L3, MIDO
Calcul Différentiel et Optimisation : Corrigé
Partiel de novembre 2010

Exercice 1. *Soit $E := C^1([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions dérivables sur $[0,1]$ et dont la dérivée est continue sur $[0,1]$, pour $f \in E$ on pose*

$$\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

1. *Montrer que $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach (vous pourrez utiliser sans le redémontrer tout résultat vu en cours).*

   Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy de $(E, \|.\|)$ alors il est immédiat que les suites $(f_n)_n$ et $(f'_n)_n$ sont de Cauchy dans $(C^0([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$, qui est complet d'après un résultat vu en cours de sorte qu'il existe f et g continues sur $[0,1]$ telles que $\|f_n - f\|_\infty + \|f'_n - g\|_\infty$ tend vers 0, si l'on montre que $g = f'$ nous aurons ainsi $\|f_n - f\| \to 0$ ce qui établira le résultat voulu. On note que pour tout n et tout $t \in [0,1]$, on a

   $$f_n(t) = f_n(0) + \int_0^t f'_n(s)ds \tag{1}$$

   or par convergence uniforme de f_n vers f on a $f_n(0) \to f(0)$ quant au terme intégral on a

   $$\Big|\int_0^t (f'_n - g)\Big| \le \int_0^1 |f'_n - g| \le \|f'_n - g\|_\infty \to 0$$

   et donc en particulier pour tout $t \in [0,1]$ on a $\int_0^t f'_n(s)ds \to \int_0^t g(s)ds$ si bien qu'en faisant $n \to \infty$ dans (1), il vient

   $$f(t) = f(0) + \int_0^t g(s)ds$$

   on a donc bien $f' = g$, ce qui achève de montrer que $(E, \|.\|)$ est de Banach.

2. *Montrer que N et M définies par:*

   $$N(f) := |f(0)| + \|f'\|_\infty,\ M(f) := \int_0^1 |f| + \|f'\|_\infty,\ \forall f \in E$$

   sont des normes sur E et qu'elles sont équivalentes à $\|.\|$.

Le fait que M et N soient des normes est élémentaire de même que les inégalités $M \leq \|.\|$ et $N \leq \|.\|$. Soit $f \in E$ et $t \in [0,1]$, on a

$$|f(t)| \leq |f(0)| + \int_0^t |f'| \leq |f(0)| + \|f'\|_\infty = N(f)$$

en passant au sup sur $t \in [0,1]$, il vient $\|f\|_\infty \leq N(f)$ et donc aussi $\|f\| \leq 2N(f)$. Il s'agit enfin de majorer $\|.\|$ par un multiple de $\|.\|$, pour ce faire, on utilise a nouveau le fait que si $f \in E$ et $(s,t) \in [0,1]^2$, on a :

$$|f(t)| \leq |f(s)| + \int_0^1 |f'| \leq |f(s)| + \|f'\|_\infty$$

et en intégrant le membre de gauche par rapport à s on en déduit que $|f(t)| \leq M(f)$ pour tout $t \in [0,1]$ i.e. $\|f\|_\infty \leq M(f)$ et donc $\|f\| \leq 2M(f)$.

Exercice 2. *Notons $\|.\|$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^d$, pour A partie non vide de $\mathbb{R}^d$ et $x \in \mathbb{R}^d$ on pose:*

$$d(x,A) := \inf_{y \in A} \|x-y\|$$

pour $\varepsilon > 0$ on pose $A_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^d \ : \ d(x,A) \leq \varepsilon\}$.

1. *Montrer que si A est fermé alors $A_\varepsilon = A + \overline{B}(0,\varepsilon)$ (on rappelle que si X et Y sont deux parties de $\mathbb{R}^d$, $X+Y = \{x+y, \ x \in X, \ y \in Y\}$.*

   Si $x \in A + \overline{B}(0,\varepsilon)$ alors il existe $a \in A$ et $h : \|h\| \leq \varepsilon$ tels que $x = a+h$ et donc $d(x,A) \leq \|x-a\| = \|h\| \leq \varepsilon$ de sorte que $x \in A_\varepsilon$. Réciproquement si $d(x,A) \leq \varepsilon$ alors pour tout $n > 0$, il existe $a_n \in A$ tel que $\|x - a_n\| \leq \varepsilon + 1/n$ autrement dit $x = a_n + h_n$ avec $\|h_n\| \leq \varepsilon + 1/n$, comme $(h_n)_n$ est bornée on peut en extraire une sous suite convergente encore notée $(h_n)_n$ et sa limite h vérifie évidemment $|h\| \leq \varepsilon$ i.e. $h \in \overline{B}(0,\varepsilon)$. Ainsi a_n converge et sa limite a appartient à A car A est fermé, on a donc $x = a + h \in A + \overline{B}(0,\varepsilon)$.

2. *Montrer que l'application $x \in \mathbb{R}^d \mapsto d(x,A)$ est 1-Lipschitzienne.*

   Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^d$ et $a \in A$, avec l'inégalité triangulaire, on a:

   $$\|x-a| \leq \|y-a\| + \|x-y\|$$

   prenant l'infimum en $a \in A$, il vient donc $d(x,A) \leq d(y,A) + \|x-y\|$, en intervertissant les rôles de x et y on a aussi $d(y,A) \leq d(x,A) + \|x-y\|$ et donc $|d(x,A) - d(y,A)| \leq \|x-y\|$ ce qui montre bien que $x \in \mathbb{R}^d \mapsto d(x,A)$ est 1-Lipschitzienne.

3. *Soit $x \in \mathbb{R}^d$, déterminer $d(x, \overline{B}(0,1))$.*

   Soit $x \in \mathbb{R}^d$, $d(x, \overline{B}(0,1)) = \|x - p_B(x)\|$ où $p_B(x)$ désigne la projection de x sur $B := \overline{B}(0,1)$, cette projection est facile à déterminer par le théorème de projection (cf .TD) : c est x si $x \in B$ et $x/\|x\|$ sinon (on attend de l'étudiantune justifiication de ce fait...) de sorte que $d(x, \overline{B}(0,1)) = 0$ si $x \in B$ et $d(x, \overline{B}(0,1)) = \|x - x/\|x\|\| = (\|x\| - 1)$ sinon.

4. *Montrer que $d(x, A) = 0$ si est seulement si $x \in \overline{A}$.*

   $x \in \overline{A}$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a_\varepsilon \in A$ tel que $\|x - a_\varepsilon| \leq \varepsilon$ et donc $d(x, A) \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ si bien que $d(x, A) = 0$. Réciproquement si $d(x, A) = 0$ pour tout n, il existe $a_n \in A$ tel que $\|x - a_n\| \leq 1/n$ de sorte que $x \in \overline{A}$ comme limite de la suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$.

5. *Montrer que si A est compact et $\varepsilon > 0$ alors A_ε est compact.*

   A_ε est fermé comme réciproque du fermé $[0, \varepsilon]$ par l'application $x \mapsto d(x, A)$ qui est continue en vertu du résultat de la question 2. Comme A est borné on a $A \subset \overline{B}_r$ pour un certain $r > 0$ et donc $A_\varepsilon \subset \overline{B}_{r+\varepsilon}$ de sorte que A_ε est borné. Dans $\mathbb{R}^d$, les fermés bornés sont compacts donc A_ε est compact.

6. *Montrer que si A est compact et U est un ouvert contenant A il existe $\varepsilon > 0$ tel que $A_\varepsilon \subset U$.*

   Soit $F = \mathbb{R}^d \setminus U$ et $f(x) := d(x, F)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on sait que f est continue, comme A est compact, f atteint son minimum en un certain $x_0 \in A$. On a $\varepsilon_0 := f(x_0, F) > 0$ faute de quoi, en vertu de la question 4, comme F est fermé, on aurait $x_0 \in F$ ce qui est exclu puisque $x_0 \in A \subset U = \mathbb{R}^d \setminus F$. Posons $\varepsilon = \varepsilon_0/2$, et soit $x \in A_\varepsilon$ ce qui, grâce à la question 1, peut s'écrire $x = a + h$ avec $a \in A$ et $|h| \leq \varepsilon$. Montrons que $x \in U$: si ce n'était pas le cas on aurait $x \in F$ et donc aussi $\varepsilon_0 \leq d(a, F) \leq |x - a| \leq \varepsilon = \varepsilon_0/2$ ce qui est absurde.

7. *Montrer que si A est compact et U est un ouvert contenant A il existe une fonction continue h telle que:*

   $$0 \leq h(x) \leq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\ h(x) = 1,\ \forall x \in A,\ h(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus U.$$

   Posons pour tout $x \in \mathbb{R}^d$:

   $$h(x) = \frac{d(x, \mathbb{R}^d \setminus U)}{d(x, A) + d(x, \mathbb{R}^d \setminus U)}$$

h est un quotient de fonctions lipschitziennes, pour montrer sa continuité, il suffit donc de montrer que son dénominateur ne s'annule pas mais s'il s'annulait en x on devrait avoir à la fois $x \in A$ et $x \in \mathbb{R}^d \setminus U$ ce qui est exclu.

8. *Soit maintenant K un compact non vide de $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{F}$ l'ensemble des fermés non vides de K, pour tout $(A, B) \in \mathcal{F}^2$, on pose*

$$d_H(A, B) := \max\{\sup_{x \in A} d(x, B),\ \sup_{y \in B} d(y, A)\}$$

montrer que d_H est une distance sur $\mathcal{F}$ (appelée distance de Hausdorff sur $\mathcal{F}$).

Le fait que d_H soit finie est évident par compacité de K, la symétrie est claire, si $d_H(A, B) = 0$ alors pour tout $x \in A$ on a $d(x, B) = 0$ i.e. $x \in \overline{B} = B$ de sorte que $A \subset= B$ et de même pour tout $y \in B$, $d(y, A) = 0$ ce qui donne $B \subset \overline{A} = A$. Reste à démontrer l'inégalité triangulaire pour la distance de Hausdorff. Soit $C \in \mathcal{F}$, $x \in A$, et $b \in B$ et $c \in C$, on a :

$$d(x, B) \leq \|x - c\| + \|c - b\|$$

en minimisant par rapport à $b \in B$, il vient donc

$$d(x, B) \leq \|x - c\| + d(c, B) \leq \|x - c\| + d_H(C, B)$$

en minimisant maintenant par rapport à $c \in C$ il vient

$$d(x, B) \leq d(x, C) + d_H(C, B) \leq d_H(A, C) + d_H(C, B)$$

cette inégalité valant pour tout $x \in A$ on en tire:

$$\sup_{x \in A} d(x, B) \leq d_H(A, C) + d_H(C, B)$$

un argument similaire donnant

$$\sup_{y \in B} d(y, A) \leq d_H(A, C) + d_H(C, B)$$

on en déduit que $d_H(A, B) \leq d_H(A, C) + d_H(C, B)$.

9. *Montrer que $d_H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0\ :\ A \subset K \cap B_\varepsilon$ et $B \subset K \cap A_\varepsilon\}$.*

Notons I l'ensemble ci dessus (c'est un intervalle) et α son infimum. Supposons $\varepsilon \in I$ soit $x \in A$, comme $A \subset K \cap B_\varepsilon$ on a $d(x, B) \leq \varepsilon$ et de même comme $B \subset K \cap A_\varepsilon$, si $y \in A$ on a $d(y, A) \leq \varepsilon$ ce qui implique que $d_H(A, B) \leq \varepsilon$ de sorte que $d_H(A, B) \leq \alpha$. Posons $d := d_H(A, B)$ pour $x \in A$, $d(x, B) \leq d$ et donc $A \subset B_d$ et de manière symétrique on montre que $B \subset A_d$ on a donc $d \in I$ de sorte que $\alpha \leq d = d_H(A, B)$.