Analyse fonctionnelle et EDP,
Partiel, mars 2010
ENS, FIMFA, première année.

Exercice 1 *Injections de Sobolev H^s*

1. *Expliquer pourquoi* $H^0(\mathbb{R}^d) = L^2(\mathbb{R}^d)$, $H^1(\mathbb{R}^d) = \{u \in L^2 \ : \ \nabla u \in L^2\}$. *Donner de même une interprétation de* $H^m(\mathbb{R}^d)$ *pour* $m \in \mathbb{N}$.

   Soit $s \in [0, d/2[$. *On souhaite démontrer que* $H^s(\mathbb{R}^d) \subset L^{\frac{2d}{d-2s}}(\mathbb{R}^d)$ *(avec injection continue). Étant donné* $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *et* $A > 0$, *on note*

   $$u_A^1 = \mathcal{F}^{-1}(1_{B(0,A)}\hat{u}), \quad et \quad u_A^2 = \mathcal{F}^{-1}(1_{B(0,A)^c}\hat{u}).$$

2. *Montrer que :*

   $$\|u\|_{L^p}^p = p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\mu\{x \ : \ |u(x)| > \lambda\}d\lambda \ (\mu \ : \ \textit{mesure de Lebesgue sur } \mathbb{R}^d).$$

3. *Montrer que* $\|u_A^1\|_{L^\infty} \leq CA^{d/2-s}\|u\|_{H^s}$. *En déduire que* $\mu\{x \quad |u_{A_\lambda}^1(x)| > \lambda/2\} = 0$, *où* $A_\lambda = (\lambda/2C\|u\|_{H^s})^{\frac{1}{d/2-s}}$, *et enfin que :*

   $$\|u\|_{L^p}^p \leq p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\mu\{x \ : \ |u_{A_\lambda}^2(x)| \geq \lambda/2\}d\lambda.$$

4. *Montrer que* $\lambda^2\mu\{x \ : \ |u_{A_\lambda}^2(x)| \geq \lambda/2\} \leq 4\|u_{A_\lambda}^2\|_{L^2}^2$ *et conclure.*

5. *On suppose maintenant que* $s \in]d/2, d/2+1[$. *Montrer que pour tout* $\alpha \in [0,1]$ *et* x, y, ξ*:*

   $$|e^{ix\xi} - e^{iy\xi}| \leq 2|x-y|^\alpha|\xi|^\alpha.$$

   En déduire que pour tout $\alpha \in]0, s-d/2[$, *il existe* $C(\alpha)$ *tel que :*

   $$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq C(\alpha)\|u\|_{H^s}.$$

   Conclure que $H^s(\mathbb{R}^d)$ *s'injecte continûment dans* $C^\alpha(\mathbb{R}^d)$, *ensemble des fonctions* α*-Holderiennes bornées.*

Exercice 2 *Espaces en dualité. Soit E et F deux $\mathbb{R}$-ev et soit a une forme bilinéaire sur $E \times F$ séparante c'est à dire que si $x \in E$ vérifie $a(x,y) = 0$ pour tout $y \in F$ alors $x = 0$ et si $y \in F$ vérifie $a(x,y) = 0$ pour tout $x \in E$ alors $y = 0$. On munit E de la topologie d'evtlc définie par la famille de semi-normes $(p_y)_{y \in F}$ avec $p_y(x) := |a(x,y)|$, pour tout $(x,y) \in E \times F$. Soit f une forme linéaire sur E, continue pour la topologie définie précédemment. Montrer qu'il existe un unique $y \in F$ tel que $f = a(.,y)$.*

Exercice 3 *Bases de Schauder. Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach, on dit que la famille $\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est une base de Schauder de E, si pour tout $x \in E$ il existe une unique suite de réels $(x_n)_n$ telle que $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n$ (en particulier, la série converge!). On suppose désormais que E possède une base de Schauder $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et pour $x \in E$, $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n$ et $N \in \mathbb{N}$, on pose $P_N(x) := \sum_{n=0}^{N} x_n e_n$ et $\|x\|_1 := \sup_N \|P_N x\|$.*

1. *Montrer que $\|.\|_1$ est une norme équivalente à $\|.\|$.*
2. *Montrer que chaque P_N est linéaire et continu et que $\sup_N \|P_N\| < +\infty$.*
3. *Soit $T \in K(E)$, montrer que T est limite d'opérateurs de rang fini.*

Exercice 4 *Résoudre l'équation*

$$\Delta u + u = 0$$

dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Montrer que toutes ses solutions sont de classe C^∞. En existe-il de non triviales qui soient à support compact?