Analyse convexe
G. Carlier
M2 MASEF et EDPMAD
Exercices

Exercice 1 (exam 2006-2007)

Dans cet exercice $\|.\|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbf{R}^n$. Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ convexe et 1-Lipschitzienne sur $\mathbf{R}^n$.

1. Montrer que $\mathrm{dom}(f^*)$ est inclus dans la boule unité.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, on a:
$$f(x) = \sup_{p \in \mathbf{R}^n,\ \|p\| \leq 1} \{p \cdot x - f^*(p)\},$$
3. Soit g, convexe s.c.i. propre sur $\mathbf{R}^n$ telle que $\mathrm{dom}(g^*)$ soit inclus dans la boule unité, montrer que g est 1-Lipschitzienne.
4. Existe-t-il des fonctions convexes Lipschitziennes sur $\mathbf{R}^n$ dont la conjuguée soit aussi Lipschitzienne?

Exercice 2 (exam 2006-2007)

Soit X un espace de Hilbert, et f convexe sci propre sur X, montrer que
$$f = f^* \Longleftrightarrow f = \frac{1}{2}\|.\|^2.$$

Exercice 3 (exam 2006-2007)

Soit $f \in \Gamma_0(\mathbf{R}^n)$, $b \in \mathbf{R}^k$ et $A \in M_{n,k}$, on s'intéresse au problème:
$$\inf\{f(x) \ : \ x \in \mathbf{R}^n,\ Ax \leq b\} \tag{1}$$

1. Déterminer le problème dual de (1).
2. Donner une condition assurant que le problème dual possède des solutions et que sa valeur coincide avec celle de (1).
3. Etablir des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour (1).
4. Etablir des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour le dual de (1).

Exercice 4 (exam 2005-2006)

Soit E un $\mathbf{R}$-evn, F et G F et G convexes sci, propres : $E \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. On s'intéresse à
$$\inf_{x \in E} \{F(x) + G(x)\} \tag{2}$$
et à son dual
$$\sup_{p \in E^*} \{-F^*(p) - G^*(-p)\} \tag{3}$$

1. Montrer que $\inf(2) \geq \sup(3)$.

2. On suppose désormais que $\inf(2) = \alpha \in \mathbf{R}$ et qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) < +\infty$ et g soit continue en x_0. On pose alors:

$$A := \mathrm{int}(\mathrm{epi}(G)) \text{ et } B := \{(t,x) \in \mathbf{R} \times E : F(x) \leq \alpha - t\}.$$

   Montrer A est non vide, convexe dense dans $(\mathrm{epi}(G))$, que B est convexe et que A et B sont disjoints.

3. Montrer qu'il existe $p \in F^*$ et $\lambda > 0$ tels que:

$$p(x) + \lambda t \geq p(y) + \lambda s, \ \forall (t,x) \in \mathrm{epi}(G), \forall (s,y) \in B.$$

4. Montrer que p/λ résout et que $\inf(2) = \max(3)$.

Exercice 5 (exam 2005-2006)

Soit X un espace de Hilbert, $\lambda > 0$ et F convexe sci propre : $X \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. Pour $x \in X$ on définit:

$$f(x) := \inf_{y \in X} \left\{ \frac{\lambda}{2} \|y - x\|^2 + F(y) \right\}$$

et

$$g(x) := \inf_{z \in X} \left\{ \frac{1}{2\lambda} \|z - x\|^2 + F^*(z) \right\}$$

Montrer que pour tout $x \in X$ on a:

$$f(x) + g(x) = \frac{\lambda}{2} \|x\|^2$$

Exercice 6 (exam 2005-2006)

On se propose ici de montrer un résultat de dualité non convexe (dualité de Toland). Soit E un $\mathbf{R}$-evn, F et G convexes sci: $E \to \mathbf{R}$.

1. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $F - G \geq \alpha$ sur E, montrer que $G^* - F^* \geq \alpha$ sur E'.

2. En déduire que l'on a:

$$\inf_E (F - G) = \inf_{E^*} (G^* - F^*)$$

Exercice 7

Soit f et g convexes $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ telles que $f \geq g$. Montrer que si $f(x_0) = g(x_0)$ alors $\partial g(x_0) \subset \partial f(x_0)$, en déduire que si f est différentiable en x_0 alors g aussi.

Exercice 8

Soit f convexe $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$.

1. Montrer que pour tout $r > 0$

$$\sup\{|p|, \ p \in \partial f(x), \ |x| \leq r\} < \infty$$

2. Montrer que le graphe de ∂f (i.e. l'ensemble des couples de la forme (x, p) avec $p \in \partial f(x)$) est fermé.

3. Montrer que si f est Gâteaux-dérivable alors f est de classe C^1.

Exercice 9

Soit $C := c_{ij} \in M_{nk}(\mathbf{R})$, $\mu_1, ..., \mu_n$, $\nu_1, ..., \nu_k$ positifs tels que

$$\sum_i \mu_i = \sum_j \nu_j = 1$$

montrer que

$$\begin{aligned}\inf\{\sum c_{ij}\gamma_{ij} : \gamma_{ij} \geq 0, \sum_j \gamma_{ij} = \mu_i,\ \sum_i \gamma_{ij} = \nu_j\} \\ = \sup\{\sum_i \mu_i x_i + \sum_j \nu_j y_j \ :\ x_i + y_j \leq c_{ij}\}.\end{aligned}$$

Exercice 10

Soit E un evn, $F_1, ..., F_k\ :\ E \to \mathbf{R} \cup \infty$ convexes sci propres, telles F_1 est continue et que $\cap_i \mathrm{dom} F_i^* \neq \emptyset$ (que signifie cette condition?) Montrer que

$$\inf\{\sum_i F_i(x_i)\ :\ x_i \in E,\ \sum_i x_i = 0\} = \sup\{-\sum_i F_i^*(p)\ p \in E^*\}.$$

Exercice 11

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbf{R}^d$, et $F\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ convexe vérifiant $at^2 \leq F(t) \leq b(t^2 + 1)$ pour deux constantes positives a et b et tout t. On s'intéresse au problème

$$\inf\{\int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \int_\Omega F(u),\ u \in H_0^1(\Omega)\} \tag{4}$$

et on introduit

$$\sup\{-\int_\Omega \frac{1}{2}|p|^2 - \int_\Omega F^*(\mathrm{div}(p)),\ p \in L^2(\Omega)^d\ :\ \mathrm{div}(p) \in L^2(\Omega)\} \tag{5}$$

1. Montrer que (4) possède une unique solution caractérisée par une equation d'Euler qu'on précisera.

2. Montrer que $\inf(4) = \sup(5)$.

3. Montrer que (5) possède une unique solution.

4. Quel lien y-a-t-il entre la solution de (4) et celle de (5)?

Exercice 12

Questions en vrac:

1. Montrer que tout convexe fermé est une intersection de demi-espaces fermés.

2. Soit f convexe sur E, x, y dans E des points de sous-différentiabilité de f et $p \in \partial f(x)$, $q \in \partial f(y)$ montrer que $(p-q)(x-y) \geq 0$.

3. Soit f convexe sur E, x dans E un point de sous-différentiabilité de f et $\lambda > 0$ montrer que $\partial(\lambda f)(x) = \lambda \partial f(x)$.

4. Si f est convexe et paire, quel lien y-a-t-il entre $\partial f(x)$ et $\partial f(-x)$?

5. Si C est un convexe fermé de E^* et f sa fonction d'appui déterminer $\partial f(0)$.

6. Calculer f^* dans les cas suivants ($x \in \mathbf{R}^d$, $|.|$: norme euclidienne):

$$f(x) = \frac{1}{2} Ax \cdot x + q \cdot x \ (A \text{ def. pos}),\ f(x) = \frac{1}{p} \sum_i |x_i|^p (p \geq 1)\ f(x) = q \cdot x,$$

$$f(x) = \max(|x|^2, |x|),\ f(x) = \sum_i x_i \ln(x_i) + \chi_{\mathbf{R}^d_+}(x),\ f(x) = h(\lambda x + x_0)$$

$$f(x) = \sqrt{1+|x|^2},\ f(x) = \inf_y \{ \frac{1}{2\varepsilon} |x-y|^2 + g(y) \} \ (g \text{ cvexe sci propre, } \varepsilon > 0)$$

$$f(x) = \inf_{p \in \mathbf{R}^k} \Phi(x,p) \ (\Phi \text{ cvexe sci propre sur } \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^k).$$

7. Démontrer le théorème de séparation stricte dans un espace de Hilbert sans utiliser la forme analytique de Hahn-Banach (indication: projection sur un convexe fermé).

8. Si f est convexe $\mathbf{R}^d \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ montrer que f est localement lipschitzienne sur l'intérieur de son domaine.

9. Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbf{R}^d$ et $f \in H^{-1}(\Omega)$, étudier le problème dual de:

$$\inf \{ \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - (f,u) \ : \ u \in H_0^1(\Omega),\ |\nabla u| \leq 1 \text{ p.p.} \}$$

10. Soit Ω un ouvert convexe borné de $\mathbf{R}^d$ et f_+ et f_- deux densités de probabilités L^1 sur Ω, montrer que

$$\sup \{ \int_\Omega u(f_+ - f_-) \ : \ u \text{ 1-Lip. sur } \Omega \} = \inf \{ \|\sigma\|_{L^1} \ : \ \sigma \in L^1(\Omega)^d,\ \mathrm{div}(\sigma) = f_+ - f_- \}$$

Exercice 13

Soit E un evn, f_1 et f_2 convexes sci propres $E \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ et $x \in E$.

1. Montrer que $\partial f_1(x) + \partial f_2(x) \subset \partial(f_1 + f_2)(x)$.

2. Montrer qu'on n'a pas nécessairement égalité (penser à des fonctions d'appui).

3. Montrer que si f_1 et f_2 sont (finies et) continues en x alors $\partial f_1(x) + \partial f_2(x) = \partial(f_1 + f_2)(x)$ (indications: introduire la fonction $f(x_1, x_2) := f_1(x_1) + f_2(x_2)$ pour $(x_1, x_2) \in E^2$ puis penser à séparer un certain espace affine fermé de l'intérieur de l'épigraphe de f).