Analyse fonctionnelle et EDP,
Partiel, mars 2011
ENS, FIMFA, première année.

Aucun document, ni calculatrice ni téléphone.

Exercice 1 (Sur la métrisabilité de la topologie faible étoile).

1. *Soit E un evtlcs, montrer que la topologie faible étoile de E' est métrisable si et seulement si E possède une base algébrique au plus dénombrable.*

   Supposons la topologie faible étoile de E' métrisable par la distance d alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe une partie finie de E, Φ_n, telle que si $f \in E'$ vérifie $|f(x)| < 1$ pour tout $x \in \Phi_n$ alors $f \in B(0, n^{-1}) := \{g \in E' \,:\, d(0,g) < n^{-1}\}$. Définissons alors l'ensemble au plus dénombrable $\Phi := \cup_n \Phi_n$ et soit $x_0 \in E$, il existe alors $n \in \mathbb{N}^*$ tel que si $f \in E'$ vérifie $|e_x(f)| = |f(x)| < 1$ pour tout $x \in \Phi_n$ alors $|f(x_0)| < 1$, ce dont on déduit que $\cap_{x\in\Phi_n}\ker(e_x) \subset \ker(e_{x_0})$ $(e_x(f) := f(x))$, le lemme des noyaux implique alors que e_{x_0} est combinaison linéaire de $\{e_x,\ x \in \Phi\}$, utilisant enfin le fait que E' sépare les points de E (en vertu du théorème de Hahn-Banach et grâce au fait que E est un evtlcs) on en déduit que x_0 est combinaison linéaire des éléments de Φ_n, ainsi Φ est une famille génératrice. Réciproquement, si E possède une base algébrique au plus dénombrable, Φ, la topologie faible étoile sur E' est associée à la famille au plus dénombrable (et séparante) de semi normes $\{f \in E' \mapsto |f(x)|,\ x \in \Phi\}$ ce qui assure sa métrisabilité comme vu en cours.

2. *En déduire que si E est un espace de Banach de dimension infinie, la topologie faible étoile de E' n'est pas métrisable.*

   Il s'agit de montrer que si E, un espace de Banach de dimension infinie, il ne possède pas de base algébrique. Si $\{x_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ était une telle base, chaque sev de dimension finie donc fermé de E, $E_n := \mathrm{vect}\{x_1, ..., x_n\}$ étant d'intérieur vide, il résulterait du théorème de Baire que sa réunion, i.e. E entier, est aussi d'intérieur vide, ce qui constitue la contradiction recherchée.

Exercice 2 (Condition de Legendre-Hadamard et systèmes elliptiques du second ordre).

Dans tout ce qui suit, on utilisera systématiquement la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés. Soit d et n deux entiers non nuls, et

$a_{\alpha\beta ij}$ des réels, $1 \leq \alpha, \beta, \leq d$, $1 \leq i, j \leq n$ vérifiant la condition (dite de Legendre-Hadamard) qu'il existe $\nu > 0$ tel que

$$a_{\alpha\beta ij} M_{\alpha i} M_{\beta j} \geq \nu \mathrm{tr}(MM^T)$$

pour toute matrice $M \in M_{dn}(\mathbb{R})$ de rang inférieur ou égal à 1.

1. *Soit $\xi \in \mathbb{R}^d$, soit $M(\xi) \in L(\mathbb{C}^n)$ défini par $(M(\xi)z)_i = a_{\alpha\beta ij}\xi_\alpha\xi_\beta z_j$ pour tout $i = 1, ..., n$ et $z \in \mathbb{C}^n$, montrer que* $\mathrm{id}_{\mathbb{C}^n} + M(\xi)$ *est inversible et qu'il existe une constante $C \geq 0$ telle que*

$$\|(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^n} + M(\xi))^{-1}\| \leq \frac{C}{1 + |\xi|^2},\ \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$

   Remarquons d'abord qu'une matrice $M = [M_{\alpha i}] \in M_{dn}(\mathbb{R})$ de rang 1 s'écrit sous la forme $M = \xi \otimes x$ avec $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (c'est à dire $M_{\alpha i} = \xi_\alpha x_i$) et qu'on a alors $\mathrm{tr}(MM^T) = (\sum_\alpha \xi_\alpha^2)(\sum_i x_i^2)$ de sorte que la condition de Legendre-Hadamard peut aussi s'écrire sous la forme

$$a_{\alpha\beta ij}\xi_\alpha x_i \xi_\beta x_j \geq \nu(\sum_\alpha \xi_\alpha^2)(\sum_i x_i^2) = \nu|\xi|^2|x|^2, \forall (\xi, x) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n \quad (1)$$

   Soit maintenant $\varphi \in \mathbb{C}^n$, et $z \in \mathbb{C}^n$ tels que $(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^n} + M(\xi))z = \varphi$ c'est-à-dire

$$z_i + a_{\alpha\beta ij}\xi_\alpha\xi_\beta z_j = \varphi_i,\ i = 1, ..., n$$

   multipliant chacune de ces équations par $\overline{z}_i$, en sommant sur i, en prenant la partie réelle du résultat obtenu, en utilisant (1) et enfin l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient facilement

$$|z|^2 + \nu|\xi|^2|z|^2 \leq \mathrm{Re}(\varphi_i \overline{z}_i) \leq |\varphi||z|$$

   ce qui montre bien sûr que $\mathrm{id}_{\mathbb{C}^n} + M(\xi)$ est inversible mais aussi que

$$|z| = |(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^n} + M(\xi))^{-1}\varphi| \leq \frac{|\varphi|}{1 + \nu|\xi|^2}$$

   ce qui établit l'inégalité recherchée.

2. *Soit $s \in \mathbb{R}$ et $f = (f_1, ..., f_n) \in (H^s(\mathbb{R}^d))^n$ montrer que le système d'EDPs:*

$$-a_{\alpha\beta ij}\partial_{\alpha\beta} u_j + u_i = f_i,\ i = 1, ..., n$$

possède une unique solution $u = (u_1, ..., u_n) \in \mathcal{S}'$. Montrer que $u \in H^{s+2}$ et que

$$\|u\|_{H^{s+2}} \leq C\|f\|_{H^s}$$

pour une constante C indépendante de $f \in H^s$.

En prenant la transformée de Fourier du système on obtient le système algébrique

$$(\mathrm{id} + M(\xi))\hat{u} = \hat{f}$$

ou encore

$$\hat{u} = (\mathrm{id} + M(\xi))^{-1}\hat{f} \in \mathcal{S}'$$

de sorte que le système possède une unique solution u dans $\mathcal{S}'$ avec l'estimation de la question précédente on obtient que $u \in H^{s+2}$ avec

$$\|u\|_{H^{s+2}} = \|(1 + |\xi|^2)^{(s+2)/2}\hat{u}\|_{L^2} \leq C\|(1 + |\xi|^2)^{s/2}\hat{f}\|_{L^2} = C\|f\|_{H^s}$$

Exercice 3 (Dualité pour des problèmes convexes paramétrés). Soit G un evn et $f : G \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, propre c'est à dire non identiquement égale à $+\infty$, la transformée de Legendre f, f^* est la fonction : $G' \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par

$$f^*(x^*) := \sup_{x \in G}\{< x^*, x > -f(x)\}, \ \forall x^* \in G'.$$

Pour $x \in G$, le sous-différentiel de f en x est par définition l'ensemble

$$\partial f(x) := \{x^* \in G' \ : \ f(y) \geq f(x)+ < x^*, y - x >, \ \forall y \in G\}.$$

Soit maintenant E et F deux evn, Φ convexe s.c.i. propre $E \times F \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, pour tout $p \in F$, on pose

$$h(p) := \inf_{x \in E} \Phi(x, p).$$

On considère alors le problème

$$\inf_{x \in E} \Phi(x, 0) \tag{2}$$

ainsi que son *dual*:

$$\sup_{p^* \in F'} -\Phi^*(0, p^*) \tag{3}$$

On suppose que $h(0) \in \mathbb{R}$ et qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $p \in F \mapsto \Phi(x_0, p)$ soit finie et continue en $p = 0$. Le but de l'exercice est de montrer que l'infimum dans (2) est égal au supremum dans (3) et que ce dernier est atteint, autrement dit de prouver la relation de dualité

$$\inf_{x \in E} \Phi(x, 0) = \max_{p^* \in F'} -\Phi^*(0, p^*). \tag{4}$$

1. *Soit G un evn, f convexe s.c.i. propre : $G \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ montrer que f^* est convexe s.c.i. propre sur E'.*

   Soit $x_0 \in G$ tel que $f(x_0) < +\infty$ et $\lambda_0 < f(x_0)$ on peut alors séparer au sens strict (x_0, λ_0) du convexe fermé $\mathrm{Epi}(f)$: il existe $(x^*, \alpha) \in G' \times \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$ et $\varepsilon > 0$ tels que

   $$< x^*, x_0 > +\alpha\lambda_0 \leq < x^*, x > +\alpha\lambda - \varepsilon, \forall (x, \lambda) \in \mathrm{Epi}(f)$$

   il est facile d'en déduire que $\alpha > 0$ puis que $-f - x^*/\alpha$ est majorée c'est à dire que $f^*(-x^*/\alpha) < +\infty$, le fait que f^* soit convexe et sci est évident : c'est un supremum de fonctions affines continues (donc convexes et sci). On pourra noter au passage que le fait que f^* soit propre signifie que f possède une minorante affine continue, ainsi on a montré que toute fonction convexe sci possède une minorante affine continue.

2. *Soit C un convexe d'intérieur non vide dans un evn, montrer que l'intérieur de C est convexe et dense dans C.*

   Soit $x \in \mathrm{int}(C)$ et $y \in C$, nous allons montrer que $[x, y[= \{tx + (1-t)y,\ t \in]0,1]\}$ est inclus dans $\mathrm{int}(C)$. Soit donc $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset C$, $t \in]0,1]$, $z := tx + (1-t)y$ et $u \in B(0,1)$ on a alors $z + tru = t(x + ru) + (1-t)y \in C$ par convexité de C et ainsi $B(z, tr) \subset C$ de sorte qu'on a bien $z \in \mathrm{int}(C)$. Ainsi si x et y sont intérieurs à C on a $[x, y] = [x, y[\cup]x, y] \subset \mathrm{int}(C)$ ce qui établit la convexité de $\mathrm{int}(C)$ mais aussi sa densité dans C puisque si $y \in C$ et $x \in \mathrm{int}(C)$ on a $y = \lim_{t\to 0^+}(tx + (1-t)y)$.

3. *Soit G un evn, f convexe : $G \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $x \in G$ tel que f soit majorée au voisinage de x montrer que f est continue en x puis que $\partial f(x)$ est non vide.*

   Sans perte de généralité, supposons $x = 0$ et $f \leq M$ sur $B(0,1)$. Soit $u \in B(0,1)$ et $r \in [0,1]$, par convexité de f on a $f(ru) \leq (1-r)f(0) + rf(u) \leq (1-r)f(0) + rM$ et ainsi $f(ru) - f(0) \leq r(M - f(0))$. Ecrivant

   $$0 = \frac{1}{1+r}(ru) + \frac{r}{1+r}(-u)$$

   et utilisant à nouveau la convexité de f il vient $(1+r)f(0) \leq f(ru) + rf(-u) \leq f(ru) + rM$ et donc $f(0) - f(ru) \leq r(M - f(0))$. Nous avons donc établi que $|f(x) - f(0)| \leq r(M - f(0)$ pour tout $x \in B(0, r)$ ce qui montre en particulier la continuité de f en 0. Montrons maintenant que f est sous-différentiable en 0 c'est à dire que $\partial f(0) \neq \emptyset$, on remarque d'abord que puisque f est continue en 0, l'épigraphe de f est d'intérieur non vide. Notons C l'intérieur de l'épigraphe de f, en vertu de la question précédente C est un ouvert convexe dense dans l'épigraphe de f. La première forme géométrique du théorème de Hahn-Banach nous permet de séparer $(0, f(0))$ de C au sens large: il existe $(x^*, \alpha) \in G' \times \mathbb{R} \setminus \{0,0\}$, tels que

$$\alpha f(0) \leq \alpha\lambda + < x^*, y >, \ \forall (y, \lambda) \in C$$

et par densité de C dans l'épigraphe de f, remarquons qu'en fait l'inégalité précedente a lieu pour tout $y \in E$ tel que $f(y) < +\infty$ et tout $\lambda \geq f(y)$. Il est clair que $\alpha \geq 0$ et si α était nul, comme $f \leq M$ sur $B(0,1)$ on aurait que $< x^*, y > \geq 0$ pour tout $y \in B(0,1)$ ce qui impliquerait que $x^* = 0$ ce qui est absurde. On a donc $\alpha > 0$ et pour tout $y \in G$, on a $f(y) \geq f(0) - < \alpha^{-1}x^*, y >$ de sorte que $-\alpha^{-1}x^* \in \partial f(0)$.

4. *Montrer que $h(p) > -\infty$ pour tout $p \in F$ et que h est convexe.*

   Par hypothèse $h(0) \in \mathbb{R}$ et il existe $x_0 \in E$ tel que $q \mapsto \Phi(x_0, q)$ soit continue en 0 en particulier il existe $r > 0$ et $M \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi(x_0, q) \leq M$ pour tout $q \in F$ tel que $\|q\| \leq r$. Soit $p \in F$ et $\varepsilon := r/(|p|+1)$, soit $x \in E$, par convexité de Φ et par définition de h, on a

$$\begin{aligned} h(0) \leq \ \Phi\Big(\frac{1}{1+\varepsilon}x_0 + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}x, 0\Big) &\leq \frac{1}{1+\varepsilon}\Phi(x_0, -\varepsilon p) + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\Phi(x,p) \\ &\leq \frac{M}{1+\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\Phi(x,p) \end{aligned}$$

   ceci montre que $x \in E \mapsto \Phi(x,p)$ est minorée et donc que $h(p) > -\infty$. Soit maintenant $(p,q) \in F^2$ et $t \in [0,1]$, pour tout $(x,y) \in E^2$ on a:

$$h(tp+(1-t)q) \leq \Phi(tx+(1-t)y, tp+(1-t)q) \leq t\Phi(x,p) + (1-t)\Phi(y,q)$$

   prenant l'infimum du membre de droite en $(x,y) \in E^2$, on en déduit la convexité de h.

5. *Etablir (4).*

   On commence par remarquer que par définition de Φ^* pour tout $(x,p) \in E \times F$ et $(x^*, p^*) \in E' \times F'$ on a

$$\Phi(x,p) + \Phi^*(x^*, p^*) \geq < (x^*, p^*), (x,p) > = < x^*, x > + < p^*, p >$$

   en particulier

$$\Phi(x,0) + \Phi^*(0, p^*) \geq 0, \forall (x, p^*) \in E \times F'$$

et donc
$$h(0) = \inf_{x \in E} \Phi(x, 0) \geq \sup_{p^* \in F'} -\Phi^*(0, p^*). \tag{5}$$

Comme $h \leq \Phi(x_0, .)$ et $\Phi(x_0, .)$ est majorée au voisinage de 0 il en est de même de h, comme h est convexe on déduit de la question 2. qu'il existe $\overline{p}^* \in \partial h(0)$ on a alors pour tout $(x, p) \in E \times F$

$$h(0) \leq h(p) - < \overline{p}^*, p > \leq \Phi(x, p) - < \overline{p}^*, p > = \Phi(x, p) - < (0, \overline{p}^*), (x, p) >$$

en prenant l'infimum du membre de gauche sur $(x, p) \in E \times F$, il vient donc
$$h(0) \leq -\Phi^*(0, \overline{p}^*)$$

ce qui avec (5) implique que $\overline{p}^*$ résout (3) et que (5) est une égalité.