Corrigé
L3, Examen janvier 2010

Exercice 1
Déterminer toutes les formes linéaires sur $\mathbb{R}^4$ qui sont positives sur l'ensemble

$$A := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \geq 0,\ x_1 + x_2 = 1,\ 2x_1 + x_4 \leq x_3\}$$

Pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, posons

$$f_1(x) = x_1 - x_2 + x_3 - x_4,\ f_2(x) = x_1 + x_2,\ f_3(x) = -2x_1 + x_3 - x_4$$

et définissons

$$B := \{x \in \mathbb{R}^4 \,:\, f_i(x) \geq 0,\ i = 1, ..., 3\}$$

et A^+ et B^+ l'ensemble des formes linéaires sur $\mathbb{R}^4$ qui sont positives sur A et B respectivement. Comme $A \subset B$ on a évidemment $B^+ \subset A^+$.

Soit maintenant $f \in A^+$ et $x =\in B$. Soit $y \in \mathbb{R}^4$ tel que $f_1(y) \geq 0$, $f_2(y) > 0$ et $f_3(y) \geq 0$ (par exemple $y = (-1, 2, 5, 0)$ fait l'affaire). Pour tout $\varepsilon > 0$, comme $f_2(x + \varepsilon y) = f_2(x) + \varepsilon f_2(y) \geq \varepsilon f_2(y) > 0$, le vecteur

$$x_\varepsilon := \frac{x + \varepsilon y}{f_2(x) + \varepsilon f_2(y)}$$

est bien défini et appartient par construction à A on a donc $f(x_\varepsilon) \geq 0$ et donc par homogénéité

$$f(x + \varepsilon y) \geq 0$$

comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, en faisant $\varepsilon \to 0^+$ dans l'inégalité précédente il vient donc que $f(x) \geq 0$. Comme x est un élément quelconque de B on a donc $f \in B^+$. On a donc montré que $A^+ = B^+$. Finalement, il découle du lemme de Farkas que

$$B^+ = \{\sum_{i=1}^{3} \lambda_i f_i,\ \lambda_i \in \mathbb{R}^3_+\}.$$

Exercice 2 Dans tout cet exercice, les vecteurs seront identifiés à des vecteurs-colonne. Soit $n \geq m \geq 1$ avec m et n entiers, S une matrice $n \times n$ symétrique et définie positive, $a \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on pose:

$$f(x) = \frac{1}{2} Sx \cdot x - a \cdot x, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

ou $p \cdot q$ désigne le produit scalaire usuel de deux vecteurs p et q. On se donne également A une matrice $m \times n$ que l'on suppose de rang m et $b \in \mathbb{R}^m$ et l'on note

$$C := \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, Ax = b\}.$$

L'objectif de cet exercice est de minimiser f sur C.

1. Montrer que f est de classe C^2 et calculer son gradient et sa matrice hessienne.

$$f(x+h) = \frac{1}{2}(Sx \cdot x + Sx \cdot h + Sh \cdot x + Sh \cdot h) - a \cdot x - a \cdot h$$

et comme S est symétrique et $\|Sh \cdot h\| \leq \|S\| \|h\|^2 = o(h)$, il vient:

$$f(x+h) = f(x) + Sx \cdot h - a \cdot h + o(h)$$

On en déduit que f est dérivable et que

$$f'(x)(h) = Sx \cdot h - a \cdot h$$

comme $f'(x)(h) = \nabla f(x) \cdot h$, on en tire donc

$$\nabla f(x) = Sx - a.$$

La fonction précédente étant affine en x elle est continue et donc f est de classe C^1, comme ∇f est une fonction affine, elle est dérivable et sa dérivée est constante égale à S et donc

$$D^2 f(x) = S$$

ce qui montre en particulier que f est de classe C^2 (et strictement convexe puisque sa Hessienne, S est définie positive).

2. Montrer que f atteint son minimum sur $\mathbb{R}^n$ en un point unique que l'on déterminera.

D'après la question précédente f est strictement convexe (et est évidemment continue) et comme S est définie positive il existe $\alpha > 0$ (par exemple la plus petite valeur propre de S) tel que pour tout x on ait

$$Sx \cdot x \geq \alpha \|x\|^2$$

et donc en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$f(x) \geq \frac{\alpha}{2}\|x\|^2 - a \cdot x \geq \frac{\alpha}{2}\|x\|^2 - \|a\| \cdot x \to \infty \text{ quand } \|x\| \to +\infty$$

ce qui montre que f est coercive et donc atteint son minimum sur $\mathbb{R}^n$ et ce en un point unique par stricte convexité. Notons $\bar{x}$ ce point de minimum, comme f est convexe, il est caractérisé par

$$\nabla f(\bar{x}) = 0 \text{ i.e. } S\bar{x} = a$$

et comme S est inversible, on en déduit que

$$\bar{x} = S^{-1}a.$$

3. Montrer que C est non vide puis que si $z \in \mathbb{R}^m$ vérifie $A^T z = 0$ alors $z = 0$.

   Comme le rang de A est m, pour tout $c \in \mathbb{R}^m$ le système $Ax = c$ possède au moins une solution, en particulier ceci implique que C est non vide. Soit maintenant $z \in \mathbb{R}^m$ telle que $A^T z = 0$, alors pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ on a

   $$A^T z \cdot y = 0 = z \cdot Ay$$

   or, nous venons de voir il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $Ay = z$, et donc $z \cdot Ay = \|z\|^2 = 0$.

4. Montrer que la matrice $AS^{-1}A^T$ est inversible.

   Cette matrice est une matrice carrée $m \times m$ il suffit donc de montrer que si $z \in \mathbb{R}^m$ vérifie $AS^{-1}A^T z = 0$ alors $z = 0$. Soit donc un tel z, on a alors

   $$0 = (AS^{-1}A^T z) \cdot z = (S^{-1}A^T z) \cdot A^T z$$

   mais comme S^{-1} est définie positive on en déduit $A^T z = 0$ et donc $z = 0$ en vertu de la question précédente.

5. Montrer que f atteint son minimum sur C en un unique point x^*.

   C est un convexe fermé non vide et f est continue, strictement convexe et corecive et donc f atteint son minimum sur C en un point unique.

6. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tel que $\nabla f(x^*) = A^T \lambda$.

   Les contraintes définissant C étant affines, et f étant convexe, le point de minimum x^* est caractérisé par la condition d'optimalité de Lagrange. Notons que les contraintes définissant c peuvent s'écrire sous la forme

   $$g_j(x) := \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = b_j,\ j = 1, ..., m$$

   où les a_{ji} désignent les coefficients de la matrice A. Ainsi la condition de Lagrange s'exprime par l'existence de multiplicateurs $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ tels que

   $$\nabla f(x^*) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(x^*).$$

   Ce système peut se réexprimer par : pour tout $i \in \{1, ..., m\}$,

   $$\partial_i f(x^*) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_{ji} = (A^T \lambda)_i$$

   c'est à dire

   $$\nabla f(x^*) = A^T \lambda.$$

7. Déterminer x^* explicitement en fonction des données du problèmes S, a, A et b.

   D'après la question précédente, x^* est caractérisé par l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tel que
$$\nabla f(x^*) = Sx^* - a = A^T\lambda \tag{1}$$
   et évidemment par les contraintes
$$Ax^* = b. \tag{2}$$
   De (1), on déduit d'abord que
$$x^* = S^{-1}A^T\lambda + S^{-1}a$$
   et en reportant dans (2), il vient donc
$$Ax^* = M\lambda + AS^{-1}a = b$$
   où l'on a posé
$$M := AS^{-1}A^T.$$
   On a vu que M est inversible, on obtient ainsi
$$\lambda = M^{-1}(b - AS^{-1}a)$$
   et enfin
$$\begin{aligned} x^* &= S^{-1}A^TM^{-1}(b - AS^{-1}a) + S^{-1}a \\ &= S^{-1}A^T\left(AS^{-1}A^T\right)^{-1}(b - AS^{-1}a) + S^{-1}a. \end{aligned}$$

Exercice 3
Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on pose
$$F(x, y, z) := (x^3e^{y^2+z^2} + z^2y + z, x^2z^2 + xyz - x)$$
et l'on pose $M := F^{-1}(0, 0)$.

1. Montrer qu'il existe des intervalles ouverts contenant 0, I_1, I_2 et I_3 ainsi que $f \in C^1(I_2, I_1)$ et $g \in C^1(I_2, I_3)$ tels que
$$M \cap I_1 \times I_2 \times I_3 = \{(f(y), y, g(y)),\ y \in I_2\}$$
   F est clairement de classe C^1 et $(0, 0, 0) \in M$ par ailleurs un calcul immédiat donne que la matrice Jacobienne de F en $(0, 0, 0)$ est
$$JF(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc la Jacobienne partielle par rapport aux seules variables (x, z) est

$$JF_{(x,z)}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est inversible. Il découle alors du théorème des fonctions implicites qu'il existe U un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}$, V un voisinage ouvert de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ et $\Psi \in C^1(U, V)$ tels que

$$M \cap \{(x, y, z) \ : \ (x, z) \in V, \ y \in U\} = \{(x, y, z) \ : \ y \in U, \ (x, z) = \Psi(y)\}.$$

On peut, par restriction, sans perte de généralité supposer que $U = I_2$ est un intervalle ouvert et que $V = I_1 \times I_3$ avec I_1 et I_3 des intervalles ouverts contenant 0, notant alors $\Psi(y) = (f(y), g(y)) \in I_1 \times I_3$ pour tout $y \in I_2$, on a bien

$$M \cap I_1 \times I_2 \times I_3 = \{(f(y), y, g(y)), \ y \in I_2\}.$$

2. Calculer $f(0)$, $g(0)$, $f'(0)$ et $g'(0)$. Comme $(0,0,0) \in M \cap I_1 \times I_2 \times I_3$ on a $f(0) = g(0) = 0$. Ensuite en dérivant la relation $F(f(y), y, g(y)) = 0$ en $y = 0$ il vient

$$JF(0,0,0) \begin{pmatrix} f'(0) \\ 1 \\ g'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'(0) \\ 1 \\ g'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et donc $f'(0) = g'(0) = 0$.