$$f(t) = \int_{u(t)}^{v(t)} L(t,s)ds$$

Exercice 12 *Soit f dérivable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ montrer qu'il existe $t \in [0, 2\pi]$ tel que:*

$$\partial_1 f(\cos(t), \sin(t)) \sin(t) = \partial_2 f(\cos(t), \sin(t)) \cos(t)$$

Exercice 13 *Soit A un ensemble non vide et f une fonction de A dans $\mathbb{R}$ minorée. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $a_\varepsilon \in A$ tel que $f(a_\varepsilon) \leq \inf_A f + \varepsilon$. (Indication: cet exercice est trivial...).*

Exercice 14 *Soit $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$ un polynôme à coefficients réels, on suppose $P(t) \geq 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$. On définit aussi $S(t) := \sum_{k=0}^{N} P^{(k)}(t)$.*

1. *Montrer que l'inf de S sur $\mathbb{R}$ est atteint en au moins un $t_0 \in \mathbb{R}$.*
2. *Comparer $S(t_0)$ et $P(t_0)$ et en déduire que $S(t) \geq 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$.*

Exercice 15 *Soit Ω un ouvert convexe borné de $\mathbb{R}^n$, $f \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ convexe vérifiant: $f = 0$ sur $\partial\Omega$. Montrer que $f \leq 0$ sur $\bar{\Omega}$. Montrer que si on suppose en outre f strictement convexe sur $\bar{\Omega}$ alors $f < 0$ sur Ω.*

Topologie

Exercice 16 *Sur $\mathbb{R}^2$, dire si l'application suivante définit une distance:*

$$f(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|^3.$$

Exercice 17 *On se place ici dans $\mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne, déterminer avec soin si les ensembles suivants sont bornés, ouverts, fermés puis déterminer, leur intérieur, leur adhérence et leur frontière:*

$$A := \{(x, x^2)\ x \in \mathbb{R}\},\ B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x^3 + y^2 \geq 1\},\ C = \mathbb{Z}^2$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x \geq 0, y > 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\},\ E = \{(x, x\sin(\frac{1}{x})),\ x > 0\}.$$

Exercice 18 *Soit* $E := [0,1]^{\mathbb{N}}$ *pour* $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, on pose:*

$$d(x,y) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$$

1. *Montrer que* d *est correctement définie puis que* (E,d) *est un espace métrique,*
2. *Montrer que* (E,d) *est complet.*
3. *Montrer que* (E,d) *est compact.*

Exercice 19 *Soit* (E_1,d_1)*,* (E_2,d_2) *deux espaces métriques et* f *continue de* (E_1,d_1) *dans* (E_2,d_2)*.*

1. *Si* (E_1,d_1) *est compact, montrer que* $f(F)$ *est fermé pour tout fermé* F *de* (E_1,d_1)*.*
2. *Le résultat précédent est-il vrai si on ne suppose plus* (E_1,d_1) *compact?*

Exercice 20 *Soit* (E_1,d_1)*,* (E_2,d_2) *deux espaces métriques avec* (E_1,d_1) *compact et* f *continue et bijective de* (E_1,d_1) *dans* (E_2,d_2)*. Montrer que* f^{-1} *est continue de* (E_2,d_2) *dans* (E_1,d_1)

Exercice 21 *Déterminer si les fonctions suivantes définies sur* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *sont continues, uniformément continues, Lipschitziennes*

$$f(x) = \sqrt{|x|},\ g(x) = x^2,\ h(x) = \sqrt{1+x^2},\ i(x) = \max(0, |x| - 2).$$

Exercice 22 *On note ici simplement* d *la distance euclidienne sur* $\mathbb{R}^n$*. Soit* f *une application contractante (pour* d*) de* $\mathbb{R}^n$ *dans lui-même et* $g(x) := x + f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n$*. Montrer que* g *est bijective.*

Exercice 23 *Montrer qu'il existe une unique fonction continue* f *sur* $[0,1]$ *vérifiant pour tout* $x \in [0,1]$*:*

$$f(x) = \sup_{y\in[0,1]} (\cos(x^2 - y^{12}) + \frac{1}{2} f(y))$$

Exercice 24 *Parmi les ensembles suivants, lesquels sont connexes (à justifier):*

$$A = \{0\} \cup [1,2],\ B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\},\ C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \neq 1\}$$
$$D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \neq 1\},\ E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x + y + z \leq 1\}.$$

Exercice 25 *$E = C^0([0,1],\mathbb{R})$, montrer que pour $f \in E$ on a:*

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$$

Les normes $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_1$ sont elles équivalentes?

Exercice 26 *On considère la suite de fonction:*

$$f_n(t) := \min(n, \frac{1}{\sqrt{t}}), t \in [0,1], n \in \mathbb{N}.$$

1. *Calculer $\|f_p - f_q\|_1$ pour $p > q$.*
2. *Montrer que (f_n) est de Cauchy dans $C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|.\|_1$.*
3. *(f_n) converge-t-elle dans $C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|.\|_1$? Conclure.*

Exercice 27 *Soit E l'espace des fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$ nulle en 0. Pour $u \in E$ on pose:*

$$N(u) := \left(\int_0^1 (u^2(t) + \dot{u}^2(t))dt\right)^{1/2}, \ M(u) := \left(\int_0^1 \dot{u}^2(t)dt\right)^{1/2}$$

1. *Montrer que N et M sont des normes sur E.*
2. *Soit $u \in E$ et $t \in [0,1]$, montrer que*

$$|u(t)| \leq \sqrt{t} M(u).$$

3. *En déduire que M et N sont équivalentes.*

Exercice 28 *Soit (E, N) un evn et F un sev de dimension finie de E. Montrer que F est fermé.*

Exercice 29 *Soit $p > 1$ et:*

$$l^p := \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ tq \ \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < +\infty\}.$$

1. *Montrer que E est un espace vectoriel.*
2. *Montrer que*

$$\|x\|_p := \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$$

   définit une norme sur l^p.

3. *Montrer que $(l^p, \|.\|_p)$ est un espace de Banach.*

Exercice 30 *Soit $E, F,$ et G 3 evn soit $u \in L_c(E,F)$ et $v \in L_c(F,G)$. Montrer que $v \circ u \in L_c(E,G)$ et*

$$\|v \circ u\|_{L_c(E,G)} \leq \|u\|_{L_c(E,F)} \|v\|_{L_c(F,G)}.$$

Exercice 31 *Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux evn et $u \in L_c(E,F)$, montrer que:*

$$\|u\|_{L_c(E,F)} = \inf\{\alpha > 0 \ tq \ \|u(x)\|_F \leq \alpha \|x\|_E \ \forall x \in E\}.$$

Exercice 32 *Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{R}$-evn et f une forme linéaire sur E montrer que $f \in E'$ ssi $\ker(f)$ est fermé.*

Exercice 33 *Soit E un Banach, $u \in L_c(E)$ avec $\|u\|_{L_c(E)} < 1$ montrer que $(\sum_n (-1)^n u^n)$ converge dans $L_c(E)$ vers une limite v. Calculer $(I+u) \circ v$ et conclure.*

Exercice 34 *Soit (E_i, N_i) $i = 1,2,3$, 3 evn et a une application bilinéaire de $E_1 \times E_2$ dans E_3 montrer que a est continue ssi il existe $C > 0$ tel que:*

$$N_3(a(x_1, x_2)) \leq C N_1(x_1) N_2(x_2), \ \forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2.$$

Généraliser.

Exercice 35 *On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne usuelle. Soit $C := (\mathbb{R}_+)^n$.*

1. *Montrer que C est convexe et fermé, rappeler la caractérisation variationnelle de la projection p_C sur C.*
2. *Montrer que $p_C(x) = (x_1^+, ..., x_n^+)$ ($t^+ := \max(t,0)$ partie positive).*

Exercice 36 *Soit $(H, < .,. >)$ un espace de Hilbert et B la boule unité fermée de H.*

1. *Définir la projection sur B.*
2. *Montrer que $p_B(x) = x$ si $x \in B$ et $p_B(x) = \frac{x}{\|x\|}$ sinon.*

Exercice 37 *Soit $(H, < .,. >)$ un espace de Hilbert et C un convexe fermé de H. On définit la fonction d'appui de C par:*

$$\sigma_C(x) := \sup\{< p, x > \ \ p \in C\} \ \forall x \in H.$$

Montrer que

$$C = \{p \in H \ tq \ < p, x > \leq \sigma_C(x), \ \forall x \in H\}.$$

En déduire que C est une intersection de demi-espaces fermés.

Exercice 38 *Dans tout cet exercice, on identifiera implicitement* $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ *à l'espace des matrices* $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ *ie on identifiera* $u \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ *à sa matrice dans les bases canoniques de* $\mathbb{R}^m$ *et* $\mathbb{R}^n$. *Soit* m *et* n *deux entiers avec* $n > m$, $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ *une matrice de rang* m. *On définit le sev de* $\mathbb{R}^n$, $F := \mathrm{Im}(A)$. *On cherche à caractériser la projection orthogonale* p_F.

1. *Montrer que pour* $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *on a:* $< x, Ay >_{\mathbb{R}^n} = < A'x, y >_{\mathbb{R}^m}$.
2. *Montrer que* $A'A$ *est inversible.*
3. *Montrer que* $F^\perp = \ker(A')$ *et* $\ker(A)^\perp = \mathrm{Im}(A')$.
4. *Montrer que* $p_F(x) = A(A'A)^{-1}A'x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 39 *Pour tout* $(A, B) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$ *on pose:*

$$< A, B > := \mathrm{tr}(AB')$$

1. *Exprimer* $< A, B >$ *en fonction des coefficients des matrices* A *et* B.
2. *Montrer que* $< ., . >$ *est un produit scalaire sur* $M_n(\mathbb{R})$.
3. *Montrer que* $(M_n(\mathbb{R}), < ., . >)$ *est un espace de Hilbert.*
4. *Définir la norme et la distance associées au produit scalaire* $< ., . >$.
5. *Soit* F *le sous ensemble de* $M_n(\mathbb{R})$ *constitué par les matrices de trace nulle. Montrer que* F *est un s.e.v. fermé de* $M_n(\mathbb{R})$.
6. *Définir et caractériser la projection* p_F *sur* F.
7. *Soit* $A \in M_n(\mathbb{R})$, *montrer que:*

$$p_F(A) = A - \mathrm{tr}(A)\frac{I_n}{n}$$

(où I_n *désigne la matrice identité de* $M_n(\mathbb{R})$*).*

Exercice 40 *Soit* $(H, < ., . >)$ *un espace de Hilbert et* $g : H \to H$ *(non supposée linéaire!) tel qu'il existe* $\alpha > 0$ *et* $M > 0$ *vérifiant pour tout* $(x, y) \in H^2$

$$< g(x) - g(y), x - y > \geq \alpha \|x - y\|^2, \ \|g(x) - g(y)\| \leq M\|x - y\|.$$

Soit $y_0 \in H$ *et* $\rho > 0$, *on définit alors pour* $x \in H$

$$T_\rho(x) := x - \rho(g(x) - y_0).$$

1. *Montrer que pour* $(x_1, x_2) \in H^2$ *on a:*

$$\|T_\rho(x_1) - T_\rho(x_2)\|^2 \leq (1 + M^2\rho^2 - 2\alpha\rho)\|x_1 - x_2\|^2$$

en déduire que pour $\rho > 0$ *bien choisi* T_ρ *est une contraction de* H.

2. *Montrer que* g *est une bijection de* H.
3. *Montrer que l'inverse de* g *est lipschitzienne.*

Calcul différentiel

Exercice 41 *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans un evn E, et $x \in \mathbb{R}$ montrer que f est Gâteaux- différentiable en x ssi f est (Fréchet-) différentiable en x.*

Exercice 42 *Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux $\mathbb{R}$-evn, Ω un ouvert de E, f une application définie sur Ω à valeurs dans F et $(x, h) \in \Omega \times E$. Montrer que si f est dérivable à droite en x dans la direction h, alors pour tout $\lambda > 0$, f est dérivable à droite en x dans la direction λh et:*

$$D^+ f(x; \lambda h) = \lambda D^+ f(x; h)$$

Montrer par un contre-exemple que la conclusion précédente ne tient pas pour $\lambda < 0$.

Exercice 43 *Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux $\mathbb{R}$-evn, Ω un ouvert de E, f une application définie sur Ω à valeurs dans F et $(x, h) \in \Omega \times E$. Montrer que si f est dérivable en x dans la direction h, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, f est dérivable à droite en x dans la direction λh et:*

$$Df(x; \lambda h) = \lambda Df(x; h).$$

Exercice 44 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \\ \frac{x^3}{x^2+|y|} & sinon \end{cases}$$

Montrer que $Df((0,0); (h,k))$ existe pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ mais que f n'est pas Gâteaux-dérivable en $(0,0)$.

Exercice 45 *Montrer que la fonction définie par*

$$f(t) = \begin{cases} t^3 \sin(t^{-1}) & si \quad t \neq 0 \\ 0 & si \quad t = 0 \end{cases}$$

admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 mais n'est pas deux fois différentiable en 0, commenter.

Exercice 46 *Etudier la différentiabilité de l'application suivante:*

$$f(x_1, ..., x_n) := \max(x_1, ..., x_n).$$

Exercice 47 *Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ et $f(A) := A^3$ pour tout $A \in E$, étudier la différentiabilité de f.*

Exercice 48 *Soit* (E_i, N_i) $i = 1, 2, 3$, *3 evn et a une application bilinéaire continue de* $E_1 \times E_2$ *dans* E_3 *montrer que a est différentiable et calculer sa dérivée.*

Exercice 49 *Soit* N *une norme quelconque sur* $\mathbb{R}^n$, *et* $E := M_n(\mathbb{R})$ *muni de la norme:*

$$\|A\| := \sup\{N(A.X) \,:\, X \in \mathbb{R}^n,\ N(X) \leq 1\}$$

et notons G_n *l'ensemble des éléments inversibles de* E.

1. *Montrer que* G_n *est ouvert dans* E.
2. *Montrer que* G_n *est dense dans* E.
3. *Montrer que l'application* $A \mapsto A^{-1}$ *est différentiable sur* G_n *et calculer sa dérivée (indication: allez jeter un coup d'oeil à l'exercice 33 et sa correction).*

Exercice 50 *On se propose de trouver toutes les fonctions* $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ *vérifiant:*

$$\partial_x f = \partial_y f.$$

1. *Montrer que si* f *est solution de cette équation alors* f *est constante sur les droites dirigées par* $(1, -1)$.
2. *Résoudre l'équation.*

Exercice 51 *Trouver toutes les fonctions* $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ *vérifiant:*

$$\partial^2_{xy} f = 0$$

puis toutes les fonctions $g \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ *vérifiant:*

$$\partial^2_{xx} g = \partial^2_{yy} g$$

(on pourra penser au changement de variables $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)/2$*).*

Exercice 52 *Soit* Ω *un ouvert convexe de* $\mathbb{R}^n$, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ *et* $k \in \mathbb{R}_+$, *montrer que* f *est k-lipschitzienne sur* Ω *ssi* $\|f'(x)\|_{E'} \leq k$ *pour tout* $x \in \Omega$.

Exercice 53 *Montrer que pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *on a:*

$$|\sin(y) - \sin(x) - \cos(x)(y - x)| \leq |y - x|^2$$

Exercice 54 *Soit* $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *telle que* $f(0) = 0$, $\nabla f(0) = 0$, *montrer en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, qu'il existe des fonctions* $g_{ij} \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *telles que* $g_{ij} = g_{ji}$, $g_{ij}(0) = \partial^2_{ij} f(0)/2$ *et:*

$$f(x) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} g_{ij}(x) x_i x_j \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

Exercice 55 *Soit $a < b$ deux réels, $f \in C^2(]a,b[,\mathbb{R}^n)$ on suppose qu'il existe α et β positifs tels que*

$$\|f(t)\| \leq \alpha \text{ et } \|f''(t)\| \leq \beta \text{ pour tout } t \in]a,b[.$$

Soit $t \in]a,b[$ et $r > 0$ tels que $]t-r, t+r[\subset]a,b[$ montrer que

$$\|f'(t)\| \leq \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta r}{2}$$

Exercice 56 *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ et $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^p)$ tel que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$, montrer que f est constante sur Ω. Et si Ω n'est plus supposé connexe?*

Exercice 57 *Soit $f = (f_1, f_2, f_3)$ l'application de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par:*

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) & = & e^{2y} + e^{2z} \\ f_2(x,y,z) & = & e^{2x} - e^{2z} \\ f_3(x,y,z) & = & x - y. \end{cases}$$

Déterminer $f(\mathbb{R}^3)$ et montrer que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $f(\mathbb{R}^3)$.

Exercice 58 *Soit $f \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ avec $g = 0$ en dehors de la boule $\bar{B}(0,r)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on définit:*

$$(f \star g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy.$$

Montrer que $f \star g$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ et calculer toutes ses dérivées.

Exercice 59 *Soit $E := C^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme et $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ pour $x \in E$ on définit la fonction $N_f(x)$ par:*

$$N_f(x)(t) := f(t, x(t)) \text{ pour tout } t \in [0,1].$$

Etudier la continuité puis la différentiablité de N_f sur E.

Exercice 60 *Soit E et F deux $\mathbb{R}$-evn de dimension finie et $f \in C^1(E,F)$ telle que f' est bornée sur E et qu'il existe $k > 0$ tel que f' est k-Lipschitzienne (de E dans $L_c(E,F)$). Montrer qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$ tq:*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq a\|x-y\| + b\|x-y\|^2, \ \forall (x,y) \in E^2.$$

Exercice 61 *Soit $(E, (.,.))$ un espace de Hilbert et $f \in C^1(E,E)$ telle qu'il existe $a > 0$ tel que:*

$$(f'(x)(h), h) \geq \alpha (h,h) \ \forall (x,h) \in E^2.$$

1. *Montrer que pour tout* $(a,b) \in E^2$*, on a:*

$$(f(b) - f(a), b - a) \geq \alpha(b - a, b - a)$$

(on pourra appliquer la FAF à $t \mapsto (f(a + t(b - a)), b - a)$*.)*

2. *En déduire que* f *est injective.*

Exercice 62 *Montrer que si* f *est un* C^1 *difféomorphisme de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}^p$ *alors pour tout* $a \in \mathbb{R}^n$*,* $f'(a)$ *est inversible et* $[f'(a)]^{-1} = (f^{-1})'(f(a))$ *puis que* $n = p$*.*

Exercice 63 *Soit* $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$*, soit* $a = (x_0, y_0)$ *tel que* $f(a) = 0$*,* $\partial_2 f(a) \neq 0$*,* $M := f^{-1}(\{0\})$ *et soit* $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $f'(a)(h) = 0$*.*

1. *Montrer qu'il existe* $\varepsilon > 0$ *et* $\sigma \in C^1([-\varepsilon, \varepsilon], \mathbb{R}^2)$ *tel que:*

$$\sigma(0) = a,\ \dot{\sigma}(0) = h,\ \sigma(t) \in M,\ \forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon].$$

2. *Soit* $g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$*, on suppose que* a *est un extremum local de* g *sur* M*, montrer alors que* $f'(a)$ *et* $g'(a)$ *sont colinéaires.*

3. *Le résultat précédent reste-t-il vrai si on ne suppose pas* $\partial_2 f(a) \neq 0$*?*

Exercice 64 *Soit* $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *montrer que pour* $M > 0$ *assez grand il existe deux voisinages ouverts* U *et* V *de* 0 *tels que* $f + M\mathrm{id}$ *soit un* C^1*-difféomorphisme de* U *dans* V*.*

Exercice 65 *Pour tout* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$*, on définit:*

$$F(x, y, z) := (y + x^4 z + y z^5 + z, x + x^2 y^2 - y z^5 - z)$$

on définit aussi $M := F^{-1}(\{(0,0)\})$*.*

1. *Montrer qu'il existe des intervalles ouverts contenant* 0*,* U_1*,* U_2 U_3*, des fonctions* $f \in C^1(U_3, U_1)$ *et* $g \in C^1(U_3, U_2)$ *tels que*

$$M \cap (U_1 \times U_2 \times U_3) = \{(f(z), g(z), z), z \in U_3\}.$$

2. *Calculer* $f(0)$*,* $g(0)$*,* $f'(0)$ *et* $g'(0)$*.*

Exercice 66 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$*,* $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$*,* $a \in \Omega$ *et* $L := f'(a)$*. On suppose aussi qu'il existe deux suites* $(x_k)_k$ *et* $(y_k)_k$ *à valeurs dans* Ω *telles que*

$$x_k \neq y_k,\ f(x_k) = f(y_k), \forall k \text{ et } \lim_k x_k = \lim_k y_k = a.$$

Montrer que le rang de L *est inférieur à* $n - 1$*.*

Exercice 67 *Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ convexe et $g_\varepsilon(x) = \varepsilon x + \nabla f(x)$ pour tout $x \in \Omega$. Montrer que pour tout $x \in \Omega$, il existe des voisinages ouverts U_ε et V_ε de x et $g_\varepsilon(x)$ tels que la double restriction de g_ε à U_ε et V_ε soit un C^1 difféomorphisme. Le résultat subsiste-t-il si $\varepsilon = 0$?*

Exercice 68 *Soit E, F et G trois espaces de Banach, U un ouvert de E, V un ouvert de F et $f \in C^1(U \times V, G)$. Soit $(x_0, y_0) \in U \times V$ et $z_0 := f(x_0, y_0)$ montrer que si $\partial_2 f(x_0, y_0)$ est inversible, alors il existe $U_0 \subset U$, $V_0 \subset V$ et W_0 respectivement voisinages ouverts de x_0, y_0 et z_0 dans E, F et G et $g \in C^1(U_0 \times W_0, V_0)$ tels que $g(x_0, z_0) = y_0$ et :*

$$\{(x, y, z) \in U_0 \times V_0 \times W_0 \, : \, z = f(x, y)\} = \{(x, g(x, z), z) \, : \, (x, z) \in U_0 \times W_0\}.$$

Exercice 69 *Soit E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E contenant 0 et $A \in C^1(U, L_c(E, F))$. Pour tout $x \in U$ on définit $B(x) := A(x)(x) \in F$. Montrer que si $A(0)$ est inversible, alors il existe un voisinage ouvert V de 0 dans E et un voisinage ouvert W de 0 dans F tels que (la restriction de) B soit un C^1-difféomorphisme de V sur W.*

Exercice 70 *Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^{n+p})$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0)$ est injective. Montrer qu'il existe U et V des voisinages ouverts de 0 dans $\mathbb{R}^{n+p}$, Ψ un C^1-difféomorphisme de U sur V et Ω_0 un voisinage ouvert de 0 dans Ω tels que:*

$$\Psi(f(x_1, ..., x_n)) = (x_1, ..., x_n, 0, ..., 0) \text{ pour tout } x \in \Omega_0.$$

Exercice 71 *Soit E un espace de Banach et $u \in L_c(E)$ on définit alors*

$$\exp(u) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} \ (u^k = u \circ ... \circ u \ k \text{ fois}).$$

1. *Montrer que pour tout $u \in L_c(E)$, $\exp(u)$ est un élément bien défini de $L_c(E)$.*

2. *Montrer que pour tout n, l'application $u \mapsto u^n$ est de classe C^1 sur $L_c(E)$ et calculer sa dérivée.*

3. *Montrer que l'application $u \mapsto \exp(u)$ est de classe C^1 sur $L_c(E)$ et calculer sa dérivée.*

4. *Montrer que $u \mapsto \exp(u)$ réalise un C^1 difféomorphisme d'un voisinage ouvert de 0 sur un voisinage ouvert de id.*

Optimisation

Exercice 72 *Soit* (E, d) *un espace métrique et* $f_1, ..., f_n$ *des fonctions s.c.i de* E *dans* $\mathbb{R}$*, montrer que* $\max(f_1, ..., f_n)$ *est s.c.i.*

Exercice 73 *Soit* (E, d) *un espace métrique et* f *une fonctions définie sur* E *à valeurs dans* $\mathbb{R}$*, montrer que* f *est continue ssi* f *et* $-f$ *sont s.c.i..*

Exercice 74 *Parmi les fonctions suivantes dire lesquelles sont s.c.i sur* $\mathbb{R}^2$ *(justifier):*

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & si \quad x = y \\ x^2 + y^2 & sinon \end{cases}$$

$$g(x,y) = -f(x,y),\ h(x,y) = \begin{cases} 1 & si \quad (x,y) = (0,0) \\ -1 & sinon \end{cases}$$

$$k(x,y) = \begin{cases} 0 & si \quad x^2 = y^2 \\ x^2 - 2y^2 & sinon \end{cases}$$

Exercice 75 *Déterminer si le problème suivant possède des solutions:*

$$\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) := (x^2 - y^2)^2 - x^2 - y.$$

Même question pour:

$$\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ 0\le y\le |x|/2} f(x,y).$$

Exercice 76 *Déterminer si le problème suivant possède des solutions:*

$$\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) := x^2 - xy$$

dans les cas suivants: i) $E = \mathbb{R}^2$*, ii)* $E := \mathbb{R}\times[0,1]$*, iii)* $E = [0,1]\times\mathbb{R}$*, iv)* $E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ 4y^2 - x^2 \le 0\}$.

Exercice 77 *Soit* $\gamma \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ *périodique et* $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$*. Montrer qu'il existe* $t \in \mathbb{R}$ *tel que* $\nabla f(\gamma(t))$ *et* $\gamma'(t)$ *sont orthogonaux.*

Exercice 78 *Montrer que les ellipses d'aire maximale et de longueur prescrite sont des disques.*

Exercice 79 *Soit* $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *telle que:*

$$\frac{f(x)}{\|x\|} \to +\infty \text{ quand } \|x\| \to +\infty$$

montrer que ∇f *est surjective.*

Exercice 80 *Soit* $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *convexe,* C *un convexe de* $\mathbb{R}^n$ *et* $x_0 \in C$*, montrer les équivalences entre:*

$$f(x_0) \leq f(x) \ \forall x \in C$$

et

$$\nabla f(x_0).(x - x_0) \geq 0 \ \forall x \in C.$$

Exercice 81 *Soit* $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *telle qu'il existe* $a > 0$ *et* $b > 0$ *tels que pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$*, on ait:*

$$f(y) - f(x) - \nabla f(x)(y - x) \geq a\|x - y\|^2$$

et

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq b\|x - y\|.$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$*, on définit par récurrence* $x_{k+1} = x_k - \rho \nabla f(x_k)$ *pour* $k \geq 0$*, avec* ρ *un paramètre* > 0*.*

1. *Montrer que* f *atteint son minimum en un unique* $x^* \in \mathbb{R}^n$*.*

2. *Montrer que*

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 \leq (1 - 2\rho a + \rho^2 b^2)\|x_k - x^*\|^2$$

3. *Montrer que* x_k *converge vers* x^* *pour tout* $\rho \in]0, 2a/b^2[$*. Quel vous semble être un choix optimal de* ρ*.*

Exercice 82 *Soit* A *une matrice carrée de taille* n *symétrique semi-définie positive, montrer que la trace et le déterminant de* A *sont positifs.*

Exercice 83 *On munit* $\mathbb{R}^n$ *de sa structure hilbertienne usuelle. Soit* A *une matrice carrée de taille* n *symétrique définie positive, montrer qu'il existe* $\alpha > 0$ *tel que pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$ *on a:*

$$< x, Ax > \geq \alpha\|x\|^2.$$

Exercice 84 *Soit* $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *et* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $\nabla f(x_0) = 0$ *et* $D^2 f(x_0)$ *est définie positive. Montrer que* x_0 *est un minimum local strict de* f*.*

Exercice 85 *Soit* $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *strictement convexe. Montrer que:*

1. ∇f *est injective,*

2. ∇f *est surjective si en plus, on suppose*

$$\lim_{\|x\| \to \infty} f(x)/\|x\| = \infty.$$

Exercice 86 *Soit* Ω *un ouvert convexe borné de* $\mathbb{R}^n$*,* $f \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ *vérifiant:*

$$\Delta f = 1 \text{ sur } \Omega \text{ et } f = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

(on rappelle que $\Delta f := \sum_{i=1}^n \partial_{ii}^2 f = \mathrm{tr}(D^2 f)$ *désigne le laplacien de* f*). Montrer que* $f \leq 0$ *sur* $\bar{\Omega}$ *(indication: considérer un point de maximum de* f *et montrer qu'il appartient nécessairement à* $\partial\Omega$*).*

Exercice 87 *Résoudre avec soin le programme:*

$$\inf\{x^4 + y^4 + z^4 \text{ sous la contrainte : } x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Exercice 88 *On s'intéresse au problème:*

$$\inf\{\frac{1}{2}(x-2)^4 + y^2 \ : \ x^2 - y^2 \leq 0\}$$

1. *Montrer que ce problème possède au moins une solution.*
2. *Montrer que si* (x, y) *est solution alors* $x^2 = y^2$*.*
3. *Résoudre le problème.*

Exercice 89 *Résoudre avec soin le programme:*

$$\sup\{\sqrt{xyz} \text{ sous les contraintes : } (x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3,\ x + y + z = 1\}.$$

Exercice 90 *Soit* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *(muni de le norme euclidienne usuelle), résoudre:*

$$\inf_{x \in \mathbb{R}_+^n} \|x - x_0\|.$$

Exercice 91 *Résoudre avec soin le programme:*

$$\inf\{x^3 - y^3 \text{ sous la contrainte : } x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Exercice 92 *Résoudre avec soin le programme:*

$$\inf\{(\exp(\sum_{i=1}^n x_i^2) + \sum_{i=1}^n x_i) \text{ sous les contraintes : } x_i^2 \leq 1\}.$$

Exercice 93 *Résoudre avec soin le programme:*

$$\inf \sum_{i=1}^n x_i \text{ sous la contrainte : } \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1.$$

Exercice 94 *Résoudre avec soin le programme:*

$$\min \sum_{i=1}^n x_i^2 \text{ sous les contraintes : } x_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^n x_i = 1.$$

Exercice 95 *Résoudre avec soin le programme:*

$\inf x^2+3y^2+2z^2+5x-y+z$ *sous les contraintes :* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3_+$, $x+2y+z=1$.

Exercice 96 *Résoudre avec soin le programme:*

$$\inf x^2+y^2+x+y \text{ sous la contrainte : } 2x^2+y^2 \leq 1.$$

Exercice 97 *Soit* f *et* g *dans* $C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *avec* g *convexe sur* $\mathbb{R}^n$ *et* f *strictement convexe et coercive sur* $\mathbb{R}^n$, *on suppose en plus que l'ensemble* $C := \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\}$ *est non vide et on s'intéresse au problème (contraint):*

$$\inf_{x \in C} f(x). \tag{1}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, *on pose:*

$$h(x) := (g(x)_+)^2 = \max(g(x), 0)^2$$

et pour $p \in \mathbb{N}^*$, *on considère le problème* <u>*pénalisé*</u> *(non contraint):*

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + ph(x). \tag{2}$$

1. *Expliquer pourquoi intuitivement (2) est une approximation raisonnable de (1) quand* p *est grand.*
2. *Montrer que (1) admet une unique solution* $x^* \in C$.
3. *Montrer que* h *est convexe.*
4. *Montrer que* h *est de classe* C^1 *et calculer sa dérivée.*
5. *Montrer que pour tout* p, *(2) admet une unique solution* $x_p \in \mathbb{R}^n$.
6. *Montrer que* x_p *est bornée et que* $h(x_p)$ *tend vers* 0.
7. *Montrer que* x_p *converge vers* x^*.
8. *Donner la condition d'optimalité caractérisant* x_p.
9. *On suppose que la contrainte est qualifiée en* x^*. *Rappeler ce que cela signifie, puis, en utilisant ce qui précède (et pas KKT) montrer qu'il existe* $\mu \geq 0$ *tel que:*

$$\nabla f(x^*) + \mu \nabla g(x^*) = 0 \text{ et } \mu g(x^*) = 0.$$

Exercice 98 *La théorie microéconomique du consommateur suppose qu'un agent avec un budget $B > 0$, étant donnés des prix (strictement positifs) $p_1, ..., p_n$ des différents biens de consommation, choisit son panier de consommation en résolvant*

$$\sup U(c_1, ..., c_n) \, : \, c_i \geq 0 \text{ et } \textstyle\sum_{i=1}^n p_i c_i = B. \tag{3}$$

Avec U sa fonction d'utilité. Lorsque U est une fonction d'utilité Cobb-Douglas:

$$U(c_1, ..., c_n) = c_1^{\alpha_1} ... c_n^{\alpha_n}$$

avec $\alpha_i \geq 0$ et $\sum \alpha_i \leq 1$. Résoudre rigoureusement (3).

Exercice 99 *Même question que précédemment pour*

$$U(c_1, ..., c_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i^{\beta_i}$$

avec $\alpha_i > 0$ et β_i dans $]0, 1[$, pour $i = 1, ..., n$.

Exercice 100 *Même question que précédemment pour*

$$U(c_1, ..., c_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i^{\rho} \right)^{1/\rho}$$

avec $\rho \in]0, 1[$.

Exercice 101 *Soit f_1 et f_2 deux fonctions convexes continues sur $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on définit $F(x) := (f_1(x), f_2(x))$. On dit alors que $x^* \in \mathbb{R}^n$ est Pareto-efficace (pour F) s'il n'existe aucun $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $f_1(x) \leq f_1(x^*)$, $f_2(x) \leq f_2(x^*)$ avec une inégalité stricte au moins. On définit en outre:*

$$\begin{aligned} C :=& F(\mathbb{R}^n) + \mathbb{R}_+^2 \setminus \{0, 0\} \\ =& \{(f_1(x) + \alpha_1, f_2(x) + \alpha_2) \, : \, x \in \mathbb{R}^n, \, \alpha_1 \geq 0, \, \alpha_2 \geq 0, \, (\alpha_1, \alpha_2) \neq \{0, 0\}\} \end{aligned}$$

et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$C_p := F(\overline{B}(0, p)) + [1/p, +\infty[^2.$$

1. *Montrer que $x^* \in \mathbb{R}^n$ est Pareto-efficace ssi $F(x^*) \notin C$.*
2. *Montrer que $C_p \subset C$ et que C_p est un convexe fermé de $\mathbb{R}^2$.*
3. *Montrer que si x^* est Pareto-efficace, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ il existe $(a_p, b_b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a_p^2 + b_p^2 = 1$, $a_p \geq 0$, $b_p \geq 0$ et:*

   $a_p f_1(x^*) + b_p f_2(x^*) \leq a_p f_1(x) + b_p f_2(x) + (a_p + b_p)/p$ *pour tout* $x \in \overline{B}(0, p)$.

4. *Montrer que si x^* est Pareto-efficace, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ $a \geq 0$, $b \geq 0$, $(a,b) \neq (0,0)$ tels que x^* résout*

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} a f_1(x) + b f_2(x).$$

Exercice 102 *Soit f et g dans $C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ on s'intéresse au problème:*

$$V(\alpha) := \inf\{f(x) \,:\, g(x) = \alpha\}$$

On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\alpha \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, le problème précédent admet une unique solution x_α on suppose en outre que:

$$g'(x_0) \neq 0 \text{ et que } \alpha \mapsto x_\alpha \text{ est différentiable en } 0.$$

1. *Montrer qu'il existe un unique $\mu_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x_0) = \mu_0 g'(x_0)$.*

2. *Montrer que V est différentiable en 0 et que $V'(x_0) = \mu_0$.*