② Partie II

1) On déduit de la question 4) de la partie I que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists y_\varepsilon \in E$ tq

$$\begin{cases} (i) \ f(y_\varepsilon) \leq \inf_E f + \varepsilon \\ (ii) \ \forall x \in E ; \quad f(x) \geq f(y_\varepsilon) - \sqrt{\varepsilon}\|x - y_\varepsilon\| \end{cases}$$

(On a pris $k = 1/\sqrt{\varepsilon}$) Il est facile de déduire de (ii) que $\|f'(y_\varepsilon)\|_{E'} \leq \sqrt{\varepsilon}$

2) Soit $p \in E'$, $\|p\| < a$ et

$$f_p(x) := f(x) - p \cdot x \quad ; \forall x \in E$$

f_p est minorée et la l'hypothèse assure que f_p ... question 1 que $\forall \varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in E$ t.q

$$\|f'_p(x_\varepsilon)\|_{E'} = \|f'(x_\varepsilon) - p\|_{E'} \leq \sqrt{\varepsilon}$$

et donc $f'(E)$ est dense ds $aB_{E'}$.

Partie III (Bishop-Phelps)

1) Si E est réflexif, il résulte du thm de Kakutani que C est $\sigma(E, E')$ compact et donc f atteint son maximum sur C.