2) $T(f) := \int_0^{1/2} f - \int_{1/2}^1 f \quad \forall f \in C([0,1])$

la forme linéaire T n'atteint pas son sup sur la boule unité de $C([0,1])$.

3) Immédiat

4) On peut séparer au sens large $\mathrm{int}(C_1)$ de C_2 : $\exists\,(g,\lambda) \in E' \times \mathbb{R} \setminus \{0,0\}$ tel que

(4) $g(x) + \lambda t \geq g(y) + \lambda s$; $\forall (x,t) \in C_2$
$\forall (y,s) \in \mathrm{int}(C_1)$ (et donc aussi par densité $\forall (y,s) \in C_1$)

. On déduit de (4) que $\lambda \geq 0$ (sinon prendre $t \to +\infty$)
on réécrit alors (4) sous la forme :

(5) $g(x) + \lambda f(x) \geq g(y) + \lambda\left[f(x_0) - \varepsilon \|y - x_0\|\right]$
$\forall (x,y) \in C \times E$

Si λ était nul, g serait minorée sur E et donc nulle contredisant $(g,\lambda) \neq (0,0)$. On a donc $\lambda > 0$ et sans perte de généralité on peut supposer $\lambda = 1$.