**Exercice 1** *Espaces de Sobolev $H^s$*

1. Par Fourier, $\|\hat{u}\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}$, donc $H^0 = L^2$. De même, $i\xi_i\hat{u} = \widehat{\partial_{x_i} u}$, donc $\||\xi|\hat{u}\|_{L^2} = \|\nabla u\|_{L^2}$, d'où l'écriture de $H^1$.

De même $H^m$ est l'ensemble des fonctions $L^2$ dont toutes les dérivées d'ordre $m$ sont dans $L^2$.

2. Par le théorème de Fubini-Tonelli on a:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p d\mu &= \int_{\mathbb{R}^d} p \int_0^{|f|} \lambda^{p-1} d\lambda d\mu \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} \mu\{x \in \mathbb{R}^d, |u(x)| \geq \lambda\} p\lambda^{p-1} d\lambda\end{aligned}$$

3. On a, par inversion de Fourier et Cauchy-Schwarz :

$$\|u_A^1\|_{L^\infty} \leq C\|F(u_A^1)\|_{L^1} \leq C\int_{|\xi|\leq A} |\hat{u}|(\xi) d\xi$$

$$\leq C\left(\int_{|\xi|\leq A} \frac{d\xi}{|\xi|^{2s}}\right)^{1/2} \left(\int_{|\xi|\leq A} |\xi|^{2s}|\hat{u}|^2 d\xi\right)^{1/2} \leq CA^{(d-2s)/2}\|u\|_{H^s}.$$

C'est le premier point. Ensuite, $\|u^1_{A_\lambda}\|_{L^\infty} \leq \lambda/2$ entraine que $\mu\{x|\, |u_A^1|(x) \geq \lambda/2\} = 0$.

Pour tout $A$, on a bien sûr que $|u(x)| \geq \lambda$ implique $|u_A^1|(x) \geq \lambda/2$ ou $|u_A^2|(x) \geq \lambda/2$ (car $u = u_A^1 + u_A^2$) donc :

$$\mu\{|u| \geq \lambda\} \leq \mu\{|u^1_{A_\lambda}| \geq \lambda/2\} + \mu\{|u^2_{A_\lambda}| \geq \lambda/2\} = \mu\{|u^2_{A_\lambda}| \geq \lambda/2\}.$$

Par 2., on obtient que :

$$\int |u|^p \leq p\int_0^\infty \mu\{|u^2_{A_\lambda}| \geq \lambda/2\}\lambda^{p-1} d\lambda.$$

4. On a l'inégalité classique :

$$\alpha\mu\{|f| \geq \alpha\} \leq \int |f| d\mu.$$

On l'utilise avec $\alpha = (\lambda/2)^2$ et $f = |u^2_{A_\lambda}|^2$, pour obtenir l'inégalité de Tchebicheff désirée :

$$(\lambda/2)^2\mu\{|u^2_{A_\lambda}| \geq \lambda/2\} \leq \int |u^2_{A_\lambda}|^2(x) dx.$$

Ainsi (en utilisant l'inversion de Fourier sur la deuxième ligne) :

$$\begin{aligned} p\int_0^\infty \mu\{|u_{A_\lambda}^2| \geq \lambda/2\}\lambda^{p-1}d\lambda &\leq 4p\int_0^\infty \lambda^{p-3}\left(\int |u_{A_\lambda}^2|^2(x)dx\right)d\lambda \\ &\leq 4p\int_0^\infty \lambda^{p-3}\left(\int_{|\xi|\geq A_\lambda} |\hat{u}|^2(\xi)d\xi\right)d\lambda \\ &\leq 4p\int \int\limits_{\lambda\leq 2C\|u\|_{H^s}|\xi|^{n/2-s}} \lambda^{p-3}d\lambda|\hat{u}|^2(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

(car $|\xi| \geq A_\lambda = (\lambda/2C\|u\|_{H^s})^{\frac{1}{d/2-s}}$ est équivalent à $\lambda \leq 2C\|u\|_{H^2}|\xi|^{d/2-s}$). On choisit à présent $p = 2d/(d-2s)$, soit $p-2 = 4s/(d-2s) > 0$ et donc :

$$\int\limits_0^{2C\|u\|_{H^s}|\xi|^{d/2-s}} \lambda^{p-3}d\lambda = \frac{1}{p-2}(2C\|u\|_{H^s}|\xi|^{n/2-s})^{p-2} = \frac{(2C)^{p-2}}{p-2}\|u\|_{H^s}^{p-2}|\xi|^{2s}.$$

Et finalement :

$$\|u\|_{L^p}^p \leq \frac{4p(2C)^{p-2}}{p-2}\|u\|_{H^s}^{p-2}\int |\xi|^{2s}|\hat{u}|^2(\xi)d\xi \leq C\|u\|_{H^s}^p,$$

En utilisant la densité de $\mathcal{S}$ dans $H^s$ (voir TD 4, exercice 2), on en déduit le résultat.

4. Par le théorème des accroissements finis (appliqué à $\exp(-i\cdot)$), on a :

$$|e^{-ix\xi} - e^{-iy\xi}| \leq |x\cdot\xi - y\cdot\xi| = |x-y||\xi|.$$

Et donc en interpolant, on a pour tout $\alpha \in [0,1]$ :

$$|e^{-ix\xi} - e^{-iy\xi}| = |e^{-ix\xi} - e^{-iy\xi}|^\alpha |e^{-ix\xi} - e^{-iy\xi}|^{1-\alpha} \leq 2^{1-\alpha}|x-y|^\alpha|\xi|^\alpha.$$

On a alors :

$$u(x) - u(y) = C\int \hat{u}(\xi)\left(e^{-ix\xi} - e^{-iy\xi}\right)d\xi.$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} &\leq \int |\xi|^\alpha|\hat{u}|(\xi)d\xi \\ &\leq \left(\int \frac{d\xi}{(1+|\xi|)^{d+\varepsilon}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int (1+|\xi|)^{d+\varepsilon+2\alpha}|\hat{u}|^2(\xi)d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C(\varepsilon)\|u\|_{H^{\frac{d+\varepsilon}{2}+\alpha}}. \end{aligned}$$

Donc finalement, pour tout $\alpha \in ]0, s-d/2[$, on a (avec $\varepsilon = 2s-d-\alpha > 0$) :

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq C(\alpha)\|u\|_{H^s}.$$

Enfin,

$$|u(x)| = \left|\int \hat{u}(\xi)e^{ix\xi}d\xi\right| \leq \int |\hat{u}|(\xi)d\xi \leq \int |\hat{u}|(\xi)\frac{(1+|\xi|^2)^{s/2}}{(1+|\xi|^2)^{s/2}}d\xi$$
$$\leq \left(\int |\hat{u}|^2(\xi)(1+|\xi|^2)^s d\xi\right)^{1/2}\left(\int \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^s}\right)^{1/2} \leq C(s)\|u\|_{H^s}.$$

car $s > d/2$ donc $1/(1+|\xi|^2)^s \in L^1(d\xi)$. Finalement,

$$\|u\|_{L^\infty} + \sup_{x\neq y}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq C(\alpha)\|u\|_{H^s}.$$

Par densité, on conclut que $H^s \subset C^\alpha$ avec injection continue.

**Exercice 2** *Espaces en dualité*

Si $f \in E'$, il existe $C$, $n$, et $y_1, ..., y_n \in F^n$ tels que $|f| \leq C\max_{i=1,..,n}|a(.,y_i)|$. On en déduit que $\cap_i \ker(a(.,y_i)) \subset \ker(f)$, le lemme des noyaux implique qu'il existe $y$ combinaison linéaire des $y_i$ tel que $f = a(.,y)$. L'unicité est évidente car $a$ est séparante.

**Exercice 3** *Bases de Schauder*

1. Il est clair que $\|.\|_1$ est une norme et que $\|.\| \leq \|.\|_1$, pour montrer l'équivalence des normes, il suffit donc de montrer que $(E, \|.\|_1)$ est complet et de conclure par le théorème de continuité de l'inverse de Banach. Soit donc $(x^k)_k$ une suite de Cauchy pour $\|.\|$ i.e.

$$\delta_m := \sup_N \sup_{k,l\geq m}\|P_N(x^k) - P_N(x^l)\| \to 0 \text{ quand } m \to \infty. \tag{1}$$

En particulier pour chaque $N$, $(P_N(x^k))_k$ est de Cauchy, on en note $y_N$ la limite. Montrons maintenant que $(y_N)$ converge. On a :

$$\|y_{N_1} - y_{N_2}\| \leq \|y_{N_1} - P_{N_1}(x^k)\| + \|P_{N_1}(x^k) - P_{N_2}(x^k)\| + \|P_{N_2}(x^k) - y_{N_2}\|$$
$$\leq 2\delta_k + \|P_{N_1}(x^k) - P_{N_2}(x^k)\|$$

soit $\varepsilon > 0$, $k_0$ tel que $\delta_{k_0} \leq \varepsilon/3$ et $N$ tel que $\sup_{N_1,N_2\geq N}\|P_{N_1}(x^{k_0}) - P_{N_2}(x^{k_0})\| \leq \varepsilon/3$ on a donc $\sup_{N_1,N_2\geq N}\|y_{N_1} - y_{N_2}\| \leq \varepsilon$. Ainsi $(y_N)_N$ est de Cauchy, soit $y$ sa limite. Il est facile de voir que $y_N$ est de la forme $y_N = \sum_{n=0}^{N} y_n e_n$ et donc $y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n e_n$ si bien que $y_N = P_N(y)$. Faisant tendre $l$ vers $+\infty$ dans (1), il vient bien que $\|x^k - y\|_1$ tend vers 0.

2. La linéarité est évidente, la borne l'est aussi pour $\|.\|_1$ et donc aussi pour $\|.\|$ en vertu de la question précédente.

3. Posons $T_N := P_N \circ T$ de sorte que $T_N$ est de rang fini. Soit $K := \overline{T(B_E)}$ et $\varepsilon > 0$, comme $K$ est précompact il existe $m$ et $y_1, ..., y_m$ tel que $K \subset \cup_{i=1}^{m} B(y_i, \varepsilon/(2M))$ avec $M = 1 + \sup_N \|P_N\|$, on a alors

$$\|T_N - T\| \leq \sup_{y \in K} \|(I - P_N)(y)\|.$$

Pour $N$ assez grand pour que $\|(I - P_N)(y_i)\| \leq \varepsilon/2$ pour $i = 1, ..., m$ on a donc bien $\|T_N - T\| \leq \varepsilon$.

### Exercice 4

Passant en Fourier (ce qui est licite puisque l'on travaille ici dans $\mathcal{S}'$) l'équation devient $(|\xi|^2 - 1)\hat{u} = 0$ ce qui équivaut à dire que $\hat{u}$ est à support dans la sphère unité $S^{d-1}$ (en particulier $\hat{u}$ est à support compact). Par inversion de la transformée de Fourier on en déduit que les solutions sont les fonctions de la forme $u = \hat{T}$ avec $T \in \mathcal{E}'$, $\mathrm{supp}(T) \subset S^{d-1}$. On en déduit facilement que $u(x) = \langle T, \xi \mapsto e^{-ix\cdot\xi} \rangle$ et donc que $u \in C^\infty$ (adapter les arguments vus en cours : Lemmes 2.9 et 2.11 par exemple). Si $u$ est solution et à support compact, sa transformée de Fourier est alors à la fois une fonction $C^\infty$ et une distribution à support dans l'ensemble négligeable $S^{d-1}$ et donc $u \equiv 0$.