Analyse fonctionnelle et EDP,
Examen, juin 2009
ENS, FIMFA, première année,
Durée : 3 heures, aucun document.

Exercice 1 *Dans tout cet exercice, Ω désigne un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$. Pour tout $u = (u^i)_{i=1,...,d}$ avec $u^i \in \mathcal{D}'(\Omega)$ pour $i = 1, ..., d$, on pose*

$$\mathrm{div}(u) := \partial_i u^i$$

(dans la formule ci-dessus et dans toute la suite on utilisera la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés) et pour tout i, j avec $1 \leq i, j \leq d$, on définit

$$\mathrm{curl}_{ij}(u) := \partial_j u^i - \partial_i u^j.$$

Pour tout $f \in L^2(\Omega)$ et $i \in \{1, ..., d\}$, $\partial_i f$ définit un élément de $H^{-1}(\Omega)$ par

$$< \partial_i f, \varphi >:= - \int_\Omega f \partial_i \varphi, \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Pour $a \in L^2(\Omega)^d$, on identifiera ainsi $\mathrm{div}(a)$ *et* $\mathrm{curl}_{ij}(a)$ *à des éléments de $H^{-1}(\Omega)$.*

Première partie: quelques formules d'intégration par parties

Dans cette partie, sauf mention contraire, $u = (u^1, ..., u^d) \in C_c^\infty(\Omega)^d$, $v = (v^1, ..., v^d) \in C_c^\infty(\Omega)^d$ et $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. On pose $\Delta u = (\Delta u^1, ..., \Delta u^d)$, $\Delta v = (\Delta v^1, ..., \Delta v^d)$, on note enfin $x \cdot y = x^i y^i$ le produit scalaire de $\mathbb{R}^d$.

1. *Montrer que*

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathrm{curl}_{ij}(\Delta v) \ \varphi \ \mathrm{curl}_{ij}(u) = -2 \int_\Omega \Delta v^i \ \mathrm{curl}_{ij}(u) \ \partial_j \varphi \\ -2 \int_\Omega \varphi \Delta u \cdot \Delta v + 2 \int_\Omega \Delta v \cdot (\varphi \nabla(\mathrm{div}(u))\end{aligned}$$

2. *Montrer que pour tout $\theta \in C_c^\infty(\Omega)$ on a :*

$$\int_\Omega \nabla\theta \cdot (\Delta u - \nabla(\mathrm{div} u))) = 0. \tag{1}$$

3. *Montrer que*

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Delta v \cdot (\varphi \nabla(\mathrm{div}(u))) = - \int_\Omega \Delta v \cdot \nabla\varphi \ \mathrm{div}(u) + \int_\Omega \nabla(\mathrm{div}(v)) \cdot \nabla\varphi \ \mathrm{div}(u) \\ - \int_\Omega \mathrm{div}(\Delta u) \mathrm{div}(v) \varphi - \int_\Omega \nabla(\mathrm{div}(u)) \cdot \nabla\varphi \ \mathrm{div}(v)\end{aligned}$$

(indication : utiliser le fait que $\int_\Omega (\Delta u - \nabla(\mathrm{div}(u))) \nabla(\varphi \mathrm{div}(v)) = 0$).

4. *En déduire que*

$$\int_\Omega \varphi \Delta u \cdot \Delta v = -\frac{1}{2}\int_\Omega \mathrm{curl}_{ij}(\Delta v)\,\varphi\,\mathrm{curl}_{ij}(u) - \int_\Omega \Delta v^i\,\mathrm{curl}_{ij}(u)\,\partial_j\varphi$$
$$-\int_\Omega \Delta v\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{div}(u) + \int_\Omega \nabla(\mathrm{div}(v))\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{div}(u)$$
$$-\int_\Omega \mathrm{div}(\Delta u)\mathrm{div}(v)\varphi - \int_\Omega \nabla(\mathrm{div}(u))\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{div}(v)$$

et étendre rigoureusement cette formule au cas où u et v sont seulement $H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Deuxième partie: le lemme "div-curl"
Soit (a_n) et (b_n) deux suites de $L^2(\Omega)^d$, a et b dans $L^2(\Omega)^d$ telles que

$$a_n \rightharpoonup a,\ b_n \rightharpoonup b \text{ dans } L^2(\Omega)^d. \tag{2}$$

On suppose en outre que les suites $\mathrm{div}(a_n)$ *et (pour tout (i,j))* $(\mathrm{curl}_{ij}(b_n))$ *sont à valeurs dans un compact (fort) de $H^{-1}(\Omega)$.*

1. *Montrer que $a_n \cdot b_n$ converge au sens des distributions vers $a \cdot b$ (indication : on pourra introduire les fonctions u_n^i et v_n^i dans $H_0^1(\Omega)$ solutions faibles de $-\Delta u_n^i = a_n^i$ et $-\Delta v_n^i = b_n^i$ et utiliser les résultats de la première partie).*

2. *Donner un contre-exemple au résultat précédent si on suppose seulement les suites (a_n) et (b_n) faiblement convergentes dans $L^2(\Omega)^d$.*

Exercice 2 *Soit f et g deux fonctions* 1*-Lipschitziennes : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$. Montrer que le système suivant:*

$$-\Delta u + u = f(v) \text{ dans } \Omega,\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \tag{3}$$
$$-\Delta v + v = g(u) \text{ dans } \Omega,\ v = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \tag{4}$$

possède une unique solution faible $(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

Exercice 3 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et $1 < p < \infty$. Soit $(u_n)_n \in L^p(\Omega)^{\mathbb{N}}$, $u \in L^p(\Omega)$ tels que $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^p(\Omega)$. On suppose de plus qu'il existe $\lambda > 0$ tell que*

$$\lim_{n\to\infty} |\{|u_n| \geq \lambda\}| = 0.$$

Montrer que $u \in L^\infty(\Omega)$ avec $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \lambda$.