DAUPHINE, Département MIDO

Notes de cours

PROGRAMMATION DYNAMIQUE et MESURES DU RISQUE

Guillaume CARLIER

Année 2013-2014

Table des matières

Première partie

Programmation dynamique en temps discret

Chapitre 1

Introduction et exemples

1.1 Introduction

On s'intéressera dans toute cette partie à des problèmes d'optimisation du type :

$$\sup_{(x_t)} \left\{ \sum_{t=0}^{T-1} V_t(x_t, x_{t+1}) + V_T(x_T) \right\} \tag{1.1}$$

sous les contraintes : $x_0 = x$ donné, $x_t \in A$ et $x_{t+1} \in \Gamma_t(x_t)$ pour tout $t = 0, ..., T-1$. Un tel problème est dit d'horizon fini T, l'ensemble A est appelé espace d'états, Γ_t est une correspondance de A dans A qui modélise les contraintes sur la dynamique de la variable d'état x_t ($\Gamma_t(x_t)$ est l'ensemble des successeurs possibles de x_t), les fonctions V_t sont les paiements instantanés et enfin V_T est le paiement terminal. Ici nous écrirons ces problèmes sous forme de maximisation car c'est l'usage courant en économie, évidemment toute la théorie restera valable pour des problèmes de minimisation grâce à l'identité $-\sup(-.) = \inf(.)$.

On considérera aussi des problèmes d'horizon infini avec critère escompté du type :

$$\sup_{(x_t)} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t V(x_t, x_{t+1}) \right\} \tag{1.2}$$

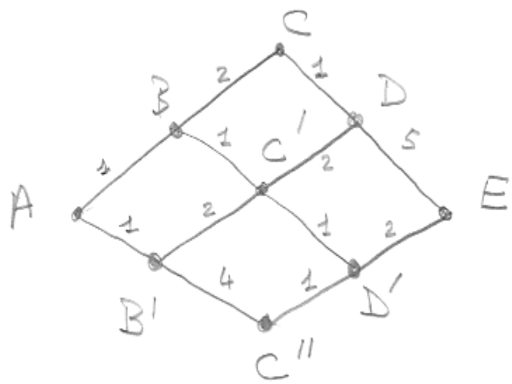
sous les contraintes : $x_0 = x$ donné, $x_t \in A$ et $x_{t+1} \in \Gamma(x_t)$ pour tout $t \geq 0$. On interprète les données de A, Γ et V comme précédemment et $\beta \in]0, 1[$ est un facteur d'escompte.

Les questions naturelles sont évidemment : l'existence de solutions (i.e. de politiques optimales) à (1.1) et (1.2) et la caractérisation maniable de ces dernières, l'idéal étant d'obtenir une stratégie permettant de les calculer. Nous verrons qu'en exploitant la structure récursive de ces problèmes, on peut asez simplement atteindre cet objectif en utilisant des idées très intuitives mais redoutablement efficaces (principe de la programmation dynamique, fonction valeur et équation de Bellman) dues pour l'essentiel à Richard Bellman.

Les problèmes de type (1.2) se rencontrent fréquemment en économie en particulier dans : les modèles de croissance, de gestion de stock, d'exploitations de ressources naturelles et de l'environnement. Avant d'aller plus loin, considérons donc quelques exemples.

1.2 Un problème de plus court chemin

Il s'agit ici du problème type de programmation dynamique en horizon fini avec espace d'état fini et qui revient à un problème d'optimisation sur un graphe, sa résolution illustre de manière simple le principe de la programmation dynamique. Considérons un voyageur de commerce qui doit se rendre de la ville A à la ville E en passant par plusieurs villes intermédiaires, les chemins possibles sont donc modélisés par un graphe ayant A et E pour sommets initial et final (les autres sommets représentant les villes étapes), les arrêtes de ce graphe représentant les trajets intermédiaires.



On notera $\Gamma(M)$ les successeurs de la ville M et pour $N \in \Gamma(M)$ on notera MN le temps du parcours MN. Enfin, on donne : $\Gamma(A) = \{B, B'\}$, $AB = 1 = AB'$, $\Gamma(B) = \{C, C'\}$, $(BC, BC') = (2, 1)$, $\Gamma(B') = \{C', C''\}$, $(B'C', B'C'') = (2, 4)$, $\Gamma(C'') = \{D'\}$, $C''D' = 1$, $\Gamma(C) = \{D\}$, $CD = 1$, $\Gamma(C') = \{D, D'\}$, $(C'D, C'D') = (2, 1)$, $\Gamma(D) = \Gamma(D') = \{E\}$, $(DE, D'E) = (5, 2)$. Pour déterminer le ou les chemins les plus courts on pourrait bien

sûr tous les essayer mais il est bien plus judicieux d'utiliser la remarque suivante(qui est précisément le *principe de la programmation dynamique* dans sa version la plus simple) :
Si un chemin optimal de A à E passe par M alors il est encore optimal entre M et E.

Introduisons la *fonction valeur* $V(M) :=$ "temps de parcours minimal entre M et E". Evidemment V se calcule facilement en partant de la fin puis en procédant par rétroaction arrière ou backward induction ; on a d'abord

$$V(D) = 5, \ V(D') = 2$$

on remonte ensuite aux villes précédentes, le principe de la programmation dynamique donne en effet :

$$V(C) = 6, \ V(C') = \min(1+V(D'), 2+V(D)) = 1+V(D') = 3, \ V(C'') = 3.$$

Réitérant l'argument, il vient :

$$\begin{aligned} V(B) &= \min(2 + V(C), 1 + V(C')) = 1 + V(C') = 4, \\ V(B') &= \min(2 + V(C'), 4 + V(C'')) = 5 \end{aligned}$$

et enfin

$$V(A) = \min(1 + V(B), 1 + V(B')) = 1 + V(B) = 5.$$

Le temps de parcours minimal est donc de 5 et correspond au seul parcours $ABC'D'E$.

Cet exemple pour élémentaire qu'il soit est instructif à plusieurs égards :

1. on voit aisément comment généraliser la stratégie précédente à des problèmes plus généraux de forme (1.1) : introduire les fonctions valeurs aux différentes dates, les calculer "en partant de la fin" puis par backward induction en utilisant le principe de la programmation dynamique,

2. dans l'exemple précédent, on n'a pas essayé tous les chemins possibles mais seulement les chemins optimaux à partir de M qui ont ici tous été déterminés. De fait, les raisonnements précédents montrent par exemple que si le voyageur de commerce s'égare en B' (par lequel il n'est pas optimal de passer partant de A) alors par la suite il sera optimal de passer par $C'D'E$.

3. Il peut paraitre curieux alors qu'on s'est posé un seul problème (issu du point A) de chercher à résoudre tous les problèmes issus des points intermédiaires. Donnons deux arguments pour lever cette objection : tout d'abord la stratégie de résolution précédente est robuste (si une erreur est commise à un moment donné et conduit à passer par une ville non optimale M alors on peut se rattraper par la suite en suivant le chemin optimal à partir de M), ensuite cette stratégie est naturelle (choisir la ville suivante en fonction de la ville où on se trouve maintenant plutôt que de suivre un plan établi exactement à l'avance) et permet de se ramener à une succession de problèmes statiques.

1.3 Croissance optimale à un secteur

On considère une économie dans laquelle à chaque période un seul bien est produit servant à la fois à la consommation et à l'investissement. On note respectivement c_t, i_t, k_t, et y_t la consommation, l'investissement, le capital et la production de période t. On suppose que $y_t = F(k_t)$, F étant la fonction de prodution, et que le capital se déprécie au taux $\delta \in [0,1]$. On a alors ;

$$c_t + i_t = y_t = F(k_t), \text{ et } k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t$$

d'où l'on tire (en posant $f(k) := F(k) + (1-\delta)k$) :

$$c_t = f(k_t) - k_{t+1}.$$

On impose évidemment à c_t et k_t d'être positifs d'où la contrainte :

$$0 \leq k_{t+1} \leq f(k_t).$$

Finalement on suppose que l'économie maximise l'utilité intertemporelle :

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t).$$

En fonction du capital ce problème devient :

$$\sup \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(f(k_t) - k_{t+1}) \right\}$$

sous les contraintes : k_0 donnée et $0 \leq k_{t+1} \leq f(k_t)$ pour $t \geq 0$. On peut généraliser le problème précédent au cas de plusieurs secteurs, au cas d'une offre de travail inélastique, à l'introduction du capital humain etc...

1.4 Un problème d'exploitation forestière

On considère une forêt qui initialement est de taille x_0, x_t est sa taille à la date t (variable d'état). Un exploitant choisit à chaque période un niveau de coupe v_t (variable de contrôle), l'évolution de la forêt est supposée régie par la dynamique :

$$x_{t+1} = H(x_t) - v_t.$$

En supposant que le prix du bois est constant égal à 1 et que le coût de l'abattage est C, le profit actualisé de l'exploitant s'écrit :

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [v_t - C(v_t)].$$

En réecrivant ce profit en fonction de la variable d'état et en imposant $v_t \geq 0$ et $x_t \geq 0$, le programme de l'exploitant se réecrit sous la forme :

$$\sup \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [H(x_t) - x_{t+1} - C(H(x_t) - x_{t+1}) \right\}$$

sous les contraintes : x_0 donnée et $0 \leq x_{t+1} \leq H(x_t)$ pour $t \geq 0$.

Chapitre 2

Horizon fini

2.1 Notations et remarques préliminaires

On se propose d'étudier des problèmes de programmation dynamique en temps discret et en horizon fini :

$$\sup_{(x_t)} \left\{ \sum_{t=0}^{T-1} V_t(x_t, x_{t+1}) + V_T(x_T) \right\} \tag{2.1}$$

sous les contraintes : $x_0 = x \in A$ donné (autrement dit x est la condition initiale), $x_t \in A$ pour $t = 1, .., T$ et $x_{t+1} \in \Gamma_t(x_t)$ pour tout $t = 0, ..., T-1$, T s'appelle l'horizon du problème et l'ensemble A est appelé espace d'états, Γ_t est une correspondance de A (i.e. une application de A dans l'ensemble des parties de A on dit aussi une application "multivoque") qui modélise les contraintes sur la dynamique ($\Gamma_t(x_t)$ est l'ensemble des successeurs possibles de x_t), les fonctions $V_t : A \times A \to \mathbb{R}$ sont les payoffs de chaque période et enfin $V_T : A \to \mathbb{R}$ est la fonction de payoff terminale. Sans perte de généralité nous suposerons ici que $V_T = 0$.

Nous avons résolu un problème de type (2.1) au chapitre précédent. Nous allons voir dans ce chapitre, qui se veut aussi peu technique que possible, comment généraliser la stratégie de résolution du problème de plus court chemin du paragraphe 1.2.

On note graph(Γ_t) le graphe de la corespondance Γ_t :

$$\text{graph}(\Gamma_t) := \{(x, y) \in A \times A : y \in \Gamma_t(x)\}.$$

On supposera en outre que les correspondances Γ_t sont à valeurs non vides i.e. $\Gamma_t(x) \neq \emptyset$ pour tout $x \in A$.

Concernant l'existence de solutions, remarquons que si l'on suppose que A est un espace métrique compact, que pour $t = 0, ..., T-1$, que graph(Γ_t) est fermé (donc compact dans $A \times A$) et que $V_t \in C^0(\text{graph}(\Gamma_t), \mathbb{R})$, alors il est trivial que ces conditions assurent que (2.1) admet au moins une solution ; ces conditions assurent aussi que $\Gamma_t(x)$ est un compact de A pour tout $x \in A$. Notons enfin que ces conditions sont *toujours* satisfaites dans le cas où l'espace d'états A est fini. Nous n'aurons cependant pas besoin dans ce qui suit de faire ces hypothèses de compacité.

2.2 Principe de la programmation dynamique

Compte tenu de la structure récursive du problème il est judicieux d'introduire les fonctions-valeur aux différentes dates. Pour $x \in A$ on définit donc :

$$\begin{aligned}
v(0,x) &:= \sup\left\{\textstyle\sum_{t=0}^{T-1} V_t(x_t, x_{t+1}) \,:\, x_{t+1} \in \Gamma_t(x_t),\, x_0 = x\right\} \\
v(1,x) &:= \sup\left\{\textstyle\sum_{t=1}^{T-1} V_t(x_t, x_{t+1}) \,:\, x_{t+1} \in \Gamma_t(x_t),\, x_1 = x\right\} \\
&\;\;\vdots \\
v(T-1,x) &:= \sup\left\{V_{T-1}(x, x_T) \,:\, x_T \in \Gamma_{T-1}(x)\right\}.
\end{aligned}$$

et enfin $v(T,x) = V_T(x) = 0$.

Dans ce qui suit nous dirons qu'une suite $(x, x_1, ..., x_T) = (x_0, x_1, ..., x_T)$ est solution du problème $v(0,x)$ si cette suite est admissible (i.e. vérifie les contraintes du problème) et

$$v(0,x) := \sum_{t=0}^{T-1} V_t(x_t, x_{t+1}).$$

On étend la définition précédente aux problèmes aux différentes dates.

Le principe de la programmation dynamique s'exprime comme suit :

Proposition 2.1 *Soit $x \in A$; si $(x_0, x_1, ..., x_T) = (x, x_1, ..., x_T)$ est une solution du problème $v(0,x)$ alors pour tout $\tau = 1, ..., T-1$, la suite $(x_\tau, ..., x_T)$ est solution du problème $v(\tau, x_\tau)$.*

Preuve. Par définition on a :

$$v(0,x) := \sum_{t=0}^{T-1} V_t(x_t, x_{t+1}). \tag{2.2}$$

Supposons que pour une date $\tau \in \{1, ..., T-1\}$, la suite $(x_\tau, ..., x_T)$ n'est pas solution du problème $v(\tau, x_\tau)$ alors il existe $(z_\tau, z_{\tau+1}, ...z_T) = (x_\tau, z_{\tau+1}, ...z_T)$ admissible pour le problème $v(\tau, x_\tau)$ telle que :

$$\sum_{t=\tau}^{T-1} V_t(x_t, x_{t+1}) < \sum_{t=\tau}^{T-1} V_t(z_t, z_{t+1}).$$

En définissant alors la suite (admissible pour $v(0, x)$) $(y_0, ..., y_T)$ par $(y_0, ..., y_T) = (x, x_1, ..., x_\tau, z_{\tau+1}, ..., z_T)$, on obtient avec (2.2) :

$$v(0, x) < \sum_{t=0}^{T-1} V_t(y_t, y_{t+1})$$

ce qui contredit la définition même de $v(0, x)$.

$\square$

Notons bien que dans la proposition, on a supposé l'existence d'une suite optimale. Sans faire cette hypothèse (et en autorisant les fonctions-valeur à prendre éventuellement la valeur $+\infty$), on obtient des relations fonctionnelles récursives (équations de Bellman) reliant les fonctions valeurs aux dates successives.

Proposition 2.2 *Soit $x \in A$, on a :*

$$v(0, x) = \sup \{V_0(x, y) + v(1, y) \; : y \in \Gamma_0(x)\} \tag{2.3}$$

De même pour $t \in \{1, ..., T-1\}$:

$$v(t, x) = \sup \{V_t(x, y) + v(t+1, y) \; : y \in \Gamma_t(x)\}. \tag{2.4}$$

Preuve. Evidemment, il suffit d'établir (2.3). Soit $y \in \Gamma_0(x)$ et $(y_1, ..., y_T) = (y, ..., y_T)$ telle que $y_{t+1} \in \Gamma_t(y_t)$ pour $t \geq 1$, la suite $(x, y_1, ..., y_T)$ étant admissible pour $v(0, x)$ il vient :

$$v(0, x) \geq V_0(x, y) + \sum_{t=1}^{T-1} V_t(y_t, y_{t+1})$$

passant au supremum en $(y_2, ..., y_T)$, puis en $y = y_1 \in \Gamma_0(x)$ dans le membre de droite il vient :

$$v(0, x) \geq \sup \{V_0(x, y) + v(1, y) : y \in \Gamma_0(x)\}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $(x_0, x_1, ..., x_T) = (x, x_1, ..., x_T)$ admissible pour $v(0, x)$ telle que :

$$v(0, x) - \varepsilon \leq \sum_{t=0}^{T-1} V_t(x_t, x_{t+1})$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned} \sup\{V_0(x, y) + v(1, y) : y \in \Gamma_0(x)\} &\geq V_0(x, x_1) + v(1, x_1) \\ &\geq \sum_{t=0}^{T-1} V_t(x_t, x_{t+1}) \geq v(0, x) - \varepsilon \end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire on en déduit (2.3). $\square$

2.3 Backward induction, stratégie de résolution

En utilisant la proposition 2.2, et la relation terminale $v(T, x) = V_T(x)$ pour tout $x \in A$, il est possible (au moins en théorie mais aussi en pratique dans certaines applications), de calculer toutes les fonctions valeurs en partant de la date finale T (backward induction). En “remontant” les équations, on calcule d'abord $v(T - 1, .)$:

$$v(T - 1, x) = \sup \{V_{T-1}(x, y) : y \in \Gamma_{T-1}(x)\}$$

puis $v(T - 2, .)$:

$$v(T - 2, x) = \sup \{V_{T-2}(x, y) + v(T - 1, y) : y \in \Gamma_{T-2}(x)\}$$

et ainsi de suite jusqu'à $v(0, .)$.

Admettons maintenant que l'on connaisse $v(0, .)$, ..., $v(T-1, .)$, il est alors très facile de caractériser les suites (ou politiques) optimales :

Proposition 2.3 *La suite $(x, x_1, ..., x_T)$ est solution de $v(0, x)$ si et seulement si pour $t = 0, .., T - 1$, x_{t+1} est solution de :*

$$\sup_{y \in \Gamma_t(x_t)} \{V_t(x_t, y) + v(t + 1, y)\} \tag{2.5}$$

Preuve. Application immédiate des propositions 2.1 et 2.2. $\square$

Notons qu'en pratique pour résoudre les équations de Bellman, on a souvent déja calculé les solutions des problèmes statiques apparaissant dans (2.3).

Il convient de bien retenir la démarche en deux étapes de ce chapitre :

1. on détermine les fonctions valeur par backward induction,

2. on détermine ensuite les politiques optimales (s'il en existe) en résolvant la suite de problèmes *statiques* (2.5) qui consistent à déterminer les successeurs optimaux x_1 de x_0 puis les successeurs optimaux de x_1 etc...

Enfin notons que la méthode présentée ici (la même que celle adoptée dans le problème du plus court chemin) est robuste car elle permet aussi de résoudre tous les problèmes intermédiaires posés à n'importe quelle date intermédiaire avec n'importe quelle condition initiale à cette date.

Chapitre 3

Horizon infini

On considère désormais des problèmes d'horizon infini avec critère escompté du type :

$$v(x) := \sup\left\{\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t V(x_t, x_{t+1}) : x_0 = x,\ x_t \in A,\ x_{t+1} \in \Gamma(x_t)\ \forall t \geq 0\right\}. \tag{3.1}$$

L'interprétation de A, Γ et V est la même que précédemment et $\beta \in]0,1[$ est un facteur d'escompte. La fonction $v(.)$ est la fonction *valeur* de (3.1), son argument est la condition initiale $x \in A$. Deux différences sont à noter avec le cas de l'horizon fini du chapitre précédent. Tout d'abord ici, le critère est la somme d'une série et les politiques optimales sont des suites (infinies), des précautions sont donc à prendre d'une part pour la définition même du critère mais surtout concernant l'existence de solutions. En outre, l'approche backward induction du chapitre précédent n'a pas de sens ici ; c'est la raison pour laquelle on se limite ici à un cadre “plus stationnaire” (Γ ne dépend pas de t et payoff instantané de la forme $\beta^t V(x_t, x_{t+1})$) qu'au chapitre précédent.

Un élément important dans l'étude de (3.1) est le lien étroit entre v la valeur du problème et l'équation fonctionnelle suivante appelée équation de Bellman :

$$w(x) = \sup_{y \in \Gamma(x)} \{V(x,y) + \beta w(y)\} \tag{3.2}$$

3.1 Notations et hypothèses

Dans tout ce chapitre, nous supposerons que A est un espace métrique compact, nous noterons d la distance sur A. Nous ferons l'hypothèse de non vacuité : $\Gamma(x) \neq \emptyset$ pour tout $x \in A$. Nous supposerons en outre que $V(.,.)$

est continue sur $A \times A$. Pour $x \in A$, nous noterons $\mathrm{Adm}(x)$ l'ensemble des suites admissibles issues de x :

$$\mathrm{Adm}(x) := \{\widetilde{x} = (x_t)_{t\geq 0} : x_0 = x,\, x_t \in A,\, x_{t+1} \in \Gamma(x_t)\ \forall t \geq 0\} \tag{3.3}$$

Pour $\widetilde{x} = (x_t)_{t\geq 0} \in \mathrm{Adm}(x)$ ou plus généralement $\widetilde{x} = (x_t)_{t\geq 0} \in A^{\mathbb{N}}$, on pose :

$$u(\widetilde{x}) := \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t V(x_t, x_{t+1}).$$

Ainsi le problème (3.1) consiste à maximiser u sur $\mathrm{Adm}(x)$. Notons que comme V est bornée sur $A \times A$ et $\beta \in]0, 1[$, u est bien définie et bornée sur $A^{\mathbb{N}}$ donc aussi sur $\mathrm{Adm}(x)$.

Nous aurons aussi besoin d'hypothèses de continuité sur la correspondance Γ (la dynamique), ceci nécessite les définitions suivantes :

Définition 3.1 *Soit X et Y deux espaces métriques et soit F une correspondance à valeurs* ***compactes non vides*** *de X dans Y, et soit $x \in X$ on dit que :*

1. *F est hémi-continue supérieurement (h.c.s.) en x si pour toute suite x_n convergeant vers x dans X et pour toute suite $y_n \in F(x_n)$, la suite y_n admet une valeur d'adhérence dans $F(x)$.*

2. *F est hémi-continue inférieurement (h.c.i.) en x si pour tout $y \in F(x)$ et pour toute suite x_n convergeant vers x dans X, il existe $y_n \in F(x_n)$ telle que y_n converge vers y dans Y.*

3. *F est continue si F hémi-continue supérieurement et inférieurement en chaque point de X.*

Dans le cas où X et Y sont des métriques compacts, dire que F est h.c.s. revient simplement à dire que son graphe :

$$\mathrm{graph}(F) := \{(x, y) : x \in X,\, y \in F(x)\ \}$$

est fermé. Noter que dans ce cas F est automatiquement à valeurs compactes.

Remarquons que dans le cas *univoque* i.e. $F(x) = \{f(x)\}$ on a équivalence entre "F est h.c.s.", "F est h.c.i" et "f est continue". Si $X = Y = \mathbb{R}$ et $F(x) = [f(x), g(x)]$ avec f et g deux fonctions continues telles que $f \leq g$ alors F est une correspondance continue. Pour fixer les idées, il est bon d'avoir en mémoire les exemples suivants :

La correspondance F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ [0,1] & \text{si} \quad x = 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

est h.c.s. mais pas h.c.i. en 0.

La correspondance G de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ [-1,1] & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

est quant à elle h.c.i. mais pas h.c.s. en 0.

Dans toute la suite, nous suposerons que Γ est une correspondance continue de A dans A.

3.2 Existence de solutions

Soit $A_\infty := A^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans A, munissons A_∞ de :

$$d_\infty(u,v) := \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{2^t} d(u_t, v_t).$$

Il est clair que d_∞ est à valeurs finies et définit une distance sur A_∞. On a alors le résultat classique de compacité (le lecteur averti reconnaitra un corollaire du théorème de Tychonov) suivant :

Proposition 3.1 (A_∞, d_∞) *est compact.*

Preuve. La démonstration est classique (compacité de A et extraction diagonale), le détail en est donc laissé au lecteur. $\square$

Lemme 3.1 *Pour tout* $x \in A$, $\mathrm{Adm}(x)$ *est un compact de* (A_∞, d_∞)

Preuve. Avec la proposition 3.1, il suffit de vérifier que $\mathrm{Adm}(x)$ est un fermé de (A_∞, d_∞). Soit donc $\widetilde{x}^n$ une suite de $\mathrm{Adm}(x)$ convergeant vers $\widetilde{x} = (x_t)_{t\geq 0} \in A_\infty$ pour la distance d_∞. Pour tout $t \in \mathbb{N}$, $\widetilde{x}_t^n$ converge vers x_t dans A quand $n \to +\infty$, en particulier $x_0 = x$. Comme Γ est de graphe fermé et que $(\widetilde{x}_t^n, \widetilde{x}_{t+1}^n) \in \mathrm{graph}(\Gamma)$ on en déduit que $x_{t+1} \in \Gamma(x_t)$ ce qui prouve finalement que $\mathrm{Adm}(x)$ est fermé. $\square$

Lemme 3.2 *u est continue sur (A_∞, d_∞).*

Preuve. Soit $\widetilde{x} = (x_t)_{t\geq 0} \in A_\infty$ et $\varepsilon > 0$. Comme V est continue et $A \times A$ compact, il existe $\tau \in \mathbb{N}$ tel que

$$\max_{A\times A} |V| \sum_{t=\tau}^{\infty} \beta^t \leq \frac{\varepsilon}{4} \tag{3.4}$$

Par continuité de V, il existe δ_0 tel que pour tout $(y, z) \in A \times A$ et tout $t \leq \tau - 1$ on ait :

$$d(x_t, y) + d(x_{t+1}, z) \leq \delta_0 \Rightarrow |V(x_t, x_{t+1}) - V(y, z)| \leq \frac{\varepsilon}{2\tau} \tag{3.5}$$

Ainsi en posant $\delta := \delta_0 2^{-\tau-1}$ pour tout $\widetilde{y} \in A_\infty$ tel que $d_\infty(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \leq \delta$ on a $|u(\widetilde{x}) - u(\widetilde{y})| \leq \varepsilon$, ce qui achève la preuve. $\square$

Des lemmes 3.1 et 3.2, on déduit le résultat d'existence :

Théorème 3.1 *Pour tout $x \in A$, il existe $\widetilde{x} \in \mathrm{Adm}(x)$ optimale i.e. telle que : $v(x) = u(\widetilde{x})$.*

3.3 Fonction valeur, équation de Bellman

On rappelle que la fonction valeur de (3.1) est définie pour tout $x \in A$ par :

$$v(x) := \sup\{u(\widetilde{x}) : \widetilde{x} \in \mathrm{Adm}(x)\}. \tag{3.6}$$

Les hypothèses de ce chapitre assurent que v est bornée sur A et le théorème 3.1 assure que le sup dans (3.6) est en fait un max. Par la suite nous dirons que $\widetilde{x}$ est solution du problème $v(x)$ ssi $\widetilde{x} \in \mathrm{Adm}(x)$ et $v(x) = u(\widetilde{x})$.

On laisse comme exercice, désormais de routine, au lecteur le soin de vérifier le principe de la programmation dynamique et le fait que v est solution de l'équation de Bellman :

Proposition 3.2 *Soit $x \in A$, on a :*

1. ***Principe de la programmation dynamique :*** *si $\widetilde{x} \in \mathrm{Adm}(x)$ est solution du problème $v(x)$ alors pour tout $\tau \geq 0$ la suite $(x_t)_{t\geq\tau}$ est solution du problème $v(x_\tau)$,*

2. *$v(.)$ est solution de l'**équation de Bellman :***

$$v(x) = \sup_{y\in\Gamma(x)} \{V(x, y) + \beta v(y)\}. \tag{3.7}$$

3.4 Théorèmes de Berge et de Blackwell

On se propose maintenant d'examiner dans quelle mesure l'équation de Bellman (3.7) caractérise la fonction valeur. Pour cela, il est utile de définir $B(A)$ comme l'ensemble des applications bornées de A dans $\mathbb{R}$. On rappelle que muni de la norme infinie ($\|f\|_\infty := \max\{|f(x)|,\ x \in A\}$), $B(A)$ est un espace de Banach et que $C^0(A, \mathbb{R})$ est un sous-espace fermé (donc complet) de $B(A)$. Pour $f \in B(A)$ et $x \in A$ on définit :

$$Tf(x) := \sup_{y \in \Gamma(x)} \{V(x,y) + \beta f(y)\}. \tag{3.8}$$

Il est facile de voir que $Tf \in B(A)$ ainsi T définit un opérateur de $B(A)$ dans lui-même. Le fait que la fonction-valeur v soit solution de l'équation de Bellman signifie exactement que $v = Tv$ autrement dit que v est un **point fixe** de T.

Le caractère contractant de T (donc en particulier l'unicité dans $B(A)$ de la solution de l'équation de Bellman) est assuré par le théorème de Blackwell :

Théorème 3.2 *Soit H un opérateur de $B(A)$ dans lui-même vérifiant les propriétés :*

1. *H est monotone i.e. : $\forall (f,g) \in B(A) \times B(A)$, $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in A$ $\Rightarrow Hf(x) \leq Hg(x)$, $\forall x \in A$,*
2. *il existe $\eta \in]0,1[$ tel que, pour toute constante positive a et tout $f \in B(A)$ on ait $H(f+a) \leq Hf + \eta a$,*

alors, H est une contraction de $B(A)$ de rapport η.

Preuve. Soit $(f,g) \in B(A) \times B(A)$, on a $f \leq g + \|f-g\|_\infty$, ainsi les hypothèses sur H impliquent :

$$Hf \leq H(g + \|f-g\|_\infty) \leq Hg + \eta \|f-g\|_\infty$$

inversant les rôles de f et g et en passant au sup en $x \in A$, il vient bien :

$$\|Hf - Hg\|_\infty \leq \eta \|f-g\|_\infty.$$

$\square$

En remarquant que T vérifie les conditions du théorème de Blackwell avec $\eta = \beta$, et en utilisant le théorème du point fixe pour les contractions, on en déduit immédiatement :

Corollaire 3.1 *L'équation de Bellman 3.7 admet une unique solution qui est la fonction valeur définie par (3.6). De plus pour tout $f \in B(A)$, v est limite uniforme de la suite des itérées $T^n f$.*

L'équation de Bellman caractérise donc bien la fonction valeur : v est l'unique solution bornée de (3.7). On peut être plus précis en remarquant que T est aussi un opérateur sur les fonctions continues et par conséquent, le point fixe de T est une fonction continue.

Proposition 3.3 *Pour tout $f \in C^0(A, \mathbb{R})$, $Tf \in C^0(A, \mathbb{R})$. Ceci implique que en particulier que la fonction-valeur v est continue.*

Preuve. La première partie du résultat précédent est une conséquence immédiate du théorème de Berge énoncé plus bas. Prouvons la seconde partie du résultat : T est une contraction de $C^0(A, \mathbb{R})$ qui est complet donc T admet un unique point fixe dans $C^0(A, \mathbb{R})$, or nous savons que l'unique point fixe de T (dans $B(A)$) est v on a donc $v \in C^0(A, \mathbb{R})$. $\Box$

Nous terminons ce paragraphe par le théorème de Berge. Ce résultat de dépendance continue pour les problèmes d'optimisation dépendant d'un paramètre est très utile en pratique et pas uniquement en programmation dynamique. Dans la littérature, ce théorème est souvent appelé théorème du maximum, nous éviterons soigneusement cette terminologie pour éviter toute confusion : il existe déja deux principes du maximum (le principe de Pontriaguine en contrôle que nous verons plus tard et le principe du maximum pour les équations elliptiques) qui n'ont rien à voir entre eux et encore moins avec le théorème de Berge ci-dessous !

Théorème 3.3 *Soit X et Y deux métriques, F une correspondance **continue, à valeurs compactes, non vides** de X dans Y, $f \in C^0(X \times Y, \mathbb{R})$. Pour tout $x \in X$ soit :*

$$g(x) := \max_{y \in F(x)} f(x, y) \text{ et } M(x) := \{y \in F(x) : f(x, y) = g(x)\}.$$

Alors g est continue sur X et M est une correspondance à valeurs non vides, h.c.s..

Preuve. Le fait que M est une correspondance à valeurs compactes non vides découle immédiatement de la continuité de V et du fait que $F(x)$ est compact non vide pour tout $x \in X$.

Montrons que g est continue. Soit donc x_n une suite de X convergeant vers x. Soit $z_n \in F(x_n)$ tel que $g(x_n) = f(x_n, z_n)$. Considérons une suite extraite (x_{n_j}, z_{n_j}) vérifiant

$$\lim_j f(x_{n_j}, z_{n_j}) = \limsup_n f(x_n, z_n) = \limsup_n g(x_n).$$

Comme F est h.c.s., quitte à extraire à nouveau, on peut supposer que z_{n_j} converge vers une limite $z \in F(x)$, ainsi $g(x) \geq f(x, z)$ et par continuité de f, on a :

$$\limsup_n g(x_n) = \lim_j f(x_{n_j}, z_{n_j}) = f(x, z) \leq g(x).$$

Soit maintenant $y \in F(x)$ tel que $g(x) = f(x, y)$, comme F est h.c.i., il existe $y_n \in F(x_n)$ telle que y_n converge vers y, comme $g(x_n) \geq f(x_n, y_n)$, il vient :

$$\liminf_n g(x_n) \geq \liminf f(x_n, y_n) = f(x, y) = g(x).$$

On a donc établi la continuité de g.

Il reste à établir que M est h.c.s.. Soit $x \in X$, x_n convergeant vers x dans X et $y_n \in M(x_n)$. Comme $M(x_n) \subset F(x_n)$ et F est h.c.s., il existe une sous-suite y_{n_j} convergeant vers une limite $y \in F(x)$. Par ailleurs pour tout j, on a $f(x_{n_j}, y_{n_j}) = g(x_{n_j})$, par continuité de f et g, en passant à la limite il vient $f(x, y) = g(x)$ i.e. $y \in M(x)$; M est donc h.c.s.. $\square$

Remarque : On peut établir directement (i.e. sans utiliser l'équation de Bellman ni le théorème de Berge) la continuité de v (le lecteur pourra vérifier cette affirmation sans difficulté, l'exercice étant cependant un peu fastidieux).

3.5 Retour aux politiques optimales

Comme dans le cas de l'horizon fini, connaitre la fonction valeur permet de calculer les stratégies optimales. Il est en effet clair (s'en persuader) que $\widetilde{x} = (x_t)_{t \geq 0} \in \mathrm{Adm}(x)$ est solution de $v(x)$ ssi pour tout $t \geq 0$, x_{t+1} résout le problème statique :

$$\max_{y \in \Gamma(x_t)} \{V(x_t, y) + \beta v(y)\}.$$

Ainsi pour déterminer les politiques optimales on détermine d'abord v en résolvant l'équation de Bellman. On définit alors la correspondance :

$$M(x) := \{y \in \Gamma(x) : v(x) = V(x, y) + \beta v(y)\}.$$

$M(x)$ s'interprète naturellement comme l'ensemble des successeurs optimaux de x, et les politiques optimales issues de x sont simplement les itérées de cette correspondance.

Dans tout ce chapitre on s'est limité au cas où V est continue et donc bornée sur le compact $A \times A$. Il est cependant naturel dans les applications économiques de considérer des fonctions d'utilité non bornées (typiquement un logarithme), les ingrédients essentiels du chapitre s'adaptent en général sans peine. Je vous renvoie à l'exercice 8 pour un exemple avec une fonction d'utilité logarithmique.

Deuxième partie

Programmation dynamique en temps continu

Chapitre 4

Calcul des Variations

On s'intéresse désormais à des problèmes de calcul des variations (en horizon fini pour simplifier). De tels problèmes consistent à maximiser un critère du type :

$$J(x) = \int_0^T L(t, x(t), \dot{x}(t))dt + g(x(T)) + f(x(0))$$

dans un ensemble de fonctions de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}^n$ jouissant de certaines propriétés de différentiabilité. Le bon cadre fonctionnel est celui des espaces de Sobolev mais pour ne pas alourdir l'exposé ni décourager le lecteur qui ne serait pas familier de ces espaces, nous nous limiterons par la suite essentiellement aux fonctions de classe C^1 ou "continues et C^1 par morceaux".

La fonction $(t, x, v) \mapsto L(t, x, v)$ est appelée Lagrangien, et on supposera toujours $L \in C^0([0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, g (respectivement f) est la fonction de gain terminal (respectivement initial) ; on supposera $g \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ (respectivement $f \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$).

Une variante est le problème à conditions aux limites prescrites :

$$\sup \left\{ \int_0^T L(t, x(t), \dot{x}(t))dt : x \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n),\ x(0) = x_0, x(T) = x_T \right\}.$$

Evidemment on peut aussi considérer le cas d'une extrémité libre et d'une extrémité prescrite. Nous n'écrirons pas les conditions d'optimalité pour tous les cas possibles, les cas "manquants" seront laissés en exercice au lecteur...

Historiquement, le calcul des variations, s'est développé depuis le 17^e siècle (problème du brachistochrone résolu par Bernoulli) conjointement au développement de la physique (la mécanique en particulier, mais aussi le problème de la résistance minimale posé par Newton dans ses *Principia* et qui reste encore largement ouvert aujourd'hui..) et de la géométrie (problèmes de géodésiques ou d'applications harmoniques par exemple). Quelques grands noms parmi les mathématiciens des trois siècles passés ont marqué son développement : Euler, Lagrange, Hamilton, Jacobi, Legendre, Weierstrass, Noether, Carathéodory... Son usage en économie est plus récent, il devient véritablement populaire à partir des années 1960 dans les modèles de croissance, d'investissement, de gestion de stocks et, plus récemment, en théorie des incitations ou des enchères. En finance, il est aussi d'usage courant d'utiliser des modèles en temps continu, les dynamiques réalistes dans ce cadre ayant un caractère aléatoire, c'est plutôt le contrôle stochastique qui est utilisé.

4.1 Existence et non-existence

Résoudre un problème de calcul des variations c'est résoudre un problème d'optimisation dans un espace fonctionnel de dimension infinie. L'existence de solutions n'a donc rien d'évident a priori et je tiens à mettre en garde le lecteur sur ce point. Il ne s'agit pas de faire ici une théorie de l'existence, pour cela on consultera par exemple le livre d' I.Ekeland et R.Temam [7] mais d'indiquer que la plupart des résultats d'existence demandent la concavité (si on maximise; la convexité si on minimise) du lagrangien par rapport à la variable v. Examinons maintenant un contre-exemple classique dû à Bolza :

$$\inf J(x) := \int_0^1 [(\dot{x}(t)^2 - 1)^2 + x^2(t)]dt : x(0) = x(1) = 0. \tag{4.1}$$

On se propose de montrer que l'infimum de ce problème est 0 et qu'il n'est pas atteint. Soit $u_0(t) := 1/2 - |t - 1/2|$ pour $t \in [0, 1]$, prolongeons u_0 à $\mathbb{R}$ par périodicité. Enfin pour $n \in \mathbb{N}^*$ soit $u_n(t) := u_0(nt)/n$, u_n vérifie les conditions aux limites du problème, $\dot{u_n}^2 = 1$ presque partout sur $[0, 1]$ et $|u_n| \leq 1/2n$ donc $J(u_n)$ tend vers 0. On en déduit donc que l'infimum de (4.1) est 0. Supposons que $J(u) = 0$ avec $u(0) = u(1) = 0$. Par définition de J on devrait avoir à la fois $u = 0$ et $\dot{u} \in \{-1, 1\}$ presque partout, ce qui est évidemment impossible. Ce qui fait fondamentalement que dans l'exemple précédent, le minimum ne soit pas atteint provient du fait que la fonction $(v^2 - 1)^2$ présente deux minima globaux en 1 et -1 ainsi l'on peut construire une suite minimisante qui n'utilise que ces deux vitesses optimales en oscillant de plus en plus. Pour éviter ce phénomène, il faut imposer une condition de convexité du Lagrangien par rapport à v.

Indiquons sur un exemple très simple comment établir l'existence de solutions dans le cadre des espaces de Sobolev par ce que l'on appelle la méthode directe du calcul des variations. Prenons l'exemple élémentaire suivant :

$$\inf_{x \in H^1} \int_0^1 [\frac{1}{2}|\dot{x}(t)|^2 + \frac{1}{2}|x(t)|^2 + g(t, x(t))]dt \tag{4.2}$$

où g est une fonction continue et positive et H^1 désigne l'espace de Sobolev formé par les fonctions qui sont des primitives de fonctions L^2, i.e. $x \in H^1 = W^{1,2}$ s'il existe $v \in L^2$ telle que pour $0 \leq s \leq t \leq 1$:

$$x(t) - x(s) = \int_t^s v(\tau) d\tau$$

dans ce cas v est unique et est la dérivée (au sens faible) de x : $v = \dot{x}$. H^1 est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\int_0^1 [\dot{x}(t)\dot{y}(t) + x(t)y(t)]dt$$

la norme correspondante étant donc :

$$\|x\|_{H^1} := \Big(\int_0^1 [\dot{x}^2 + x^2] dt \Big)^{1/2}.$$

Pour $x \in H^1$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$|x(t) - x(s)| \leq \int_s^t |\dot{x}| \leq (t-s)^{1/2} \|\dot{x}\|_{L^2} \leq (t-s)^{1/2} \|x\|_{H^1} \tag{4.3}$$

de sorte que x est 1/2-Hölder continue. On a ainsi en particulier

$$|x(0)| \leq |x(t)| + t^{1/2} \|\dot{x}\|_{H^1} \leq |x(t)| + \|\dot{x}\|_{L^2}$$

en intégrant et en utilisant à nouveau l'inégalité de Cauchy Schwarz on a donc :

$$|x(0)| \leq \int_0^1 |x| + \|\dot{x}\|_{L^2} \leq \|x\|_{L^2} + \|\dot{x}\|_{L^2} \leq 2\|x\|_{H^1}.$$

Ainsi les fonctions de H^1 sont bornées, et 1/2-Hölder continues avec des bornees explicites. On peut donc démontrer :

Théorème 4.1 *Le problème (4.2) possède au moins une solution*

Preuve. Soit $(x_n)_n$ une suite minimisante c'est à dire une suite telle que $J(x_n) \to \inf(4.2)$ alors comme $g \geq 0$ on a que x_n est bornée dans H^1. Comme H^1 est un espace de Hilbert, on peut extraire une sous suite, encore notée x_n qui converge faiblement vers un certain $\overline{x} \in H^1$ et par semi-continuité inférieure faible de la norme on a aussi

$$\|\overline{x}\|_{H^1}^2 \leq \liminf_n \|x_n\|_{H^1}^2. \tag{4.4}$$

Par ailleurs, la suite x_n est uniformément bornée et équi-1/2-Holder continue, il découle donc du théorème d'Ascoli (cf chapitre suivant) que, quitte à effectuer encore une extraction, on peut supposer que x_n converge uniformément (vers $\overline{x}$ évidemment) et donc avec le thèorème de convergence dominée on a

$$\lim_n \int_0^1 g(t, x_n(t))dt = \int_0^1 g(t, \overline{x}(t))dt. \tag{4.5}$$

Ainsi, combinant (4.4) et (4.5) on en déduit que

$$J(\overline{x}) \leq \liminf_n J(x_n) = \inf(4.2)$$

ce qui montre finalement que $\overline{x}$ résout (4.2).

$\square$

4.2 Equation d'Euler-Lagrange et conditions de transversalité

Considérons le problème :

$$\sup_{x \in C^1([0,T],\mathbb{R}^n)} J(x) = \int_0^T L(t, x(t), \dot{x}(t))dt + g(x(T)) + f(x(0)) \tag{4.6}$$

On suppose dans tout ce paragraphe que les fonctions $(t, x, v) \mapsto L(t, x, v)$, $x \mapsto g(x)$ et $x \mapsto f(x)$ sont de classe C^1. Pour $i = 1, ..., n$, nous noterons L_{v_i}, L_{x_i} les dérivées partielles $\frac{\partial L}{\partial v_i}$ et $\frac{\partial L}{\partial v_i}$ et $\nabla_v L$ et $\nabla_x L$ les gradients partiels de L par rapport à x et v respectivement (i.e. $\nabla_v L = (L_{v_1}, ..., L_{v_n})'$, $\nabla_x L = (L_{x_1}, ..., L_{x_n})'$).

Proposition 4.1 *Soit $x \in C^1([0,T],\mathbb{R}^n)$, alors si x est solution de (4.6), on a*

1. *x est solution des équations d'Euler-Lagrange :*

$$\frac{d}{dt}[\nabla_v L(t, x(t), \dot{x}(t))] = \nabla_x L(t, x(t), \dot{x}(t)) \tag{4.7}$$

2. *x vérifie les conditions de transversalité :*

$$\nabla_v L(0, x(0), \dot{x}(0)) = f'(x(0)),\ \nabla_v L(T, x(T), \dot{x}(T)) = -g'(x(T)). \tag{4.8}$$

3. *Si on suppose en outre que g et f sont concaves sur $\mathbb{R}^n$ et que pour tout $t \in [0,T]$, $L(t,.,.)$ est concave sur $\mathbb{R}^n$, alors si $x \in C^1([0,T],\mathbb{R}^n)$ vérifie les équations d'Euler-Lagrange (4.7) et les conditions de transversalité (4.8) alors x est solution de (4.6).*

Preuve.

Pour $h \in C^1([0,T],\mathbb{R}^n)$ on a d'abord :

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}[J(x+th) - J(x)] \le 0. \tag{4.9}$$

En utilisant la formule des accroissements finis et le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient facilement que la limite précédente vaut :

$$\begin{aligned}\int_0^T [\nabla_x L(t,x(t),\dot{x}(t)).h(t) + \nabla_v L(t,x(t),\dot{x}(t)).\dot{h}(t)]dt \\ +g'(x(T)).h(T) + f'(x(0)).h(0)\end{aligned} \tag{4.10}$$

En utilisant (4.9), (4.10) et la transformation $h \mapsto -h$, il vient que pour tout $h \in C^1([0,T],\mathbb{R}^n)$ on a :

$$\begin{aligned}\int_0^T [\nabla_x L(t,x(t),\dot{x}(t)).h(t) + \nabla_v L(t,x(t),\dot{x}(t)).\dot{h}(t)]dt \\ +g'(x(T)).h(T) + f'(x(0)).h(0) = 0\end{aligned} \tag{4.11}$$

Soit

$$E_n := \{h \in C^1([0,T],\mathbb{R}^n) : h(0) = h(T) = 0\} \tag{4.12}$$

En prenant $h \in E_n$ (4.11), et en raisonnant coordonnée par coordonnée, on obtient ainsi que pour tout $i = 1,...,n$ et tout $h \in E_1$ on a :

$$\int_0^T [L_{x_i}(t,x(t),\dot{x}(t))h(t) + L_{v_i}(t,x(t),\dot{x}(t)).\dot{h}(t)]dt = 0 \tag{4.13}$$

Le Lemme de Dubois-Reymond rappelé plus bas implique donc que pour tout $i = 1,...,n$, on a :

$$\frac{d}{dt}[L_{v_i}(t,x(t),\dot{x}(t))] = L_{x_i}(t,x(t),\dot{x}(t)) \tag{4.14}$$

on a donc établi (4.7). Soit maintenat $h \in C^1([0,T],\mathbb{R}^n$, en utilisant (4.7), et en intégrant par parties (4.11), on obtient ainsi :

$$(\nabla_v L(T,x(T),\dot{x}(T))+g'(x(T)))h(T)+(f'(x(0))-\nabla_v L(0,x(0),\dot{x}(0)))h(0) = 0 \tag{4.15}$$

on déduit ainsi aisément (4.8) de l'arbitrarité de h dans (4.15).

Il nous reste à vérifier que (4.7) et (4.8) sont suffisantes dans le cas concave. Soit $x \in C^1([0,T],\mathbb{R}^n)$ qui vérifie les équations d'Euler-Lagrange (4.7) et les conditions de transversalité (4.8) et $y \in C^1([0,T],\mathbb{R}^n)$. Par concavité on a :

$$\begin{aligned} J(y) - J(x) \leq & \int_0^T [\nabla_x L(t,x(t),\dot{x}(t)).(y(t)-x(t))]dt \\ & + \int_0^T [\nabla_v L(t,x(t),\dot{x}(t)).(\dot{y}(t)-\dot{x}(t))]dt \\ +g'(x(T)).(y(T)-x(T)) & + f'(x(0))(y(0)-x(0)) \\ & = 0 \end{aligned}$$

la dernière égalité est obtenue en intégrant par parties et en utilisant (4.7) et (4.8).

$\square$

Il nous reste à établir le Lemme de Dubois-Reymond :

Lemme 4.1 *Soit ϕ et ψ dans $C^0([0,T],\mathbb{R})$ et E_1 définie par (4.12), on a alors équivalence entre :*

1. *ψ et de classe C^1 et $\dot{\psi} = \phi$,*
2. *pour tout $h \in E_1$:*
$$\int_0^T (\phi h + \psi \dot{h}) = 0.$$

Preuve. Pour démontrer 1. $\Rightarrow$ 2, il suffit d'intégrer par parties. Démontrons 2. $\Rightarrow$ 1.. Soit F une primitive de ϕ, l'hypothèse s'écrit alors :

$$\int_0^T (\psi - F)\dot{h} = 0, \ \forall h \in E_1.$$

Soit $c := T^{-1} \int_0^T (\psi - F)$ on a :

$$\int_0^T (\psi - F - c)\dot{h} = 0, \ \forall h \in E_1. \tag{4.16}$$

Il suffit de remarquer que la fonction $h(t) := \int_0^t (\psi - F - c)$ appartient à E_1, avec (4.16) il vient donc $\psi = F + c$ ce qui achève la preuve par construction de F.

$\square$

4.3 Principe de la programmation dynamique

On définit la fonction valeur

$$v(t,x) := \sup \left\{ \int_t^T L(s, y(s), \dot{y}(s))ds + g(y(T)) : y \in C^1([t,T], \mathbb{R}^n) \ y(t) = x \right\} \tag{4.17}$$

Clairement v vérifie la condition aux limites :

$$v(T,x) = g(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n \tag{4.18}$$

Le **principe de la programmation dynamique** dit que : "si une courbe $y(.)$ issue de x en $t = 0$ est optimale entre 0 et T alors elle est encore optimale entre t et T parmi les courbes valant $y(t)$ à la date t". Ce principe se traduit ici par la relation suivante :

Proposition 4.2 *La fonction valeur vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $t \in [0,T]$:*

$$v(0,x) = \sup\{ \int_0^t L(s, y(s), \dot{y}(s))ds + v(t, y(t)) \ : y(0) = x\} \tag{4.19}$$

On laisse au lecteur le soin de prouver le principe de la programmation dynamique sous la forme (4.19). Notons que (4.19) est une équation fonctionnelle satisfaite par la fonction valeur (noter l'analogie avec le temps discret).

4.4 Equation d'Hamilton-Jacobi

Nous allons voir qu'une autre propriété de v est qu'elle est solution d'une équation aux dérivées partielles (EDP) du premier ordre appelée équation d'Hamilton-Jacobi :

Proposition 4.3 *Supposons v régulière, alors v est solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi :*

$$\partial_t v(t,x) + H(t, x, \nabla_x v(t,x)) = 0. \tag{4.20}$$

où H est l'Hamiltonien défini pour tout $p \in \mathbb{R}^n$ par :

$$H(t,x,p) := \sup_{q \in \mathbb{R}^n} \{q.p + L(t,x,q)\} \tag{4.21}$$

Preuve. Pour simplifier, nous supposerons qu'il existe des trajectoires optimales, i.e. que le sup dans (4.17) est atteint. Soit $[t, t+\Delta t] \subset [t, T]$, $p \in \mathbb{R}^n$ et z une solution optimale du problème $v(t+\Delta t, x+p\Delta t)$ considérons ensuite la fonction y telle que $y(s) = x+p(s-t)$ sur $[t, t+\Delta t]$ et $y = z$ sur $[t, t+\Delta t]$. Par définition de v on a alors :

$$\begin{aligned} v(t,x) \geq & \int_t^{t+\Delta t} L(s, x+p(s-t), p)ds + v(t+\Delta t, x+p\Delta t) \\ =& v(t,x) + \Delta t[L(t,x,p) + \partial_t v(t,x) + \nabla_x v(t,x).p + o(1)] \end{aligned}$$

En divisant par Δt et en faisant $\Delta t \to 0$, il vient :

$$\partial_t v(t,x) + L(t,x,p) + \nabla_x v(t,x).p \leq 0$$

comme p est arbitraire, en passant au sup en p, on obtient que v est une sous-solution de (4.20) :

$$\partial_t v(t,x) + H(t,x,\nabla_x v(t,x)) \leq 0.$$

Soit maintenant y une solution optimale du problème $v(t,x)$, par le principe de la programmation dynamique, notons que y est aussi optimal pour $v(t+\Delta t, y(t+\Delta t)$:

$$\begin{aligned} v(t,x) =& \int_t^T L(s, y(s), \dot{y}(s))ds + C(y(T)) \\ =& \int_t^{t+\Delta t} L(s, y(s), \dot{y}(s))ds + v(t+\Delta t, y(t+\Delta t) \\ =& v(t,x) + \Delta t[L(t,x,\dot{y}(t)) + \partial_t v(t,x) + \nabla_x v(t,x).\dot{y}(t) + o(1)] \end{aligned}$$

En divisant par Δt et en faisant $\Delta t \to 0$, il vient :

$$\partial_t v(t,x) + L(t,x,\dot{y}(t)) + \nabla_x v(t,x).\dot{y}(t) = 0$$

ainsi v est aussi sur-solution (4.20) :

$$\partial_t v(t,x) + H(t,x,\nabla_x v(t,x)) \geq 0.$$

□

Notons que dans notre démonstration heuristique nous avons supposé qu'il existait des trajectoires optimales mais surtout que v était régulière (ce qui n'est généralement pas le cas). De plus, on aimerait que v puisse être caractérisée comme étant l'unique solution du problème de Cauchy :

$$\begin{aligned} \partial_t v(t,x) + H(t,x,\nabla_x v(t,x)) = 0, \\ v(T,.) = g(.). \end{aligned}$$

Pour arriver à des résultats de ce type et sans faire l'hypothèse irréaliste que v est régulière, il faut recourir à la notion de *solution de viscosité*. Le lecteur intéressé consultera avec profit le livre de G. Barles sur le sujet [4].

4.5 Exemple d'un modèle consommation-épargne

On se place en temps continu sur la période $[0, T]$ et on considère un ménage dont on note $x(t)$, $S(t)$, $c(t)$ et $e(t)$ la richesse, le salaire instantané (exogène), la consommation et l'épargne enfin on suppose que le ménage cherche à maximiser l'utilité :

$$\int_0^T e^{-\delta t} \log(c(t))dt + e^{-\delta T} V(x(T)).$$

On a les relations :

$$S(t) = c(t) + e(t), \ \dot{x}(t) = e(t) + rx(t)$$

avec r le taux d'intérêt exogène (et supposé constant pour simplifier). La richesse initiale du ménage x_0 étant donnée, le choix optimal consommation-épargne du ménage se ramène ainsi au problème variationnel :

$$\sup J(x) := \int_0^T e^{-\delta t} \log(S(t) + rx(t) - \dot{x}(t))dt + e^{-\delta T} V(x(T)) : x(0) = x_0 \tag{4.22}$$

En supposant en outre que V est concave, les conditions du premier ordre sont des conditions suffisantes d'optimalité. En posant $c(t) = S(t) + rx(t) - \dot{x}(t)$, l'équation d'Euler-Lagrange s'écrit ici :

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{e^{-\delta t}}{c(t)}\right) = \frac{re^{-\delta t}}{c(t)}$$

en posant $y(t) = e^{-\delta t}/c(t)$ il vient donc : $y(t) = e^{-rt}/c(0)$ et donc :

$$c(t) = e^{(r-\delta)t} c(0)$$

Il reste à déterminer la constante $c(0)$, pour cela il faut d'une part revenir à la variable (d'état) x, en intégrant $\dot{x} - rx = S - c$ d'autre part utiliser la condition de transversalité en T qui ici s'écrit :

$$V'(x(T)) = \frac{1}{c(T)}.$$

Chapitre 5

Introduction au contrôle optimal

5.1 Introduction

Dasns ce chapitre, nous allons étudier des problèmes du type :

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} J(u) := \int_0^T L(s, y_u(s), u(s))ds + g(y_u(T))$$

dans une certaine classe de fonctions $\mathcal{U}$ pour u (le contrôle aussi appelé commande) où y_u (l'état) est (indirectement) relié à u via l'équation différentielle (contrôlée) appelée équation d'état

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),\ x(0) = x_0.$$

La condition initiale x_0 est donnée et appartient à $\mathbb{R}^d$, L s'appelle le Lagrangien et g est le coût final. Dans toute la suite, on se donnera un espace métrique K et l'ensemble des contrôles admissibles $\mathcal{U}$ sera simplement l'esemble des fonctions u mesurables de $[0, T]$ à valeurs dans K. La fonction f qui régit la dynamique du système est définie sur $[0, T] \times \mathbb{R}^d \times K$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

Le contrôle optimal peut être vu comme une généralisation du calcul des variations abordé au chapitre précédent et qui correspond au cas particulier o 'u $\dot{x} = u$ (sans contrainte particulière sur u alors que maintenant nous imposons que u est à valeurs dans K, ce qui correspond à des contraintes sur le contrôle et ne pose pas de difficultés particulières). Nous suposons à partir de maintenant que K est compact.

5.2 Equations différentielles contrôlées

Nous allons d'abord établir que sous certaines hypothèses naturelles sur f, pour tout contrôle admissible $u \in \mathcal{U}$ et toute condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^d$, l'équation

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),\ x(0) = x_0 \tag{5.1}$$

possède une unique solution

Nous supposerons désormais que f est continue sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d \times K \to \mathbb{R}^d$ et vérifie la condition de Lipschitz : il existe $M > 0$ tel que

$$|f(t,x,u) - f(t,y,u)| \leq M|x-y|,\ \forall (t,x,y,u) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times K. \tag{5.2}$$

Sous ces hypothèses, on a le théorème d'existence et d'unicité de type Cauchy-Lipschitz

Theorem 5.1 *Sous les hypothèses ci dessus, pour tout contrôle admissible $u \in \mathcal{U}$ et toute condition initiale x_0, (5.1) admet une solution unique (que nous noterons désormais y_u).*

Proof:
Munissons $E := C^0([0,T], \mathbb{R}^d)$ de la norme :

$$\|x\|_\lambda := \sup_{t \in [0,T]} e^{-\lambda t} |x(t)|$$

(λ est un paramètre réel positif que nous choisirons ultérieurement). Il est classique que E muni de cette norme (équivalente à la norme de la converegence uniforme) est de Banach. On reformule maintenant (5.1) sous forme intégrale comme le problème de point-fixe $x = Tx$ avec $T : E \to E$ défini par

$$Tx(t) := x_0 + \int_0^t f(s, x(s), u(s)),\ \forall t \in [0,T],\ \forall x \in E.$$

Soit x et y dans E et $t \in [0,T]$, avec (5.2), on a

$$|Tx(t) - Ty(t)| \leq M \int_0^t |x(s) - y(s)| ds \leq M \int_0^t \|x-y\|_\lambda e^{\lambda s} ds \leq \frac{M}{\lambda} \|x-y\|_\lambda e^{\lambda t}.$$

ainsi

$$\|Tx - Ty\|_\lambda \leq \frac{M}{\lambda} \|x-y\|_\lambda$$

et donc T est une contraction dès que $\lambda > M$. Existence et unicité découlent alors du théorème du point fixe pour les contractions de Banach.

□

Rappelons aussi une forme classique du lemme de Gronwall

Lemme 5.1 *Si $x \in C^0([0,T],\mathbb{R}^d)$ satisfait, pour des constantes $a \geq 0$ et $b \geq 0$*

$$|x(t)| \leq a + b\int_0^t |x(s)|ds, \forall t \in [0,T] \tag{5.3}$$

alors

$$|x(t)| \leq ae^{bt}, \forall t \in [0,T]. \tag{5.4}$$

Proof:
Soit $y(t) = \int_0^t |x(s)|ds$, alors $\dot{y} - by \leq a$. En multipliant cette inégalité par e^{-bt}, il vient

$$\frac{d}{dt}(y(t)e^{-bt} + \frac{a}{b}e^{-bt}) \leq 0$$

de sorte que

$$y(t) \leq y(0)e^{bt} + \frac{a}{b}e^{bt} - \frac{a}{b} = \frac{a}{b}e^{bt} - \frac{a}{b}$$

ainsi avec (5.3), on obtient

$$|x(t)| \leq a + by(t) \leq ae^{bt}.$$

□

Soit $u \in \mathcal{U}$ et $x = y_u$, on a alors

$$\begin{aligned}|x(t)| &\leq |x_0| + \int_0^t |f(s,x(s),u(s)) - f(s,0,u(s))|ds + \int_0^t |f(s,0,u(s))|ds \\ &\leq |x_0| + T\max_{(s,u)\in[0,T]\times K}|f(s,0,u)| + M\int_0^t |x(s))|ds\end{aligned}$$

on déduit ainsi de cette inégalité et du lemme de Gronwall's Lemma qu'il existe C telle que

$$|y_u(t)| \leq C,\ \forall u \in \mathcal{U},\ \forall t \in [0,T]. \tag{5.5}$$

5.3 Principe de Pontryagin

Dans la preuve complète du principe de Pontryagin, nous utiliserons l'important théorème d'Ascoli :

Theorem 5.2 *Soit $\mathcal{F}$ une partie de $C^0([0,T],\mathbb{R}^d)$ telle que :*

$$\exists M\ :\ |f(t)| \leq M,\ \forall t \in [0,T],\ \forall f \in \mathcal{F} \tag{5.6}$$

et

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ :\ |f(t) - f(s)| \leq \varepsilon,\ \forall f \in \mathcal{F}, \forall\ t, s,\ tq\ |t - s| \leq \delta \qquad (5.7)$$

alors $\mathcal{F}$ *est relativement compacte (i.e. d'adhérence compacte) dans* $C^0([0,T], \mathbb{R}^d)$ *pour la norme de la convergence uniforme.*

Proof:
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, il s'agit d'extraire de cette suite une sous-suite qui converge uniformément. Soit $(t^k)_k$ la suite dense de $[0,T]$ formée par les points de la forme mT/p avec $m \leq p$, m et p entiers. Pour chaque k, la suite (de vecteurs de $\mathbb{R}^d$) $(f_n(t^k))$ est bornée et donc possède une sous-suite qui converge. Par un argument standard d'extraction diagonale, il existe une sous-suite (que nous noterons encore f_n) ayant la propriété que $(f_n(t^k))$ converge pour tout k, vers une limite que nous notons $g(t^k)$. On déduit de (5.7) que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ :\ |g(t^k) - g(t^l)| \leq \varepsilon,\ \forall\ k, l, \text{ tels que } |t^k - t^l| \leq \delta. \qquad (5.8)$$

Si $t \in [0,T]$ et $(t^{k_n})_n$ converge vers t, on déduit de (5.8) que $g(t^{k_n})$ est de Cauchy et donc possède une limite dont il est clair, toujours par (5.8), qu'elle ne dépend pas de la suite approximante (t^{k_n}), on note donc simplement g cette limite (qui est continue par passage toujours par (5.8)). Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tous t et s tels que $|t - s| \leq \delta$, on a

$$|f_n(t) - f_n(s)| \leq \varepsilon/3,\ |g(t) - g(s)| \leq \varepsilon/3.$$

Soit p tel $T/p \leq \delta$ et N suffisament grand pour que, pour tout $n \geq N$ et $m = 0, ..., p$ on ait $|f_n(mT/p) - g(mT/p)| \leq \varepsilon/3$. Alors, pour $n \geq N$ et $t \in [0,T]$, soit m tel que $|t - mT/p| \leq \delta$, on a

$$\begin{aligned}|f_n(t) - g(t)| \leq & |f_n(t) - f_n(mT/p)| + |f_n(mT/p) - g(mT/p)| + |g(mT/p) - g(t)| \\ \leq & \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.\end{aligned}$$

Ce qui prouve que f_n converge uniformément vers g. $\Box$

L'hypothèse (5.7) dite d'uniforme équi-continuité de $\mathcal{F}$ est fondamentale pour la compacité. Un cas particulier important est celui où tous les éléments f de $\mathcal{F}$ sont C-Lipschitz pour une même constante $C > 0$ (on dit alors que $\mathcal{F}$ est equi-Lipschitz) auquel cas, on a (5.7) avec $\delta = \varepsilon/C$. De même si tous les éléments de $\mathcal{F}$ sont équi-Hölderiens d'exposant $\alpha \in]0,1[$:

$$|f(t) - f(s)| \leq C|t - s|^\alpha,\ \forall (t, s, f) \in [0,T]^2 \times \mathcal{F}$$

alors $\mathcal{F}$ est uniformément équicontinue (prendre $\delta = \varepsilon^{1/\alpha}/C^{1/\alpha}$).

On souhaite maintenant donner des conditions d'optimalité pour

$$\sup_{u\in\mathcal{U}} J(u) := \int_0^T L(t, y_u(t), u(t))dt + g(y_u(T)) \tag{5.9}$$

En plus des hypothèses précédentes, on suppose :

- L est continue, différentiable par rapport à x et $\nabla_x L$ est continue en ses trois arguments (t, x, u),
- g est de classe C^1,
- f est différentiable par rapport à x et $D_x f$ est continue en ses trois arguments (t, x, u).

Supposons que $\overline{u}$ est un contrôle optimal (i.e. résout (5.9)) et soit $\overline{x} := y_{\overline{u}}$ l'état optimal correspondant. Supposons aussi pour simplifier que $\overline{u}$ est continu par morceaux (i.e. il existe $0 = t_0 < t_1 < .... < t_k = T$ tels que $\overline{u}$ est continu sur chaque intervalle $]t_i, t_{i+1}[$) ce qui implique que $\overline{x}$ est C^1 par morceau (i.e. continu avec une dérivée continue par morceaux).

Soit $t \in (0, T)$ un point de continuité de $\overline{u}$ et $v \in K$ un contrôle admissible (constant) arbitraire. Pour $\varepsilon \in (0, t)$, posons

$$u_\varepsilon(s) = \begin{cases} v & \text{si } s \in (t-\varepsilon, t] \\ \overline{u}(s) & \text{sinon.} \end{cases}$$

et notons $x_\varepsilon := y_{u_\varepsilon}$ l'état associé à ce contrôle modifié.

Lemma 5.1 *Soit $z_\varepsilon := \varepsilon^{-1}(x_\varepsilon - \overline{x})$ alors z_ε est borné, z_ε converge simplement $z = 0$ sur $[0, t)$ et z_ε converge uniformément sur $[t, T]$ vers la fonction z qui résout l'équation linéarisée :*

$$\dot{z}(s) = D_x f(s, \overline{x}(s), \overline{u}(s))z(s) \text{ on } (t, T],\ z(t) = f(t, \overline{x}(t), v) - f(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)). \tag{5.10}$$

Proof:
Tout d'abord, il est clair par construction même que $z_\varepsilon = 0$ sur $[0, t-\varepsilon)$ et donc z_ε converge vers 0 sur $[0, t)$.

Etape 1 : z_ε est uniformément bornée.
Pour $s \geq t$, on a :

$$z_\varepsilon(s) = I(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_t^s [f(\theta, x_\varepsilon(\theta), \overline{u}(\theta)) - f(\theta, \overline{x}(\theta), \overline{u}(\theta))]d\theta \tag{5.11}$$

où

$$I(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^{t}[f(\theta, x_\varepsilon(\theta), v) - f(\theta, \overline{x}(\theta), \overline{u}(\theta))]d\theta.$$

Avec (5.5), l'intégrande dans $I(\varepsilon)$ est borné et donc $|I(\varepsilon)| \leq M_0$ pour une certaine constante M_0. Avec (5.2), on a donc

$$|z_\varepsilon(s)| \leq M_0 + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t}^{s}|f(\theta, x_\varepsilon(\theta), \overline{u}(\theta)) - f(\theta, \overline{x}(\theta), \overline{u}(\theta))|d\theta \leq M_0 + M\int_{t}^{s}|z_\varepsilon|$$

avec le lemme de Gronwall, on en déduit que z_ε est borné et plus précisément :

$$|z_\varepsilon(s)| \leq M_0 e^{M(s-t)}, \forall s \in [t, T].$$

Pour alléger les notations, notons simplement M_1 une constante telle que $|x_\varepsilon - \overline{x}| \leq M_1\varepsilon$ sur $[0, T]$.

Etape 2 : Convergence de $z_\varepsilon(t)$.
Ecrivons

$$\begin{aligned} z_\varepsilon(t) = &\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^{t}[f(s, \overline{x}(s), v) - f(s, \overline{x}(s), \overline{u}(s))]ds \\ &+ \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^{t}[f(s, x_\varepsilon(s), v) - f(s, \overline{x}(s), v)]ds \end{aligned}$$

Le second terme est borné par $MM_1\varepsilon$ et donc converge vers 0. Comme t est un point de continuité de $\overline{u}$, on en déduit que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} z_\varepsilon(t) = f(t, \overline{x}(t), v) - f(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)). \tag{5.12}$$

Etape 3 : z_ε est equi-Lipschitz sur $[t, T]$.
Soit t_1 et t_2 tels que $T \geq t_2 \geq t_1 \geq t$, alors

$$|z_\varepsilon(t_2) - z_\varepsilon(t_1)| \leq \frac{M}{\varepsilon}\int_{t_1}^{t_2}|z_\varepsilon(s)|ds \leq MM_1(t_2 - t_1). \tag{5.13}$$

Ainsi, la famille z_ε est equi-Lipschitz sur $[t, T]$. Il découle donc du théorème d'Ascoli's theorem (vu plus haut) que $(z_\varepsilon)_\varepsilon$ est précompacte dans $C^0([t, T], \mathbb{R}^d)$.

Etape 4 : z_ε converge sur $[t, T]$ vers la solution de l'équation linéarisée (5.10).
En vertu de l'étape 3, il existe $\varepsilon_n \to 0$ telle que $z_n := z_{\varepsilon_n}$ converge uniformément vers un certain $z \in C^0([t, T])$. Pour t_1 et t_2 tels que $T \geq t_2 \geq t_1 > t$, on a

$$z_n(t_2) - z_n(t_1) = \frac{1}{\varepsilon_n}\int_{t_1}^{t_2}[f(s, \overline{x} + \varepsilon_n z_n, \overline{u}(s)) - f(s, \overline{x}(s), \overline{u}(s)]ds. \tag{5.14}$$

Grâce à la differentiabilité de L et en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, en passant à la limite dans (5.14), il vient

$$z(t_2) - z(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} [D_x f(s, \overline{x}(s), \overline{u}(s)) z(s)] ds.$$

Ainsi z résout (5.10). Comme (5.10) admt z comme unique solution (Cauchy-Lipschitz), grâce à la relative compacité de la famille z_ε, ceci implique que toute la family z_ε converge uniformément vers z sur $[t, T]$ quand $\varepsilon \to 0^+$, ce qui achève la preuve. □

De l'optimalité de $\overline{u}$, on déduit :

$$0 \geq \frac{1}{\varepsilon}(J(u_\varepsilon) - J(\overline{u})) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^{t} [L(s, x_\varepsilon, v) - L(s, \overline{x}, \overline{u}))] ds$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{t}^{T} [L(s, x_\varepsilon, \overline{u}) - L(s, \overline{x}, \overline{u}))] ds + \frac{1}{\varepsilon}(g(x_\varepsilon(T) - g(\overline{x}(T))$$

Comme $\overline{u}$ est continue en t, on vérifie aisément que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^{t} [L(s, x_\varepsilon, v) - L(s, \overline{x}, \overline{u}))] ds = L(t, \overline{x}(t), v) - L(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)). \quad (5.15)$$

Utilisant le lemme 5.1, et définissant z comme dans le Lemme 5.1 comme la solution de l'équation linéarisée (5.10), on a aussi

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \int_{t}^{T} [L(s, x_\varepsilon, \overline{u}) - L(s, \overline{x}, \overline{u}))] ds = \int_{t}^{T} \nabla_x L(s, \overline{x}(s), \overline{u}(s)) \cdot z(s) ds \quad (5.16)$$

et

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon}(g(x_\varepsilon(T) - g(\overline{x}(T)) = \nabla g(\overline{x}(T)) \cdot z(T). \quad (5.17)$$

ainsi

$$\begin{aligned} 0 \geq \quad & L(t, \overline{x}(t), v) - L(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t) + \textstyle\int_t^T \nabla_x L(s, \overline{x}(s), \overline{u}(s)) \cdot z(s) ds \\ & + \nabla g(\overline{x}(T)) \cdot z(T). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Pour rendre l'inéquation précédente utilisable on cherche à se débarasser de z, à cette fin, on introduit l'état adjoint p comme étant la solution de :

$$\dot{p}(s) = -D_x f(s, \overline{x}(s), \overline{u}(s))^T p(s) - \nabla_x L(s, \overline{x}(s), \overline{u}(s)), \; s \in [0, T], \quad (5.19)$$

(où A^T est la transposée de A et l'on rappelle à toutes fins utiles que $A^T p \cdot z = p \cdot Az$) avec la condition terminale (dite de transversalité) :

$$p(T) = \nabla g(\overline{x}(T)) \quad (5.20)$$

(existence et unicité de la solution de (5.19)-(5.20) découlent du théorème de Cauchy Lipschitz, voi aussi la preuve du théorème 5.1 donné plus haut). Utilisant, les équations différentielles définissant p et z, on a :

$$\nabla g(\overline{x}(T)) \cdot z(T) = p(T) \cdot z(T) = p(t) \cdot z(t) + \int_t^T p \cdot \dot{z} + \dot{p} \cdot z$$
$$= p(t) \cdot z(t) + \int_t^T p(s) \cdot (D_x f(s, \overline{x}(s), \overline{u}(s)) z(s))\, ds$$
$$- \int_t^T (D_x f(s, \overline{x}(s), \overline{u}(s))^T p(s) - \nabla_x L(s, \overline{x}(s), \overline{u}(s))) \cdot z(s) ds$$
$$= p(t) \cdot z(t) - \int_t^T \nabla_x L(s, \overline{x}(s), \overline{u}(s)) \cdot z(s) ds$$
$$= p(t) \cdot (f(t, \overline{x}(t), v) - f(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t))) - \int_t^T \nabla_x L(s, \overline{x}(s), \overline{u}(s)) \cdot z(s) ds$$

l' inégalité (5.18) devient alors

$$0 \geq L(t, \overline{x}(t), v) - L(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)) + p(t) \cdot (f(t, \overline{x}(t), v) - f(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t))). \quad (5.21)$$

Mais comme v est un élément arbitraire de K, nous pouvons réecrire l'inégalité précédente sous la forme :

$$L(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)) + p(t) \cdot (f(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t))) = \max_{v \in K} \{L(t, \overline{x}(t), v) + p(t) \cdot f(t, \overline{x}(t), v)\}. \quad (5.22)$$

Il est naturel maintenant d'introduire le pré-Hamiltonien $\underline{H} : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times K \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ défini par :

$$\underline{H}(t, x, u, p) := L(t, x, u) + p.f(t, x, u), \ \forall (t, x, u, p) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \times K \times \mathbb{R}^d. \quad (5.23)$$

On définit ensuite le Hamiltonien $H : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ par :

$$H(t, x, p) := \sup_{u \in K} \{L(t, x, u) + p.f(t, x, u)\} = \sup_{u \in K} \underline{H}(t, x, u, p). \quad (5.24)$$

On remarque ensuite que $\underline{H}$ est différentiable par rapport à x et p avec

$$\nabla_p \underline{H}(t, x, u, p) = f(t, x, u), \ \nabla_x \underline{H}(t, x, u, p) = \nabla_x L(t, x, u) + D_x f(t, x, u)^T p.$$

Ainsi l'équation d'état (5.1) peut se réecrire :

$$\dot{\overline{x}}(s) = \nabla_p \underline{H}(s, \overline{x}(s), \overline{u}(s), p(s))$$

et l'équation adjointe (5.19) prend la forme

$$\dot{p}(s) = -\nabla_x \underline{H}(s, \overline{x}(s), \overline{u}(s), p(s)).$$

Finalement, la condition d'optimalité (5.22) exprime que le contrôle optimal maximise le pré-Hamiltonien :

$$\underline{H}(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t), p(t)) = H(t, \overline{x}(t), p(t))$$

pour chaque point de continuité t de $\overline{u}$.

Nous avons prouvé le principe de Pontryagin :

Theorem 5.3 *Soit $\overline{u}$ un contrôle optimal pour (5.9), continu par morceaux et soit $\overline{x}$ l'état optimal correspondant. Alors pour chaque point t de continuité de $\overline{u}$, on a*

$$\overline{u}(t) \in \operatorname{argmax}_{v \in K} \underline{H}(t, \overline{x}(t), v, p(t))$$

avec p l'état adjoint, i.e. la solution de

$$\dot{p}(s) = -\nabla_x \underline{H}(s, \overline{x}(s), \overline{u}(s), p(s)), \ s \in [0, T]$$

avec la condition terminale de transversalité :

$$p(T) = \nabla g(\overline{x}(T)).$$

5.4 Programmation dynamique et equation d'Hamilton-Jacobi

On définit la fonction valeur du problème de contrôle (5.9)

$$v(t, x) := \sup_u \left\{ \int_t^T L(s, y_u(s), u(s)) ds + g(y_u(T)) : y_u(t) = x \right\} \tag{5.25}$$

Clairement v vérifie la condition aux limites :

$$v(T, x) = g(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n \tag{5.26}$$

Le **principe de la programmation dynamique** dit que : “si un controle u est optimal entre 0 et T pour la condition initiale x alors il est aussi optimal entre t et T avec la condition initiale $y_u(t)$ à cette date”. Ce principe se traduit ici par la relation suivante :

Proposition 5.1 *La fonction valeur vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $t \in [0, T]$:*

$$v(0, x) = \sup_u \{ \int_0^t L(s, y_u(s), u(s)) ds + v(t, y_u(t)) : y(0) = x \} \tag{5.27}$$

5.5 Equation d'Hamilton-Jacobi

En utilisant le principe de la programmation dynamique et en étudiant comment varie la valeur entre deux dates proches t et $t + \Delta t$ et deux états proches, nous allons voir qu'une autre propriété de v est qu'elle est solution d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre appelée équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman :

Proposition 5.2 *Supposons v régulière, alors v est solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (H.J.B.) :*

$$\partial_t v(t,x) + H(t,x,\nabla_x v(t,x)) = 0. \tag{5.28}$$

où H est l'Hamiltonien défini par (5.24).

Preuve. Pour simplifier, nous supposerons qu'il existe des commandes et des trajectoires optimales, i.e. que le sup dans (5.25) est atteint. Soit $[t, t+\Delta t] \subset [t,T]$, $v_0 \in V$ et soit $z(.)$ la solution de :

$$\begin{cases} \dot{z}(s) &= f(s,z(s),v_0) \\ z(t) &= x \end{cases}$$

$u(.)$ un contrôle optimal pour le problème $v(t+\Delta t, z(t+\Delta t))$. Considérons maintenant le contrôle $w(.)$:

$$w(t) = \begin{cases} v_0 & \text{si} \quad t \in [t, t+\Delta t] \\ u(t) & \text{si} \quad t \in [t+\Delta t, T] \end{cases}$$

En notant y_w la variable d'état correspondante valant x à la date t ($y_w = z$ sur $[t, t+\Delta t]$), on a d'abord :

$$y_w(t+\Delta t) = z(t+\Delta t) = x + f(t,x,v_0)\Delta t + o(\Delta t). \tag{5.29}$$

Il vient ensuite, par définition de la valeur v :

$$\begin{aligned} v(t,x) \geq & \int_t^{t+\Delta t} L(s, y_w(s), v_0)ds + v(t+\Delta t, y_w(t+\Delta t)) \\ =& v(t,x) + \Delta t[L(t,x,v_0) + \partial_t v(t,x) + \nabla_x v(t,x).f(t,x,v_0) + o(1)] \end{aligned}$$

En divisant par Δt et en faisant $\Delta t \to 0$, il vient :

$$\partial_t v(t,x) + L(t,x,v_0) + \nabla_x v(t,x).f(t,x,v_0) \leq 0$$

comme $v_0 \in V$ est arbitraire, en passant au sup en V, on obtient que v est une sous-solution de (5.28) :

$$\partial_t v(t,x) + H(t,x,\nabla_x v(t,x)) \leq 0.$$

Soit maintenant $u(.)$ un contrôle optimal pour le problème $v(t,x)$, par le principe de la programmation dynamique, notons que $u(.)$ est aussi optimal pour $v(t+\Delta t, y_u(t+\Delta t))$:

$$\begin{aligned} v(t,x) =& \int_t^T L(s,y_u(s),u(s))ds + g(y_u(T)) \\ =& \int_t^{t+\Delta t} L(s,y_u(s),u(s))ds + v(t+\Delta t, y_u(t+\Delta t) \\ =& v(t,x) + \Delta t[L(t,x,u(t)) + \partial_t v(t,x) + \nabla_x v(t,x).f(t,x,u(t)) + o(1)] \end{aligned}$$

En divisant par Δt et en faisant $\Delta t \to 0$, il vient :

$$\partial_t v(t,x) + L(t,x,u(t)) + \nabla_x v(t,x).f(t,x,u(t)) = 0$$

ainsi, par définition de H, v est aussi sur-solution de (5.28) :

$$\partial_t v(t,x) + H(t,x,\nabla_x v(t,x)) \geq 0.$$

$\square$

Notons que la démonstration précédente est heuristique (voir les remarques faites dans le cas du calcul des variations) et que pour faire une théorie satisfaisante des équations d'Hamilton-Jacobi, il faut recourir à la notion de solutions de viscosité.

5.6 Contrôle Feedback et condition suffisante

Nous allons voir pour finir ce chapitre que si l'on connait une solution (régulière) du problème aux limites pour l'équation d'H-J-B :

$$\begin{cases} \partial_t w(t,x) + H(t,x,\nabla_x w(t,x)) = 0 \text{ sur } [0,T] \times \mathbb{R}^n \\ w(T,x) = g(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{5.30}$$

alors on peut en déduire une commande optimale *en feedback*. Une commande en feedback est une fonction qui ne dépend pas seulement du temps mais aussi de l'état du sytème, c'est donc une fonction U de $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans l'espace des contrôles V. Pour un contrôle en feedback $U(.,.)$, la dynamique de la variable d'état est régie par l'équation différentielle ordinaire :

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), U(t, y(t))),\ y(0) = x. \tag{5.31}$$

Notons qu'il est assez naturel de s'intéresser à des contrôles en feedback i.e. dépendant de l'état instantané du système : en pratique, on conduit sa voiture en fonction de sa position et de sa vitesse plutôt qu'en fonction de l'heure qu'il est...

On dira que le contrôle en feedback $U(.,.)$ est optimal pour (5.9) si le contrôle $u(t) = U(t, y(t))$ est optimal avec $y(.)$ solution du problème de Cauchy (5.31).

Théorème 5.1 *Supposons que w est une solution de classe C^1 du problème aux limites (5.30), et que pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, il existe $U(t, x) \in V$ solution du problème :*

$$\sup_{u \in V} \{L(t, x, u) + \nabla_x w(t, x).f(t, x, u)\}$$

alors U est un contrôle optimal en feedback et donc si y est solution de

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), U(t, y(t))),\ y(0) = x. \tag{5.32}$$

y est une trajectoire optimale pour (5.9) et $u^*(t) = U(t, y(t))$ est un contrôle optimal. Enfin, w est la fonction valeur du problème (5.9).

Preuve. Montrons que $u^*(t) = U(t, y(t))$ fourni par le théorème est un contrôle optimal. Pour $(t, x, u) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times V$ posons :

$$F(t, x, u) := L(t, x, u) + \nabla_x w(t, x).f(t, x, u) + \partial_t w(t, x). \tag{5.33}$$

Comme w est solution de (5.30)et par définition de U, on a :

$$0 = \max_u \{F(t, x, u)\} = F(t, x, U(t, x)). \tag{5.34}$$

Définissons pour tout contrôle u la fonctionnelle :

$$K(u) := \int_0^T F(s, y_u(s), u(s))ds$$

Avec (5.34), il vient :

$$K(u^*) = 0 \geq K(v) \text{ pour tout contrôle } v(.). \tag{5.35}$$

Soit $v(.)$ un contrôle et $y_v(.)$ l'état asscoié, on a :

$$
\begin{aligned}
K(v) &= \int_0^T F(s, y_v(s), v(s))ds \\
&= \int_0^T L(s, y_v(s), v(s))ds + \int_0^T \partial_t w(s, y_v(s))ds + \\
&\int_0^T \nabla_x w(s, y_v(s)).f(s, y_v(s), v(s))ds \\
&= J(v) - g(y_v(T)) + \int_0^T \frac{d}{dt}[w(s, y_v(s))]ds \\
&= J(v) - w(0, x).
\end{aligned}
$$

Avec (5.35), il vient donc :

$$J(u^*) - J(v) = K(u^*) - K(v) \geq 0,$$

par conséquent u^* est bien un contrôle optimal et :

$$v(0, x) = J(u^*) = K(u^*) + w(0, x) = w(0, x).$$

Par le même argument que précédemment en changeant la condition de Cauchy $(0, x)$ en (t, x) on obtient de même $v(t, x) = w(t, x)$ si bien que w est la fonction valeur. $\square$

En pratique le théorème précédent doit être vu comme une condition suffisante d'optimalité. Il permet en effet de vérifier si un candidat éventuel (fourni par le principe de Pontriaguine) est effectivement optimal.

Troisième partie

Mesures du risque

Chapitre 6

Mesures du risque

6.1 Introduction

Quelques exemples retentissants de faillites bancaires depuis les années 70 ont fait progressivement prendre conscience aux institutions financières que le contrôle des risques (un terme générique qui recouvre de multiples aspects dans le détail desquels nous n'entrerons pas ici) et l'adoption et le respect de normes communes de sécurité étaient absolument essentiels. L'exemple frappant et quelque peu rocambolesque de la faillite de la banque Barings et du scandale Nick Leeson en 1995 est encore dans tous les esprits. Nick Leeson, véritable star de la vénérable banque Barings (fondée en 1762), 25 ans à peine, réalise au début des annes 1990 des profits colossaux sur son "desk" de Singapour. Spécialisé dans le trading des produits dérivés, ses gains représentent en 1993 près de 10% des bénéfices de la banque. Jusqu'à ce que, confronté à des difficultés, il ne se mette à dissimuler ses pertes dans un compte d'erreurs. Ignorées par le contrôle totalement défaillant de la banque, les pertes s'accumulent jusqu'à représenter la moitié du capital de la Barings qui fait faillite lorsque ces pertes sont révélées.

Plus proche de nous, la faillite de Lehman brothers illustre que nulle institution financière n'est "too big to fail". C'est d'ailleurs suite à la faillite de la banque allemande Herstatt qu'est mis en place en 1974 le comité de Bâle. Ce comité, crée par les gouverneurs des banques centrales du G10, a pour principale mission de renforcer la sécurité et la fiabilité du secteur financier via la mise en place de standards en matière de contrôle prudentiel. Ses préconisations ne sont néanmoins qu'indicatives. L'accord de Bâle I (1988) préconise que les établissements de crédit provisionnent un ratio minimal de fonds propres par rapport à ses engagements. La forte croissance de l'activité des banques sur les marchés de produits dérivés dans les années 90 a rendu nécessaire une révision importante des normes bancaires dans les accords de Bâle II (2004) et Bâle III (2010) préconisant en particulier l'usage de la Value at Risk. Parallèlement aux travaux du comité de Bâle, les auteurs de [3] ont observé que la Value at Risk présentait le sérieux défaut de ne pas encourager la diversification des risques et introduit les mesures du risque, domaine de recherche très actif à l'heure actuelle.

6.2 La Value at Risk

La notion de Value at Risk correspond au montant de réserves minimal qui assure qu'il faut ajouter à une position financière pour que cette dernière reste positive avec une probabilité donnée (autrement dit c'est le montant de réserve minimal qui assure qu'un défaut ne se produira pas avec une probabilité dépassant un certain seuil fixé). Cette notion trouve ses origines dans le secteur des assurances mais son usage a été largement généralisé au secteur bancaire depuis les accords de Bâle II. Mathématiquement la Value at Risk est liée à la notion de quantile que nous allons détailler plus bas.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et X une variable aléatoire dans $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ (que nous noterons désormais simplement L^∞) c'est-à dire telle qu'il existe $M \geq 0$ telle que $|X| \leq M$ p.s., la norme L^∞ de X est alors par définition

$$\|X\|_{L^\infty} := \inf\{M \in \mathbb{R}_+ \ : \ \mathbb{P}(|X| \leq M) = 1\}.$$

On vérifie facilement que $(L^\infty, \|.\|_{L^\infty})$ est un espace de Banach (cf [5]). Pour une variable aléatoire X on définit aussi l'essentiel supremum et l'essentiel infimum de X par

$$\begin{aligned} \text{esssup} X &:= \inf\{M \in \mathbb{R} \ : \ \mathbb{P}(X \leq M) = 1\}, \\ \text{essinf} X &:= \sup\{m \in \mathbb{R} \ : \ \mathbb{P}(X \geq m) = 1\}. \end{aligned}$$

on notera au passage que $X \in L^\infty$ si et seulement si son essentiel supremum et son essentiel infimum sont finis et

$$\|X\|_{L^\infty} = \text{esssup}|X|.$$

Soit X une variable aléatoire (pas forcément L^∞ ni même intégrabe), la fonction de répartition (ou cumulative distribution function en anglais) de X est par définition donnée par

$$F_X(t) := \mathbb{P}(X \leq t), \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{6.1}$$

Voici quelques propriétés élémentaires des fonctions de répartition

Proposition 6.1 *Soit X une variable aléatoire et F_X sa fonction de répartition alors*

- F_X *est croissante,*
- F_X *est continue à droite,*
- $F_X(t^-) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} F_X(t-\varepsilon) = \mathbb{P}(X < t)$,
- $F_X(t) \to 1$ *quand* $t \to +\infty$ *et* $F_X(t) \to 0$ *quand* $t \to -\infty$.

Preuve. La croissance est évidente puisque $s \leq t \Rightarrow \{X \leq s\} \subset \{X \leq t\}$. Pour montrer que F_X est continue à droite ($F_X(t^+) = F_X(t)$, soit $t_n > t$ tendant en décroissant vers t, on a alors que $\{X \leq t\}$ est l'intersection des ensembles $\{X \leq t_n\}$ et donc $F_X(t) = \lim_{n\to\infty} F_X(t_n)$. Prenons maintenant $t_n < t$ convergeant de manière croissante vers t, on a alors que $\{X < t\}$ est la réunion des ensembles $\{X \leq t_n\}$ et donc $F_X(t^-) = \mathbb{P}(X < t)$. La dernière assertion est claire car si t_n tend en croissant vers $+\infty$ (resp. en décroissant vers $-\infty$) , $\{X \leq t_n\}$ tend vers $\{X < +\infty\} = \Omega$ (resp. $\{X = -\infty\} = \emptyset$).

$\square$

Comme F_X est croissante, elle est continue sauf éventuellement en une infinité de points, évidemment t est un point de discontinuité de F_X si et seulement si $\mathbb{P}(X = t) = F_X(t) - F_X(t^-) > 0$, de tels points s'appellent les atomes de X. Si X ne prend qu'un nombre fini de valeurs, ses atomes sont exactement ces valeurs. Notons aussi que si $X \in L^\infty$, $F_X(t) = 0$ pour $t < \mathrm{essinf} X$ et $F_X(t) = 1$ pour $t > \mathrm{esssup} X$.

Passons maintenant à la notion de quantile d'une variable aléatoire.

Définition 6.1 *Soit X une variable aléatoire et $\alpha \in]0,1[$, on dit que $t \in \mathbb{R}$ est un quantile de X au seuil α si et seulement si*

$$F_X(t^-) = \lim_{s \to t^-} F_X(s) \leq \alpha \leq F_X(t).$$

Une fonction quantile de X est une fonction $q :]0,1[\to \mathbb{R}$ vérifiant

$$F_X(q(\alpha)^-) \leq \alpha \leq F_X(q(\alpha)).$$

Pour $\alpha = 1/2$ on retrouve la notion usuelle de médiane, les quantiles généralisent cette notion à un seuil de probabilité α arbitraire. On définit les quantiles inférieurs et supérieurs de X, q_X^- et q_X^+ pour tout $\alpha \in]0,1[$ par

$$q_X^-(\alpha) := \inf\{t \in \mathbb{R} \ : \ F_X(t) \geq \alpha\}, \ q_X^+(\alpha) := \inf\{t \in \mathbb{R} \ : \ F_X(t) > \alpha\}.$$

Clairement q_X^- et q_X^+ sont croissantes et $q_X^- \leq q_X^+$, on a aussi

Lemme 6.1 *On a les équivalences*

$$F_X(t) \geq \alpha \Leftrightarrow t \geq q_X^-(\alpha) \tag{6.2}$$

et

$$F_X(t^-) \leq \alpha \Leftrightarrow t \leq q_X^+(\alpha). \tag{6.3}$$

De plus si $0 < \beta < \alpha < 1$ *alors* $q_X^+(\beta) \leq q_X^-(\alpha)$ *et donc* $q_X^+(\alpha^-) \leq q_X^-(\alpha) \leq q_X^+(\alpha)$ *de sorte que* $q_X^- = q_X^+$ *en chaque point de continuité de* q_X^+ *; en particulier* $q_X^- = q_X^+$ *sauf sur un ensemble fini ou dénombrable.*

Preuve. Comme F_X est continue à droite, il est facile de voir que l'ensemble $\{t \in \mathbb{R} \ : \ F_X(t) \geq \alpha\}$ est un intervalle qui contient sa borne inférieure $q_X^-(\alpha)$ et donc (6.2) en découle. Supposons maintenant que $F_X(t^-) \leq \alpha$ alors pour tout $s < t$, $F_X(s) \leq \alpha$ et donc $s \leq q_X^+(\alpha)$, en faisant tendre s vers t^-, on en déduit que $t \leq q_X^+(\alpha)$. Si $t \leq q_X^+(\alpha)$ alors pour tout $s < t$ on a $F_X(s) \leq \alpha$ et donc $F_X(t^-) \leq \alpha$.

Soit $\beta < \alpha$ et supposons par l'absurde que $q_X^+(\beta) > q_X^-(\alpha)$ soit alors $\varepsilon > 0$ tel que $q_X^+(\beta) - \varepsilon > q_X^-(\alpha)$ on a alors

$$\beta \geq F_X(q_X^+(\beta)^-) \geq F_X(q_X^+(\beta) - \varepsilon) \geq F_X(q_X^-(\alpha)) \geq \alpha$$

ce qui est absurde. En un point de continuité de q_X^+ on a donc $q_X^+ = q_X^-$.

$\square$

On en déduit que

Proposition 6.2 *La fonction* q *est une fonction quantile de* X *si et seulement si* $q(\alpha) \in [q_X^-(\alpha), q_X^+(\alpha)]$ *pour tout* $\alpha \in]0,1[$*, en particuliers deux fonctions quantiles quelconques coïncident sur l'ensemble des points de continuité de* q_X^+*. De plus toute fonction quantile est croissante.*

Preuve. La première assertion découle immédiatement du lemme précédent. Montrons la monotonie : si $\beta < \alpha$ alors d'après la deuxième partie du lemme précédent on a $q(\beta) \leq q_X^+(\beta) \leq q_X^+(\alpha^-) \leq q_X^-(\alpha) \leq q(\alpha)$.

$\square$

On montre facilement les formules alternatives pour les quantiles inférieurs et supérieurs :

$$q_X^-(\alpha) := \sup\{t \in \mathbb{R} \ : \ F_X(t) < \alpha\}, \ q_X^+(\alpha) := \sup\{t \in \mathbb{R} \ : \ F_X(t) \leq \alpha\}.$$

Comme toutes les fonctions quantiles coïncident sur l'ensemble des points de continuité de q_X^+ et donc en particulier Lebesgue presque partout, on notera souvent q_X une fonction quantile quelconque et on parlera alors simplement de la fonction quantile de X étant entendu que cette dernière est bien définie de manière unique sauf peut-être sur un ensemble au plus dénombrable. Evidemment dans le cas idéal où F_X est continue (pas d'atomes) et strictement croissante ("pas de trous" dans les valeurs de X), F_X est un homéomorphisme et alors $q_X = F_X^{-1}$.

Notons enfin deux propriétés utiles des quantiles

Proposition 6.3 *Soit $q_X = q_X^-$ (le cas de $q = q_X^+$ se traitant de même), on a alors :*

- *monotonie : si $X \leq Y$ alors $F_Y \leq F_X$ et $q_X \leq q_Y$,*
- *invariance par translation : pour toute constante m, $q_{X+m} = q_X + m$,*
- *invariance par changement de numéraire : pour toute constante $\lambda > 0$, $q_{\lambda X} = \lambda q_X$.*

Preuve. Si $X \leq Y$, $\{Y \leq t\} \subset \{X \leq t\}$ de sorte que $F_Y \leq F_X$ et donc $\{t \ : \ F_X(t) \geq \alpha\} \subset \{t \ : \ F_Y(t) \geq \alpha\}$ ainsi $q_X(\alpha) \leq q_Y(\alpha)$. L'invariance par translation s'obtient en notant que $F_{X+m}(t) = F_X(t-m)$ et donc $F_{X+m}(t) = F_X(t-m) \geq \alpha$ si et seulement si $t-m \geq q_X(\alpha)$ ce qui montre que $q_{X+m}(\alpha) = q_X(\alpha)+m$. Enfin pour l'invariance par changement de numéraire, on note que $F_{\lambda X}(t) = F_X(t/\lambda)$ de sorte que $F_{\lambda X}(t) \geq \alpha$ si et seulement si $t/\lambda \geq q_X(\alpha)$ et donc $q_{\lambda X}(\alpha) = \lambda q_X(\alpha)$.

$\square$

Définition 6.2 *Soit $X \in L^\infty$ et $\alpha \in]0, 1[$, la Value at Risk de niveau α de X est par définition*

$$\mathrm{V@R}_\alpha(X) := \inf\{m \in \mathbb{R} \ : \ \mathbb{P}(X + m < 0) \leq \alpha\}.$$

La Value At Risk est directement liéee à la notion de quantile, en effet, par définition même (et en utilisant (6.3)) on a

$$\begin{aligned} \mathrm{V@R}_\alpha(X) &= \inf\{m \in \mathbb{R} \ : \ F_X((-m)^-) \leq \alpha\} \\ &= \inf\{-t \ : \ F_X(t^-) \leq \alpha\} = -\sup\{t \ : \ F_X(t^-) \leq \alpha\} \\ &= -q_X^+(\alpha). \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement les propriétés suivantes de la Value at Risk :

- si $X \leq Y$ alors $\mathrm{V@R}_\alpha(X) \geq \mathrm{V@R}_\alpha(Y)$,
- pour tout $m \in \mathbb{R}$, $\mathrm{V@R}_\alpha(X+m) = \mathrm{V@R}_\alpha(X) - m$,
- pour tout $\lambda > 0$, $\mathrm{V@R}_\alpha(\lambda X) = \lambda \mathrm{V@R}_\alpha(X)$.

Critique de la Value at Risk Il peut sembler raisonnable de considérer la Value at Risk à un certain seuil α donné (5%, 1%...) comme une mesure raisonnable du risque et ansi de considérer X comme acceptable si $\mathrm{V@R}_\alpha(X) \leq 0$ c'est à dire si la probabilité de défaut est inférieure à α. En réalité, la Value at Risk présente un gros inconvénient comme le montre l'exemple qui suit : elle ne favorise pas la diversification et donc peut conduire à des prises de position peu diversifiées et donc potentiellement plus risquées. C'est ce défaut qui a conduit les auteurs de [3] à axiomatiser les mesures *convexes* du risque, en effet, mathématiquement c'est la non-convexité de la Value at Risk qui est problématique en termes de risque. Considérons la variable aléatoire

$$X = \begin{cases} -\varepsilon \text{ avec probabilité } p \\ k\varepsilon \text{ avec probabilité } 1-p \end{cases}$$

avec $\varepsilon > 0$ et $k \in]0,1[$. On peut penser ici à un prêt bancaire, p est la proba de défaut de l'emprunteur, s'il y a défaut, la banque perd le montant ε, en l'absence de défaut la banque est remboursée avec un bénéfice de $k\varepsilon$. Pour un seuil α tel que $p \leq \alpha$ on vérifie facilement que

$$\mathrm{V@R}_\alpha(X) = -k\varepsilon < 0$$

de sorte que le risque X est acceptable au seuil α. Considérons maintenant X_1 et X_2 indépendantes, distribuées comme X ci-dessus et $Y := \frac{X_1+X_2}{2}$ ce qui correspond à prêter la moitié de la somme à deux emprunteurs identiques dont les risques de défaut sont indépendants, ceci correspond à une diversification du risque et devrait donc être considéré comme acceptable si X l'est. On a

$$Y = \begin{cases} -\varepsilon \text{ avec probabilité } p^2 \\ \frac{(k-1)\varepsilon}{2} \text{ avec probabilité } 2p(1-p) \\ k\varepsilon \text{ avec probabilité } (1-p)^2 \end{cases}$$

si

$$p^2 < \alpha < p^2 + 2p(1-p) = p(2-p)$$

ce qui est le cas par exemple pour $\alpha = 1\%$ et $p = 0.9\%$ alors

$$\mathrm{V@R}_\alpha(Y) = \frac{(1-k)\varepsilon}{2} > 0$$

de sorte que Y n'est pas acceptable du point de vue de la $\mathrm{V@R}_\alpha$. On aimerait qu'une mesure du risque favorise la diversification, ce qui est en défaut dans l'exemple ci-dessus est la non-convexité de $\mathrm{V@R}_\alpha$ puisque l'on a $\mathrm{V@R}_\alpha(X_1) = \mathrm{V@R}_\alpha(X_2) < 0$ mais $\mathrm{V@R}_\alpha(\frac{X_1+X_2}{2}) > 0$.

6.3 Mesures du risque

Définition 6.3 *On appelle mesure monétaire du risque sur L^∞ (ou tout simplement mesure du risque monétaire) toute fonction $\rho : L^\infty \to \mathbb{R}$ vérifiant les deux propriétés :*

- *monotonie : $X \geq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$,*
- *invariance monétaire (ou* cash invariance*) : pour tout $X \in L^\infty$ et tout $m \in \mathbb{R}$, on a $\rho(X + m) = \rho(X) - m$.*

La monotonie exprime le fait que si une position est toujours au dessus d'une autre alors elle a un risque plus faible. L'invariance monétaire exprime quant à elle le fait qu'ajouter un montant certain à une position aléatoire réduit le risque d'autant. Une conséquence immédiate de l'invariance monétaire est que

$$\rho(X + \rho(X)) = 0$$

et avec la monotonie on a aussi que $\rho(X)$ est la plus petite constante qui ajoutée à X rend ρ négative :

$$\rho(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} \ : \ \rho(X + m) \leq 0\},$$

ainsi $\rho(X)$ peut s'interpréter comme une réserve minimale rendant la position X acceptable. La Value at Risk de niveau α, $\mathrm{V@R}_\alpha$ est évidemment une mesure du risque monétaire, la moyenne de $-X$, $\mathbb{E}(-X)$ aussi ainsi que la mesure du pire cas $\mathrm{esssup}(-X) = -\mathrm{essinf} X$. Une mesure monétaire est souvent normalisée par la condition

$$\rho(0) = 0$$

qui exprime que la position nulle est acceptable mais pas une position toujours à découvert. Cette condition de normalisation est satisfaite dans les trois exemples précédents.

Lemme 6.2 *Tout mesure monétaire du risque ρ est 1-Lipschitzienne :*

$$|\rho(X) - \rho(Y)| \leq \|X - Y\|_{L^\infty}, \ \forall (X, Y) \in L^\infty \times L^\infty.$$

Preuve. On a $X \leq Y + \|X - Y\|_{L^\infty}$ et donc

$$\rho(X) \geq \rho(Y + \|X - Y\|_{L^\infty}) = \rho(Y) - \|X - Y\|_{L^\infty}$$

et donc $\rho(X) - \rho(Y) \leq \|X - Y\|_{L^\infty}$. L'inégalité souhaitée s'obtient donc en permutant le rôle de X et Y. $\square$

La $\mathrm{V@R}_\alpha$ est une mesure monétaire du risque, elle est aussi positivement homogène mais ne favorise pas la diversification car elle n'est pas convexe, c'est pourquoi on introduit :

Définition 6.4 *On appelle mesure convexe du risque toute mesure monétaire du risque ρ telle que pour tout $(X, Y, \lambda) \in L^\infty \times L^\infty \times [0, 1]$ on a*

$$\rho(\lambda X + (1 - \lambda) Y) \leq \lambda \rho(X) + (1 - \lambda) \rho(Y)$$

On dit que la mesure convexe du risque ρ est cohérente si en outre elle est positivement homogène : $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$ pour tout $X \in L^\infty$ et tout $\lambda \geq 0$.

Notons qu'une mesure convexe du risque cohérente est sous-additive :

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y).$$

A toute mesure monétaire du risque on peut associer un enesemble de positions acceptables :

Définition 6.5 *Soit ρ une mesure monétaire du risque, l'ensemble de positions acceptables pour ρ est alors donné par :*

$$\mathcal{A}_\rho := \{X \in L^\infty \ : \ \rho(X) \leq 0\}.$$

Nous savons que $\mathcal{A}_\rho$ est non vide puisque $X + \rho(X) \in \mathcal{A}_\rho$ pour tout $X \in L^\infty$, comme ρ est continue pour la norme $\|.\|_{L^\infty}$, $\mathcal{A}_\rho$ est fermé dans L^∞. La monotonie implique aussi que si $X \in \mathcal{A}_\rho$ et $Y \geq X$ alors $Y \in \mathcal{A}_\rho$. Nous savons également qu'on peut "retrouver" ρ à partir de $\mathcal{A}_\rho$ par

$$\rho(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} \ : \ (X + m) \in \mathcal{A}_\rho\}.$$

On a aussi :

Proposition 6.4 *Soit ρ une mesure monétaire du risque, alors*

- *ρ est convexe si et seulement si $\mathcal{A}_\rho$ est convexe,*
- *ρ est cohérente si et seulement si $\mathcal{A}_\rho$ est un cône convexe (on rappelle qu'une partie C d'un espace vectoriel est un cône si pour tout $(\lambda, X) \in \mathbb{R}_+ \times C$ on a $\lambda X \in C$).*

Preuve. Il est clair que si ρ est convexe alors $\mathcal{A}_\rho$ est convexe, si $\mathcal{A}_\rho$ est convexe alors pour $\lambda \in [0, 1]$ et $(X, Y) \in L^\infty \times L^\infty$ on a $\lambda(X + \rho(X)) + (1 - \lambda)(Y + \rho(Y)) \in \mathcal{A}_\rho$ et donc $\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y)$. La deuxième assertion est laissée en exercice.

$\square$

6.4 Exemples

Scénarii

Si Q est un ensemble de variables aléatoires positives et d'espérance 1 on peut lui associer la mesure

$$\rho_Q(X) := \sup_{Y \in Q} \mathbb{E}(-XY).$$

On peut considérer les éléments de Q comme des densités de probabilités (ou scenarii possibles sur les états du monde) et alors ρ_Q représente la mesure au pire cas dans cet ensemble de scenarii possibles. L'ensemble acceptable de ρ_Q est l'ensemble des X tels que $\mathbb{E}(XY) \geq 0$ pour tout Y dans Q, c'est à dire l'ensemble des positions dont le gain espéré est positif dans tous les scenarii. Dans le cas (très conservateur) où Q est l'ensemble de toutes les densités possibles (i.e. $Q = \{Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}),\ Y \geq 0,\ \mathbb{E}(Y) = 1\}$) on retrouve (exercice...) la mesure au pire cas c'est à dire $-\text{essinf}X$. Il est clair que ces mesures ρ_Q sont des mesures monétaires (l'invarance monétaire provient du fait que les éléments de Q sont d'espérance 1 et la monotonie provient du fait qu'ils sont positifs), par ailleurs ces mesures sont convexes et cohérentes (un supremum de formes linéaires est convexe et positivement homogène). On peut montrer que de larges classes de mesures du risques cohérentes peuvent se mettre sous cette forme mais les arguments fonctionnels pour démontrer ce type de résultats dépassent le cadre de ce cours.

Expected shortfall

Soit $\alpha \in]0,1[$ l'expected shortfall de $X \in L^\infty$ est définie comme une moyenne de la value at risk :

$$\text{ES}_\alpha(X) := \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \text{V@R}_\gamma(X)d\gamma = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha q_X(s)ds.$$

Il est clair que l'expected shortfall (qu'on appelle aussi average value at risk) est une mesure monétaire du risque positivement homogène, sa convexité ne saute pas aux yeux, elle découle du résultat suivant qui montre plus précisément que ES_α peut s'écrire comme le supremum de $\mathbb{E}(-XY)$ pour un enesmble bien choisi de densités de probabilités Y, ainsi l'expected shortfall correspond à une mesure au pire cas dans un certain ensemble de scenarii comme discuté plus haut.

Théorème 6.1 *Soit $X \in L^\infty$ telle que F_X soit continue (i.e. X n'a pas d'atomes) alors l'expected shortfall de niveau α, admet la représentation suivante :*

$$\text{ES}_\alpha(X) := \sup_{Y\in Q_\alpha} \mathbb{E}(-XY)$$

où

$$Q_\alpha := \{Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})\ :\ 0 \leq Y \leq \frac{1}{\alpha}, \mathbb{E}(Y) = 1\}$$

c'est donc une mesure convexe du risque cohérente.

Preuve. Il s'agit de montrer que

$$-\text{ES}_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha q_X(s)ds = \inf_{Y\in Q_\alpha} \mathbb{E}(XY). \tag{6.4}$$

On commence par observer que puisque X n'a pas d'atome alors $\alpha = \mathbb{P}(X \leq q_X(\alpha))$, on pose alors

$$\overline{Y} := \frac{1}{\alpha}\mathbf{1}_{\{X \leq q_X(\alpha)\}}.$$

On a alors par construction même $\overline{Y} \in Q_\alpha$ et

$$\mathbb{E}(X\overline{Y}) = \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{X \leq q_X(\alpha)\}}) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha q_X(s)ds.$$

(voir les exercices pour une justification détaillée de la dernière identité). Nous nous proposons maintenant de montrer que $\mathbb{E}(X(Y - \overline{Y})) \geq 0$ pour tout $Y \in Q_\alpha$ ce qui achèvera la démonstration puisqu'alors on aura bien établi que

$$\mathbb{E}(X\overline{Y}) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha q_X(s)ds = \inf_{Y \in Q_\alpha} \mathbb{E}(XY)$$

qui est précisément (6.4). Soit donc $Y \in Q_\alpha$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X(Y - \overline{Y})) &= \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{X > q_X(\alpha)\}}Y) + \mathbb{E}\Big(X\mathbf{1}_{\{X \leq q_X(\alpha)\}}(Y - \frac{1}{\alpha})\Big) \\
&\geq q_X(\alpha)\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{X > q_X(\alpha)\}}Y) + q_X(\alpha)\mathbb{E}\Big(\mathbf{1}_{\{X \leq q_X(\alpha)\}}(Y - \frac{1}{\alpha})\Big) \\
&= q_X(\alpha)\Big(\mathbb{E}(Y) - \frac{1}{\alpha}\mathbb{P}(X \leq q_X(\alpha))\Big) = \frac{1}{\alpha}(1 - \frac{\alpha}{\alpha}) = 0.
\end{aligned}$$

□

Quatrième partie

Problèmes et exercices

Programmation dynamique en temps discret

Horizon fini

Exercice 1 *On considère le problème suivant :*

$$\sup_{(x_1,x_2,x_3)} \{f(x_1,x_0)+g(x_2,x_1)+h(x_3,x_2) \ : x_i \in \Gamma_{i-1}(x_{i-1}),\ i=1,2,3\}$$

avec $x_0 \geq 0$ *donnée,*

$$\Gamma_0(x_0) := [0, x_0^4+2x_0+3],\ \Gamma_1(x_1) := [\frac{x_1}{2}, x_1^2+x_1],\ \Gamma_2(x_2) := [0, \frac{x_2^2+4}{x_2^2}];$$

$$f(x_1,x_0) := 2x_1x_0 - x_1^2 + x_1,\ g(x_2,x_1) = -\frac{1}{2x_2} + x_2x_1 - \frac{1}{2}x_2^2$$

et :

$$h(x_3,x_2) := \sqrt{x_3} - \frac{1}{2}x_3x_2.$$

1. *Exprimer ici le principe de la programmation dynamique puis en déduire des relations reliant les fonctions valeurs aux différentes dates.*
2. *Calculer ces fonctions valeurs.*
3. *Calculer les politiques optimales.*

Exercice 2 *Soit* $x \geq 0$*, on considère le problème*

$$\inf\{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \ : x_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{N} x_i = x\} \tag{6.5}$$

1. *Résoudre (6.5) en utilisant le théorème de Kuhn et Tucker.*
2. *Introduire la valeur* $V_N(x)$ *de (6.5), puis en utilisant un argument de programmation dynamique calculer* V_N *et résoudre (6.5).*
3. *Comparer les deux méthodes et conclure.*

Exercice 3 *Pour $x \geq 0$ et N un entier $N \geq 1$ on définit :*

$$V_N(x) := \sup\{x_1 \times \cdots \times x_N \ : x_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{N} x_i = x\}$$

1. *Que vaut V_1 ?*
2. *Montrer que :*
$$V_N(x) = \sup\{yV_{N-1}(x-y) \ : y \in [0,x]\}$$
3. *Montrer que :*
$$V_N(x) = \frac{x^N}{N^N}$$
4. *En déduire l'inégalité arithmético géométrique :*
$$(|x_1| \cdots |x_N|)^{1/N} \leq \frac{|x_1| + \cdots + |x_N|}{N}$$
Quand a-t-on égalité ?

Exercice 4 *On se propose ici de démontrer le fameux (et utile) résultat connu sous le nom de Théorème de l'enveloppe. On se donne une fonction continue V de $\mathbb{R} \times A$ dans $\mathbb{R}$ où A est un fermé borné de $\mathbb{R}^N$. On définit alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$f(x) := \sup_{y \in A} V(x,y)$$

1. *Montrer que le sup dans la définition de f est un max.*
2. *Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.*
3. *("Théorème" de l'enveloppe) On suppose en outre que V est dérivable par rapport à sa première variable, soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in A$ tel que $f(x) = V(x,y)$, montrer que si f est dérivable en x alors on a :*
$$f'(x) = \frac{\partial V}{\partial x}(x,y).$$

Horizon infini

Exercice 5 *Soit (A, d) un espace métrique compact, soit $A_\infty := A^{\mathbb{N}}$ et*

$$d_\infty(u, v) := \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} d(u_n, v_n)$$

pour tout $(u, v) \in A_\infty \times A_\infty$. Montrer que (A_∞, d_∞) est un espace métrique compact (Théorème de Tychonov dans le cas dénombrable).

Exercice 6 *Soit $A := \{1, 2, 3, 4\}$ et pour $i \in A$, $\Gamma(i) := A \setminus \{i\}$. Pour $i \in A$, on pose :*

$$v_i := \sup \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t |x_{t+1} - x_t| \ : \ x_{t+1} \in \Gamma(x_t), \ x_0 = i \right\}. \tag{6.6}$$

où β est un facteur d'escompte : $\beta \in]0, 1[$.

1. *Ecrire un système d'équations caractérisant v_1, v_2, v_3, v_4 (justifier par des résultats vus en cours).*
2. *Montrer que $v_1 = v_4$ et $v_2 = v_3$.*
3. *Déterminer v_1, v_2, v_3, v_4.*
4. *Déterminer toutes les politiques optimales (selon la condition initiale $x_0 = i$).*

Exercice 7 *Soit $\beta \in]0, 1[$, V une fonction continue et bornée de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, a et b deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ avec $a \leq b$, on définit alors pour toute fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ la fonction Tf par :*

$$Tf(x) := \sup\{V(y, x) + \beta f(y) \ : y \in [a(x), b(x)]\}$$

1. *Montrer que T est monotone : $f \leq g \Rightarrow Tf \leq Tg$.*
2. *Calculer $T(f + c)$ avec c une constante.*
3. *Montrer que si f est continue et bornée il en est de même de Tf.*

4. *Montrer qu'il existe au plus une fonction continue bornée f telle que $f = Tf$.*

5. *Montrer que si V est croissante (resp. décroissante) par rapport à sa seconde variable, que a est décroissante (resp. croissante) et b est décroissante (resp. croissante) alors Tf est croissante (resp. décroissante).*

6. *Quelles sont les applications possibles des résultats précédents à la programmation dynamique ?*

7. *Proposer une méthode effective pour calculer ou approcher la valeur du problème :*

$$\sup_{(x_t)}\{\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t V(x_{t+1}, x_t) : x_0 = x,\ x_{t+1} \in [a(x_t), b(x_t)]\}$$

   puis pour en déterminer les solutions.

Exercice 8 *On s'intéresse au problème suivant :*

$$\sup_{(k_t)} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \mathrm{Log}(k_t^{\alpha} - k_{t+1}) \tag{6.7}$$

sous les contraintes : $k_0 = k > 0$ donnée et $k_{t+1} \in [0, k_t^{\alpha}]$ pour tout $t \geq 0$. On note $W(k)$ (pour $k > 0$) la valeur de ce problème, enfin α et β sont deux constantes appartenant à $]0, 1[$.

1. *Donner la motivation économique de (6.7).*

2. *Soit v définie pour $k > 0$ par :*

$$v(k) := \frac{\alpha \mathrm{Log}(k)}{1 - \alpha\beta}$$

   montrer que $W \leq v$.

3. *Montrer que W est solution de l' équation de Bellman : $f = Tf$ avec T l'opérateur défini par*

$$Tf(x) := \sup_{y \in [0, x^{\alpha}]} \mathrm{Log}(x^{\alpha} - y) + \beta f(y)$$

   pour tout $x > 0$.

4. *Pourquoi ne peut on pas affirmer ici directement que W est l'unique solution de l'équation de Bellman.*

5. *Montrer que $Tv = v + c$ avec c une constante négative à déterminer.*

6. *Calculer les itérées $T^n v$ pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que cette suite converge vers une limite v_∞ que l'on explicitera. Montrer enfin que $Tv_\infty = v_\infty$.*

7. *Montrer que $W \leq v_\infty$.*

8. *Montrer que $W \geq v_\infty$ (plus difficile) et conclure.*

9. *Montrer que le problème (6.7) admet une solution unique que l'on calculera, on notera (k_t^*) cette politique optimale.*

10. *Etudier la dynamique optimale k_t^* (monotonie, convergence) et conclure.*

Calcul des variations

Exercice 9 *On s'intéresse au problème suivant :*

$$\inf_{x(.)} J(x) := \int_0^1 t\dot{x}^2(t)dt \, : x(0) = 1, \, x(1) = 0$$

1. *Calculer $J(x_N)$ avec x_N la fonction valant 1 sur $[0, 1/N[$ et*

$$x_N(t) = -\frac{\mathrm{Log}(t)}{\mathrm{Log}(N)}$$

pour $t \in [1/N, 1]$.

2. *Montrer que l'infimum du problème est 0.*

3. *Cet infimum est-il atteint ?*

4. *Conclure.*

Exercice 10 *Résoudre le problème :*

$$\inf_{x(.)} J(x) := \int_0^1 [\dot{x}^2(t) + x^2(t)]dt$$

dans les cas suivants :

1. *Sans conditions aux limites,*
2. *Avec les conditions $x(0) = 0$, $x(1) = 1$.*
3. *Avec la condition $x(0) = 1$.*

Exercice 11 *Résoudre le problème :*

$$\inf_{x(.)} J(x) := \int_0^1 [\dot{x}^2(t) + tx(t)]dt + x^2(1)$$

dans les cas suivants :

1. *Sans conditions aux limites,*
2. *Avec la condition $x(0) = 1$.*

Exercice 12 *Minimiser $\int_0^1 \dot{x}^2(t)dt$ sous les contraintes : $x(0) = x_0$, $x(1) = x_1$, $\int_0^1 x(t)dt = \alpha$.*

Exercice 13 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f'' > 0$.*

1. *Montrer que le problème*

$$\inf\{\int_0^1 f(\dot{x}(t))dt \ : x(0) = x_0,\ x(1) = 1\}$$

   admet une solution unique que l'on calculera. Conclure.

2. *Redémontrer le résultat précédent en utilisant l'inégalité de Jensen.*

Exercice 14 *Après avoir fait un changement astucieux de fonction inconnue, résoudre le problème :*

$$\inf\{\int_0^1 [\frac{\dot{x}^2(t)}{x^2(t)} - \text{Log}(x^2(t))]dt \ : x(0) = 1,\ x(1) = e\}.$$

Exercice 15 *On s'intéresse à la manière optimale de manger un gateau (ou une glace) entre les dates $t = 0$ et $t = T$. Initialement le gateau est de taille 1, et l'objectif du consommateur (le mangeur) est d'avoir consommé le gateau à la date T de manière la plus satisfaisante possible, ce degré de satisfaction est supposé mesuré par la quantité :*

$$V(c) := \int_0^T \exp(-\delta t) U(c(t)) dt$$

Avec $c(t)$ la consommation instantanée ($c(.)$ est la fonction inconnue ici), $\delta > 0$ un taux de dépréciation et U une fonction d'utilité statique, strictement concave, croissante et de classe C^1.

1. *Donner une relation (sous forme intégrale) entre la taille du gateau au cours du temps $x(.)$ et la consommation $c(.)$ au cours du temps.*
2. *Mettre le problème du consommateur du gateau sous la forme d'un problème de calcul des variations.*
3. *Montrer que V est strictement concave.*
4. *Ecrire l'équation d'Euler (on oubliera provisoirement la contrainte de positivité sur la consommation) du problème.*
5. *Résoudre le problème entièrement et rigoureusement dans le cas $U(c) = \mathrm{Log}(c)$.*

Exercice 16 *Soit L une fonction convexe continue de $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, x_0 et x_1 dans $\mathbb{R}^d$, trouver une solution de*

$$\inf_{x:\, x(0)=x_0,\, x(1)=x_1} \int_0^1 L(\dot{x}(t)) dt.$$

Soit $\varphi \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, pour $t \in [0,1]$ et $x \in \mathbb{R}^d$ on pose

$$v(t,x) := \inf_{x:\, x(t)=x} \{ \int_t^1 L(\dot{x}(s)) ds + \varphi(x(1)) \}$$

Montrer que :

$$v(t,x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^d} \{ (1-t) L\Big(\frac{y-x}{1-t}\Big) + \varphi(y) \}$$

(formule de Lax).

Contrôle optimal

Exercice 17 *On s'intéresse ici au modèle de croissance optimale de Ramsey dans le cas d'un seul secteur de production. Par souci de simplicité on se limitera à un horizon fini $T > 0$. On notera $c(t)$ la consommation instantanée d'un ménage représentatif dont la satisfaction est supposé mesurée par la quantité*

$$\int_0^T \exp(-\delta t) U(c(t)) dt$$

la consommation doit satisfaire $c(t) \geq 0$, $\delta > 0$ est donné ainsi que U supposée strictement concave croissante et dérivable. On notera par ailleurs $y(t)$, $k(t)$ et $i(t)$ la production, le capital et l'investissment dans l'économie au temps t, on a alors

$$y(t) = c(t) + i(t),\ i(t) = \dot{k}(t) \text{ et } y(t) = f(k(t))$$

avec f une fonction de production supposée strictement concave, croissante et dérivable.

1. *Mettre le modèle sous la forme d'un problème de contrôle optimal, dire quelle est la variable de contrôle et celle d'état.*

2. *Former le hamiltonien du problème et écrire les conditions nécessaires fournies par le principe de Pontriaguine.*

3. *Définir la fonction valeur du problème et écrire l'équation aux dérivées partielles ainsi qu'une condition aux limites qu'elle vérifie.*

4. *Donner une condition suffisante d'optimalité.*

Exercice 18 *Pour $x > 0$ donné et $T > 0$, on s'intéresse au problème de contrôle optimal :*

$$\inf\{x(T) : x(0) = x, \dot{x}(t) = -u(t)x(t) + \frac{1}{2}u^2(t),\ u(t) \in \mathbb{R}\}$$

1. *Former le pré-Hamiltonien $\underline{H}(t, x, u, p)$ du problème et calculer le Hamiltonien $H(t, x, p) = \inf_u H(t, x, u, p)$.*

2. *Ecrire les conditions nécessaires fournies par le principe de Pontriaguine. A quelle difficulté a-t-on à faire ici ?*

3. *Trouver une solution* (x^*, p^*) *du système Hamiltonien fourni par le principe de Pontriaguine, calculer aussi* u^* *le contrôle associé , calculer enfin* $x^*(T)$.

4. *Reprendre les deux questions précédentes pour le problème avec instant initial* $0 < t < T$ *et état initial* $x > 0$.

5. *Donner l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman du problème. Puis déterminer rigoureusement la valeur optimale* $V(t, x)$ *associée à la condition initiale* x *à l'instant initial* t ($x > 0$ *et* $0 < t < T$).

6. *Calculer un contrôle optimal en rétroaction (ou feedback).*

7. *En utilisant les résultats précédents, dire si* u^* *est un contrôle optimal. Est-ce le seul ?*

Exercice 19 *On considère le système Hamiltonien :*

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(x, p), \ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, p)$$

un tel système (avec H *ne dépendant pas de* t*) est dit autonome.*

1. *Montrer que pour toute solution* $(x(.), p(.))$ *la fonction* $t \mapsto H(x(t), p(t))$ *constante.*

2. *En déduire que si* H *est coercif i.e.*

$$\lim_{\|(x,p)\| \to +\infty} H(x, p) = +\infty$$

alors toutes les trajectoires de ce système hamiltonien sont bornées.

3. *Appliquer ces résultats au problème de contrôle :*

$$\inf\{\int_0^T [\frac{1}{2}u^2 + V(x)], \ \dot{x} = u, \ x(0) = x_0\}$$

avec V *une fonction convexe coercive de classe* C^1. *Donner une interprétation de ces résultats.*

Exercice 20 *Pour $x \in \mathbb{R}$ donné, on s'intéresse au problème de contrôle optimal :*

$$\inf\{\int_0^T \frac{1}{2}u^2(s)ds + x(T) : x(0) = x,\ \dot{x}(t) = x(t) + u(t),\ u(t) \in \mathbb{R}\}$$

1. *Former le pré-Hamiltonien $\underline{H}(t,x,u,p)$ du problème et calculer le Hamiltonien $H(t,x,p) := \inf_u H(t,x,u,p)$.*
2. *Ecrire le système d'équations différentielles et les conditions aux limites satisfaites par une trajectoire optmale et la variable adjointe associée.*
3. *Résoudre le système précédent on notera (x^*, p^*) sa solution.*
4. *Donner une équation aux dérivées partielles et une condition aux limites vérifiées par la valeur du problème.*
5. *Trouver une solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman précédente (avec la même condition aux limites).*
6. *Montrer que x^* est une trajectoire optimale, donner un contrôle optimal u^*, donner également un contrôle optimal en feedback (i.e. sous la forme $v(t,x)$).*
7. *Résoudre le problème initial en utilisant le formalisme du calcul des variations.*

Exercice 21 *Soit $T > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. On s'intéresse au problème de minimisation suivant*

$$V(0,x) = \inf\left\{\frac{1}{2}\int_0^T \Big(u^2(s)+x^2(s)\Big)ds, x(0) = x, \forall t \in [0,T], x'(t) = 2x(t)+u(t), u(t) \in \mathbb{R}\right\}.$$

1. *.a. Calculer le Hamiltonien $H(t,x,p)$ associé à ce problème.*
   b. En déduire que la valeur $V(t,x)$ au temps t est solution de :

$$\begin{cases} \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}, \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + 2x\frac{\partial V(t,x)}{\partial x} - \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\Big)^2 + \frac{x^2}{2} = 0, \\ V(T,x) = 0. \end{cases}$$

2. .a. *On suppose que la valeur V s'écrit sous la forme*

$$\forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}, V(t,x) = v(t)x^2.$$

Montrer que la fonction v est solution de l'équation de Riccati

$$\begin{cases} \forall t \in [0,T], v'(t) + 4v(t) - 2v(t)^2 + \frac{1}{2} = 0, \\ v(T) = 0. \end{cases}$$

.b. . Déterminer une solution de l'équation de Riccati.
Indication. On pourra poser

$$\forall t \in [0,T], f(t) = \frac{1}{v(t) - 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}}.$$

c. En déduire une expression de V, ainsi que celle d'un contrôle optimal en rétroaction.

Exercice 22 *Contrôle optimal en horizon infini. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on définit :*

$$v(x) := \inf_{u(.)\in K} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} L(y_{x,u}(s), u(s))ds$$

avec $\lambda > 0$ un taux d'escompte et $y_{x,u}(.)$ la solution du problème de Cauchy

$$\dot{y}(t) = f(y(t), u(t)),\ t > 0\ y(0) = x$$

(on suppose que f vérifie des hypothèses de Lipschitzianité assurant existence et unicité de telles trajectoires pour tout temps et que l'ensemble des contrôles K est un métrique compact).

1. *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $t > 0$ on a :*

$$v(x) = \inf_{u(.)\in K} \{ \int_0^t e^{-\lambda s} L(y_{x,u}(s), u(s))ds + e^{-\lambda t} v(y_{x,u}(t)\}$$

2. *En supposant v de classe C^1 établir l'équation d'HJB satisfaite par v.*

Exercice 23 *Soit H une fonction continue de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, Ω la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^d$ et v_1, v_2 deux fonctions de classe C^1 sur Ω, à valeurs dans $\mathbb{R}$, continues sur $\overline{\Omega}$ telles que :*

$$v_1(x) + H(\nabla v_1(x)) \leq 0,\ v_2(x) + H(\nabla v_2(x)) \geq 0,\ \forall x \in \Omega$$

et $v_1(x) = v_2(x)$, pour tout $x \in \partial\Omega$. Montrer que $v_1 \leq v_2$ sur $\overline{\Omega}$. Qu'en conclure ?

Mesures du risque

Exercice 24 *Soit X une variable aléatoire positive et intégrable, montrer que*

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X \geq t)dt.$$

Soit maintenant X et Y deux variables aléatoires L^∞ et positives, montrer que

$$\mathbb{E}(XY) = \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{P}(X \geq t, Y \geq s)dsdt.$$

Exercice 25 *Montrer que deux variables aléatoires ont la même loi si et seulement si elles ont la même fonction de répartition (et donc les mêmes quantiles).*

Exercice 26 *Soit F une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que F a au plus une infinité dénombrable de points de discontinuités.*

Exercice 27 *Montrer que si F_X est continue et strictement croissante, il en est de même de q_X. Calculer les fonctions quantiles inférieure et supérieure d'une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs. Montrer que si F_X est continue alors q_X est strictement croissante.*

Exercice 28 *Soit $X \in L^\infty$ et q_X sa fonction quantile montrer que $\mathbb{E}(\varphi(X)) = \int_0^1 \varphi(q_X(t))dt$ pour tout $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit q croissante telle que $\mathbb{E}(\varphi(X)) = \int_0^1 \varphi(q_X(t))dt$ pour tout $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que $q = q_X$. Montrer que si F_X est continue alors*

$$\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{X \leq q_X(\alpha)\}}) = \int_0^\alpha q_X(s)ds.$$

(on pourra approcher la fonction $\mathbf{1}_{]-\infty, q_X(\alpha)]}$ par une suite de fonctions continues et utiliser le théorème de convergence dominée).

Exercice 29 *Soit X une variable aléatoire et q_X sa quantile, montrer que $q_{-X}(\alpha) = -q_X(1-\alpha)$.*

Exercice 30 *Soit ρ une mesure monétaire du risque et $\mathcal{A}_\rho := \{X \in L^\infty : \rho(X) \leq 0\}$. On souhaite montrer que $\mathcal{A}_\rho$ est un cône convexe si et seulement si ρ est une mesure du risque convexe cohérente.*

1. *Montrer que si ρ est une mesure du risque convexe cohérente alors $\mathcal{A}_\rho$ est un cône convexe.*
2. *On suppose désormais que $\mathcal{A}_\rho$ est un cône convexe, montrer que $\rho(0) = 0$ puis que ρ est positivement homogène.*
3. *Conclure.*

Exercice 31 *Soit*

$$P := \{Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \ : \ Y \geq 0, \ \mathbb{E}(Y) = 1\} \tag{6.8}$$

Pour $X \in L^\infty$, montrer que

$$\sup_{Y \in P} \mathbb{E}(-XY) = -\mathrm{essinf}(X)$$

Exercice 32 *Soit $Q \subset P$ (défini par (6.8)), $Q \neq \emptyset$ et soit $\rho_Q(X) := \sup_{Y \in Q} \mathbb{E}(-XY)$ pour tout $X \in L^\infty$. Montrer que ρ_Q est une mesure du risque monétaire, convexe et cohérente.*

Exercice 33 *Soit P défini par (6.8), $\eta : P \to \mathbb{R}$, minorée on définit alors pour tout $X \in L^\infty$*

$$\rho(X) := \sup_{Y \in P} \{\mathbb{E}(-XY) - \eta(Y)\}$$

Montrer que ρ est une mesure convexe du risque.

Exercice 34 *On dit qu'une mesure convexe du risque ρ est invariante en loi si $\rho(X) = \rho(Y)$ dès que X et Y ont la même loi. Est ce que les mesures suivantes sont invariantes en loi : la mesure au pire cas, l'expected shortfall, $\mathbb{E}(-XZ)$ où Z est une densité de probabilité par rapport à la probabilité de référence $\mathbb{P}$.*

Exercice 35 *Soit X et Y dans L^∞, on se propose de démontrer l'inégalité de Hardy-Littlewood :*

$$\mathbb{E}(XY) \leq \int_0^1 q_X(\alpha) q_Y(\alpha) d\alpha.$$

1. *Montrer qu'il suffit de démontrer l'inégalité pour X et Y positives.*
2. *Pour X et Y L^∞ et positives montrer que*

$$\mathbb{E}(XY) = \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{P}(A_t \cap B_s) ds dt, \ A_t := \{X \geq t\}, \ B_s := \{Y \geq s\}$$

et (en notant λ la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$)

$$\int_0^1 q_X(\alpha) q_Y(\alpha) d\alpha = \int_0^\infty \int_0^\infty \lambda(A'_t \cap B'_s) ds dt$$

avec

$$A'_t := \{q_X \geq t\}, \ B'_s := \{q_Y \geq s\}.$$

3. *Montrer que*

$$\mathbb{P}(A_t) = \lambda(A'_t), \ \mathbb{P}(B_s) = \lambda(B'_s), \ \mathbb{P}(A_t \cap B_s) \leq \lambda(A'_t \cap B'_s)$$

et conclure.

Exercice 36 *Soit $X \in L^\infty$ et $\alpha \in]0,1[$, on suppose que F_X est continue montrer alors que q_X est strictement croissante et que l'expected shortfall $\mathrm{ES}_\alpha(X)$ peut s'écrire sous la forme d'une espérance conditionnelle :*

$$\mathrm{ES}_\alpha(X) = -\mathbb{E}(X | X \leq q_X(\alpha)).$$

Commenter.

Bibliographie

[1] V. Alexéev, S.V. Fomine, V.M. Tikhomirov, *Commande Optimale*, MIR, Moscou (1982).

[2] V. Alexéev, E. Galéev, V.M. Tikhomirov, *Recueil de problèmes d'optimisation*, MIR, Moscou (1987).

[3] P. Artzner, F. Delbaen, J.-M. Eber, D. Heath, *Coherent Measures of Risk*, Math. Finance 9, no. 3, 203-228 (1999).

[4] G. Barles, *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, Springer-Verlag (1994).

[5] H. Brezis, *Ananlyse fonctionnelle*, Masson, 1984.

[6] R. E. Lucas Jr, N. Stokey, *Recursive Methods in Economics Dynamics*, Harvard University Press (1989).

[7] I. Ekeland, R. Temam, *Convex Analysis and Variational Problems*, North-Holland (1972).

[8] L. C. Evans, *An introduction to the Mathematical Optimal Control Theory*, téléchargeable : `http://math.berkeley.edu/~evans`.

[9] W.H. Fleming, R.W. Rishel, *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Springer-Verlag, New-York (1975).

[10] A.D. Ioffe, V.M. Tikhomirov, *Theory of Extremal Problems*, North-Holland (1979).

[11] M. Kamien, N. Schwartz, *Dynamic Optimization*, North-Holland (1981).

[12] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press (1970).