Université Paris-Dauphine. DUMI2E 2006/2007. Algèbre 2. G. Carlier.

Séance 1

1. Parmi les couples suivants de matrices A, B, dire si le produit AB a un sens et si oui, donner son format et le calculer:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Pour $\theta \in I\!R$ on pose:

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

   Calculer $A_\theta A_{\theta'}$ pour $(\theta, \theta') \in I\!R^2$.

3. Déterminer les matrices A et B de $M_2(I\!R)$ vérifiant:

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A - B = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
calculer $(A+B)^2$ et $A^2 + B^2 + 2AB$, qu'en conclure?

5. Résoudre le système
$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & z & = 1 \\ x & + & y & + & 3z & = 1 \\ x & - & 2y & + & 2z & = 1 \end{array}\right.$$

6. Discuter et résoudre selon la valeur du paramètre $m \in I\!\!R$ le système:
$$\left\{\begin{array}{l} mx + y + t = m + 1 \\ x + my + z = m - 1 \\ y + mz + t = m + 1 \\ x + z + mt = m - 1. \end{array}\right.$$

Séance 2

1. On se place dans $I\!\!R^2$.

   a) Peut-on trouver deux réels x et y tels que $(0,1) = x(1,2) + y(2,3)$? et tels que $(0,1) = x(1,2) + y(2,4)$?

   b) Soit $u = (1,2)$ et $v = (2,3)$. Déterminer l'ensemble des vecteurs (a,b) pour lesquels il existe deux réels x et y tels que $(a,b) = x(1,2) + y(2,3)$.

2. Dans $I\!\!R^3$, on considère les deux vecteurs: $a = (1,-1,1)$ et $b = (-1,3,1)$.

   a) Chercher si pour l'un des vecteurs suivants c, d, e, il existe deux réels λ et μ tels ce vecteur s'écrive $\lambda a + \mu b$. $c = (1,2,3)$, $d = (1,0,2)$, $e = (0,1,1)$.

   b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les réels x, y et z pour il existe deux réels λ et μ tels que $(x,y,z) = \lambda a + \mu b$.

3. Montrer que pour tout polynôme $P \in I\!\!R_3[X]$ il existe des nombres réels uniques (a,b,c,d) tels que:
$$P = aP_1 + bP_2 + cP_3 + dP_4$$
   avec $P_1 = 1$, $P_2 = (1+X)^2$, $P_3 = (1-X)^2$, $P_4 = X^3$.

   Est-ce le cas avec $P_1 = 1$, $P_2 = 1 + X^2$, $P_3 = 1 - X^2$, $P_4 = X^3$? Quels sont les polynômes que l'on obtient alors ?

Chapitre 1 - Espaces vectoriels

Sous-espaces vectoriels

1. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des $I\!R$-espaces vecoriels?, des $\mathbf{C}$-espaces vectoriels?

   (a) $I\!N, \mathbf{Z}, \mathbf{C}, \mathbf{Q}, I\!R_n[X]$, $M_{n,p}(I\!R)$, $\mathbf{C}_n[X]$, $\mathbf{C}^n$, $M_{n,p}(C)$.

   (b) L'ensemble des applications de $I\!R$ dans $I\!R$; l'ensemble des applications de $[0,1]$ dans $I\!R$; l'ensemble des applications de $I\!R$ dans $[0,1]$.

   (c) L'ensemble des applications continues de $I\!R$ dans $I\!R$; l'ensemble des applications continues de $[0,1]$ dans $I\!R$; l'ensemble des applications continues de $I\!R$ dans $[0,1]$.

   (d) L'ensemble des applications dérivables de $I\!R$ dans $I\!R$; l'ensemble des applications dérivables de $[0,1]$ dans $I\!R$; l'ensemble des applications dérivables de $I\!R$ dans $[0,1]$.

   (e) Un triangle du plan $I\!R^2$, un cercle, un carré, une droite.

   (f) L'ensemble des complexes de module 1; l'ensembles des complexes d'argument 1.

   (g) L'ensemble des $P \in I\!R_n[X]$ tels que $P(0) = 1$; L'ensemble des $P \in I\!R_n[X]$ tels que $P(1) = 0$; L'ensemble des $P \in I\!R_n[X]$ tels que $P'(0) = 0$.

2. Soit E un sous espace vectoriel de $I\!R$. Montrer que $E = \{0\}$ ou $I\!R$.

3. Soit E un sous espace vectoriel de $I\!R^2$. Montrer que $E = \{0\}$ ou $I\!R^2$ ou que E est une droite.

4. Soit $E = \{(x, y, z) \in I\!R^3, 2x + y - z = 0\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $I\!R^3$.

5. Les sous-ensembles de $I\!R^2$ suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

   a) l'ensemble des éléments de $I\!R^2$ du type (x, x)

   b) l'ensemble des éléments de $I\!R^2$ du type $(x, x + 1)$.

   c) l'ensemble des éléments de $I\!R^2$ du type: $(ax + b, 0)$ (où a et b sont des réels fixés).

   d) l'ensemble $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$.

6. Soient les vecteurs de $I\!R^4$ définis par:

   $u_1 = (1, 2, 0, 1), u_2 = (2, 3, 0, 3)$ et $u_3 = (3, 2, 1, 2)$.

   Déterminer analytiquement le sous-espace vectoriel $E = \mathrm{Vect}\{u_1, u_2, u_3\}$.

   Familles libres, génératrices, bases

7. a) Dans $\mathbb{R}$, soit $u = (1, 2)$, $v = (2, 3)$ et $w = (2, 4)$. La famille (u, v) est-elle libre ? Donner une base de l'espace vectoriel $\text{Vect}\{u, v\}$.

   b) Même question avec la famille (u, w)

8. On considère les vecteurs a et b de l'exercice de l'exercice 2. La famille (a, b) est-elle libre ?

9. Trouver une base du plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation

$$x + y + 2z = 0 \ .$$

10. Soit:

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, 2x + y + 3z - t = 0 \text{ et } 3x + 2y + 4z - 4t = 0\}$$

   Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Trouver a et b de $\mathbb{R}^4$ tels que $E = \text{Vect}\{a, b\}$. Y a-t'il unicité de $\{a, b\}$?

11. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les systèmes de vecteurs suivants:

   i) $v_1 = (1, 2, 2, 1)$, $v_2 = (5, 6, 6, 5)$, $v_3 = (-1, -3, 4, 0)$, $v_4 = (0, 4, -3, -1)$

   ii) $v_1 = (2, 0, 4, 2)$, $v_2 = (1, 2, -2, -3)$, $v_3 = (3, 1, 3, 4)$, $v_4 = (2, 4, 9, 5)$

   ii) $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (2, 1, 2, 1)$, $v_3 = (1, -1, 1, -1)$, $v_4 = (0, 1, 0, 1)$.

   Etudier la dépendance, l'indépendance, les éventuelles relations de dépendance de ces sytèmes de vecteurs et déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels engendrés.

12. Pour quelles valeurs du réel λ le système suivant forme-t'il une base de $\mathbb{R}^3$?

$$e_1 = (1, 2, 2), e_2 = (5, 6, 6), e_3 = (1, 1, \lambda)$$

13. a) Soient $a = (1, 2)$ et $b = (-1, 3)$. Montrer que $\{a, b\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et calculer les coordonnées de tout Vecteur de $\mathbb{R}^2$ dans cette base.

   b) Soient $u = (1, 0, 2), v = (0, 4, 1), w = (0, 3, 1)$. Montrer que $\{u, v, w\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer les coordonnées de tout Vecteur dans cette base.

14. On considère le sous-ensemble

$$E = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, x_1 - x_3 = 2x_2 + x_4 = 0\}$$

   E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Si oui, en donner une base et la dimension.

15. Soit $p \in I\!N$. Montrer que la famille des polynômes:

$$P_n(X) = 1 + X + X^2 + .. + X^n, \text{ pour } n \in \{0, .., p\}$$

forme une base de l'espace vectoriel des polynomes de degré inferieur ou égal à p.

16. Soit $n \in I\!N$. Montrer que toute famille de $n+1$ polynômes de degrés deux à deux distincts dans $I\!R_n[X]$ est une base de $I\!R_n[X]$. En déduire que pour tout polynôme P de $I\!R_n[X]$ et tout réel a, on a:

$$P(X) = P(a) + P'(a)(X - a) + ... + \frac{P^{(i)}(a)}{i!}(X - a)^i + ... + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X - a)^n$$

17. Soit $Q = \{P \in I\!R_4[X], P(0) = P(1) = 0\}$. Montrer que Q est un sous-espace vectoriel de $I\!R_4[X]$ dont on donnera une base et la dimension.

18. Soient $g_1 = (2, -2, 3, 1)$ et $g_2 = (-4, 5, -6, -2)$. Compléter $\{g_1, g_2\}$ avec des vecteurs de la base canonique de $I\!R^4$ de manière à former une base de $I\!R^4$. Est-ce possible si $g_2 = (-4, 4, -6, -2)$?

19. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel de $I\!R[X]$ engendré par $\{1, (1 + X)^2, (1 - X)^2, X^2\}$?

20. Soit E l'ensemble des fonctions de $I\!R$ dans $I\!R$ de classe C^∞. Montrer que E est un $I\!R$-e.v.. Montrer que la famille $(f_n)_{n \in I\!N^*}$ définie par $f_n(x) = x^n$ est une famille libre de E. Montrer que la famille $(g_\alpha)_{\alpha \in I\!R}$ définie par $g_\alpha(x) = e^{\alpha x}$ est une famille libre de E. Qu'en déduire sur E?

21. E étant défini comme dans l'exercice précédent, donner trois exemples (distincts de ceux de l'exercice précédent) de familles libres infinies de E.

22. Montrer que l'ensemble E des suites $(u_n)_{n \in I\!N}$ à valeurs réelles est un $I\!R$-ev. Montrer que l'ensemble F des suites de réels nulles à partir d'un certain rang est un sev de E. Donner une base de F puis en déduire que E de dimension infinie. Montrer que le sous ensemble G de E formé par les suites périodiques est un sev de E de dimension infinie. Déterminer $F \cap G$.

23. On considère l'ensemble E des suites $(u_n)_{n \in I\!N}$ à valeurs réelles qui vérifient:

$$\forall n \in I\!N, u_{n+3} - 6u_{n+2} + 11u_{n+1} - 6u_n = 0$$

a) Montrer que E est un espace vectoriel.

b) Chercher des éléments de E de la forme $u_n = \lambda^n$, avec λ un réel.

c) Trouver une base de E.

24. Soit A_n le sous-ensemble des matrices antisymétriques de $M_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que A_n est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.

b) Pour $n = 2$, déterminer une base de A_2, et sa dimension.

c) Même question pour $n = 3$.

Somme d'espaces vectoriels

25. Soit E_1 le s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(1, 2, 0)$ et $(0, 1, 1)$ et E_2 le s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(1, 1, 1)$. Déterminer $E_1 \cap E_2$ et $E_1 + E_2$.

26. On se place dans $\mathbb{R}^3$, et l'on donne les vecteurs: $u = (1, 1, 1), v = (1, 2, 0)$, $w = (2, 1, 2)$ et $y = (2, 0, 3)$. On note E le sous-espace vectoriel engendré par u et v, et F le sous-espace vectoriel engendré par w et y. Trouver trois réels a, b, et c tels que:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, ax + by + cz = 0\}$$

Déterminer $E \cap F$, puis $E + F$.

27. Soit $E_1 = \text{Vect}\{v_1, v_2\}$ et $E_2 = \text{Vect}\{w_1, w_2\}$ des sous-espaces de $\mathbb{R}^4$ où

$$v_1 = (1, -1, 0, 1),\ v_2 = (0, 2, 1, 0) \text{ et } w_1 = (0, 6, -1, 4),\ w_2 = (3, 3, 1, 5).$$

a) Déterminer une base de $E_1 \cap E_2$.

b) Donner une base de $E_1 + E_2$.

c) Définir un supplémentaire de $E_1 + E_2$ dans $\mathbb{R}^4$.

28. Soient $u = (1, 2, 0)$ et $v = (0, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$. Trouver un supplémentaire de $\text{Vect}\{u\}$ dans $\mathbb{R}^3$, et un supplémentaire de $\text{Vect}\{u, v\}$ dans $\mathbb{R}^3$.

29. Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n, P un polynôme non nul de $\mathbb{R}_n[X]$ et F l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ divisibles par P.

a) Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Déterminer un supplémentaire de F (utiliser la division euclidienne des polynômes). En déduire la dimension de F.

30. a) Montrer que toute matrice carrée s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

    b) Montrer qu'il existe une base de M_n formée de matrices symétriques et antisymétriques. Expliciter cette base pour $n = 3$.

31. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. En utilisant le théorème de la base incomplète, démontrer que tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire.

Chapitre 2 - Applications linéaires

1. Parmi les applications suivantes, déterminer lesquelles sont linéaires :

   i) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f_1(x, y) = (x^3 + y, 5x - y)$

   ii) $f_2 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, définie par $f_2(P)(X) = P(X^2)$

   iii) $f_3 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, définie par $f_3(P)(X) = (P(X))^2$

   iv) $f_4 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, définie par $f_4(P)(X) = XP'(X + 1)$

   Pour celles qui sont linéaires, déterminer si elles sont injective, surjectives.

2. Soient E et F deux $\mathbb{R}-$espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans F et n vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ de E. Démontrer les propriétés suivantes :

   a) si $u_1, \ldots, u_n$ engendrent E et si f est surjective, alors $f(u_1), \ldots, f(u_n)$ engendrent F.

   b) si $f(u_1), \ldots, f(u_n)$ engendrent F et si f est injective, alors $u_1, \ldots, u_n$ engendrent E.

   c) si $u_1, \ldots, u_n$ sont linéairement indépendants et si f est injective, alors $f(u_1), \ldots, f(u_n)$ le sont aussi.

   d) Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que l'image d'une base de E soit une base de F.

3. Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par :

   $$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_1 + x_2)$$

   Montrer que f est linéaire, bijective et déterminer f^{-1}.

Le théorème du rang

4. Soit $E = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, en donner une base et la dimension.

   On considère l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

   $$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, 0)$$

   Montrer que f est linéaire. Que représente E pour l'application f ? Quelle est l'image de f ? En donner une base. Vérifier que

   $$dim(\mathbb{R}^3) = dim(Im(f)) + dim(Ker(f)) .$$

   f est-elle surjective ? injective ?

5. On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z,t) = (X,Y,Z)$ où

$$\begin{cases} X = x + z + t \\ Y = 2x + y + 3z \\ Z = -x + y - 3t \end{cases}$$

a) Montrer sans calcul que f n'est pas injective.

b) Déterminer le noyau de f. Donner une base et la dimension du noyau. Quelle est la dimension de l'image de f ? f est-elle surjective ?

c) On considère tous les systèmes d'équations linéaires:

$$\begin{cases} x + z + t & = & a \\ 2x + y + 3z & = & b \\ -x + y - 3t & = & c \end{cases}$$

où a, b, c sont des réels. Etudier l'existence et l'unicité éventuelle de la solution en fonction de a, b, c. Montrer, sans le résoudre, que le système correspondant au cas $a = 0$, $b = 1$ et $c = 2$ n'a pas de solution.

6. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, soit p une application linéaire de E dans E. Montrer que si $p \circ p = p$ alors $Imp \oplus Kerp = E$.

7. Soit E un espace Vectoriel réel et f un élément de $L(E)$.

a) Montrer que $Kerf \subset Kerf^2$ et $Imf^2 \subset Imf$.

b) Etablir les équivalences suivantes :

$$Kerf \cap Imf = \{0\} \Leftrightarrow Kerf = Kerf^2$$

et

$$E = Imf + Kerf \Leftrightarrow Imf = Imf^2$$

c) Si E est de dimension finie, montrer que :

$$Kerf = Kerf^2 \Leftrightarrow Imf = Imf^2 \Leftrightarrow E = Imf \oplus Kerf$$

d) On suppose encore que E est de dimension finie. On désigne par F la réunion des noyaux des applications f^k ($k \in \mathbb{N}^*$). Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et que si $F = Kerf$, alors $E = Imf \oplus Kerf$.

Chapitre 3 - Représentation matricielle des applications linéaires

8. a) Ecrire la matrice représentant l'application identité de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ dans une base quelconque de $\mathbb{R}^4$.

   b) Soient E la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et soit B la base de $\mathbb{R}^4$ constituée des vecteurs

   $$v_1 = (1,0,1,0)\ ,\ v_2 = (0,1,0,0)\ ,\ v_3 = (0,0,1,0)\ ,\ v_4 = (1,0,0,1).$$

   Ecrire la matrice $M_{BE}(id)$ représentant l'application identité dans les bases E et B, et la matrice $M_{EB}(id)$ représentant l'application identité dans les bases B et E.

9. a) Montrer que les données

   $$f(1,1,1) = 0, \quad f(1,1,0) = -1, \quad f(0,1,0) = 2$$

   définissent une unique application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer l'image par f du Vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$. Quelle est la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}$?

   b) De même, montrer que les données

   $$f(1,0,0) = (1,2), \quad f(1,1,0) = (1,-1), \quad f(0,1,-1) = (1,0)$$

   définissent une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ et déterminer l'image par f du Vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$. Quelle est la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$?

10. Soit f l'application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

    $$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (y_1, y_2, y_3)$$

    où

    $$\begin{cases} y_1 = 6x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\ y_2 = x_2 + x_4 \\ y_3 = x_2 + x_3 + x_4 \end{cases}$$

    a) Montrer que f est une application linéaire.

    b) Soit E la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et F la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Ecrire la matrice $M_{F,E}(f)$ de f dans ces bases.

    c) Soit dans $\mathbb{R}^4$ le système de vecteurs B défini à l'aide des vecteurs e_1, e_2, e_3, e_4 de la base canonique E de $\mathbb{R}^4$, par :

    $$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \\ e'_2 = e_2 + e_3 + e_4 \\ e'_3 = e_3 + e_4 \\ e'_4 = e_4 \end{cases}$$

    Montrer que $B = \{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Ecrire la matrice $M_{F,B}(f)$.

11. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ représentée, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer le rang de f.

b) Trouver une base de Imf, une base de $Kerf$ et montrer que $Imf \cap Kerf = \{0\}$.

12. Soit $\mathbb{R}_n[X]$, l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels, rapporté à sa base canonique. Soit f l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(P) = P(2)$ et soit g l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ définie par $g(P) = P'$. Déterminer les matrices par rapport aux bases canoniques de ces applications linéaires.

13. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f, c'est-à-dire tel que $f(F)$ est inclus dans F. On suppose que $dimF = m$. Montrer que f peut être représentée par une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} A & | & B \\ - & - & - \\ 0 & | & C \end{pmatrix}$$

où A est une matrice carrée d'ordre m.

14. Exercice II du partiel du 2 avril 2001.

Rang d'une matrice - Matrices semblables

15. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 9 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -\lambda & 2\lambda \end{pmatrix}$.

a) A quelle condition la matrice A est-elle de rang 3 ?

b) Si A n'est pas de rang 3, quel est son rang ? Quelle relation lie alors les vecteurs lignes (resp. les vecteurs colonnes) ?

16. Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$. On dit que la matrice A est semblable à la matrice B s'il existe une matrice inversible $P \in M_n(\mathbb{R})$ telle que

$$B = P^{-1}AP$$

a) Montrer que la relation " A est semblable à B" est une relation d'équivalence.

b) Montrer que si A et B sont semblables, alors A^p et B^p le sont aussi.

c) On suppose que A est une matrice scalaire. Quelles sont les matrices semblables à A ?

d) Montrer que deux matrices semblables ont même rang.

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Calculer le rang de chacune de ces deux matrices. Sont-elles semblables ?

17. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (où $j = exp(2ip/3)$) et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que A et B ont même rang.

b) Calculer A^3 et B^3. En déduire que A et B ne sont pas semblables.

Chapitre 4 - Déterminants

1. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

2. Calculer de même :

$$\begin{vmatrix} 1 & n & . & . & . & n \\ n & 2 & n & . & . & n \\ . & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & . \\ n & . & . & . & . & n \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & 0 & 1 & . & . & 1 \\ . & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & 1 \\ 1 & . & . & . & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1+x & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & . & . & 1 \\ . & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & 1 \\ 1 & . & . & . & 1 & 1+x \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & 1+a_1 & 1 & . & . & 1 \\ . & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & 1 \\ 1 & . & . & . & 1 & 1+a_n \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & . & . & . & a_n \\ -x & x & 0 & . & . & 0 \\ 0 & -x & x & 0 & & . \\ . & & . & . & & . \\ . & & & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & -x & x \end{vmatrix}$$

3. a) Montrer que le déterminant de toute matrice à coefficients dans Z appartient à Z (on pourra faire une récurrence sur l'ordre de la matrice).

   b) Les nombres 546, 273 et 169 étant divisibles par 13, montrer sans le calculer que le déterminant suivant : $D = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$ est divisible par 13.

4. A quelle condition la matrice $A_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & m & 1 \\ 1 & m & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

5. A quelle condition la matrice suivante est-elle inversible ?

$$A = \begin{pmatrix} a+b & b & . & . & . & b \\ b & a+b & b & . & . & b \\ . & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & . \\ b & . & . & . & . & a+b \end{pmatrix} \qquad A \in M_n(I\!R)$$

6. Pour quelles valeurs de λ le système suivant admet-il une solution unique ?

$$\begin{cases} \lambda x_i + a_i x_{n+1} & = & b_i & \forall i \in \{1, \ldots, n\} \\ \sum_{i=1}^n a_i x_i + \lambda x_{n+1} & = & b_{n+1} & \end{cases}$$

   où, pour tout i, a_i et b_i sont des réels.

7. Résoudre l'équation :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & 0 & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

8. Soit p un projecteur d'un espace Vectoriel E de dimension finie n, c'est-à-dire un endomorphisme de E tel que $p^2 = p$. Que peut-on dire du déterminant d'une matrice représentant p ?

9. Soient A et B de matrices carrées d'ordre n. Montrer que $det(A + \lambda B)$ est un polynôme de degré au plus n en λ (on raisonnera par récurrence sur n).

10. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carré d'ordre n. On note $\tilde{A} = (b_{ij})$ la matrice dont le terme général est

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} det(A^*_{ji}) .$$

   a) Montrer que $A\tilde{A} = det(A)I_n$.

   b) En déduire la formule générale de l'inverse d'une matrice d'ordre 2.

11. Soit $(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ calculer le déterminant de la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & . & . & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & . & . & a_1^n \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & a_n & . & . & . & a_n^n \end{pmatrix} \qquad A \in M_{n+1}(\mathbb{R}).$$

   Une manière de trivialiser cet exercie est de considérer le polynôme P_n défini par:

$$P_n(x) := \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & . & . & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & . & . & a_1^n \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & x & . & . & . & x^n \end{vmatrix} .$$

Chapitre 5 - Diagonalisation

1. Soit E un espace vectoriel réel de dimension n, f et g deux endomorphismes de E.

   a) Montrer l'équivalence :

   $$f \text{ bijective} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \text{ n'est pas valeur propre de } f$$

   b) Montrer que si λ est valeur propre de f, λ^k est valeur propre de f^k et que si de plus f est bijective λ^{-1} est valeur propre de f^{-1}.

   c) Supposons que x soit un Vecteur propre commun à f et à g. Montrer que x est un Vecteur propre de $f+g$ et donner la valeur propre associée à x pour $f+g$.

   d) Même question pour $f \circ g$.

2. Exercice I, examen juin 2001.

3. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes:

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   Parmi ces matrices, lesquelles sont diagonalisables dans $I\!R$, dans C.

4. Soient A et B deux matrices de format $(n,1)$ non nulles. Déterminer les valeurs propres de la matrice $M = I_n - 2AB^T$. La matrice M est-elle diagonalisable?

5. Soit p un projecteur de $I\!R^n$, c'est-à-dire un endomomorphisme vérifiant $p \circ p = p$.

   a) Quelles sont les valeurs propres éventuelles de p?

   b) Montrer que $I\!R^n$ est somme directe de $Ker(p)$ et de $Ker(f - id_E)$. En déduire que p est diagonalisable et donner une matrice diagonale représentant p.

   c) En déduire que toute matrice A vérifiant $A^2 = A$ est diagonalisable et qu'il n'existe qu'une telle matrice A dont toutes les valeurs propres sont différentes de 0.

6. Soit $A \in M_n(I\!R)$ vérifiant $A^2 - A - 2I_n = O_n$ et f l'endomorphisme de $I\!R^n$ représenté par la matrice A dans la base canonique de $I\!R^n$. En procédant comme dans l'exercice précédent, montrer que A est toujours diagonalisable. En est-il de même pour une matrice $B \in M_n(I\!R)$ vérifiant $B^2 - 3B + 2I_n = O_n$? Et pour une matrice $C \in M_n(I\!R)$ vérifiant $C^2 - 6C + 9I_n = O_n$?

7. Montrer que toute matrice de $M_n(C)$ vérifiant $A^3 = I_n$ est diagonalisable. En est-il de même si $A \in M_n(I\!R)$?

8. Soit f un endomomorphisme de $I\!R^n$ vérifiant $f^n = 0$. On suppose qu'il existe un élément a de $I\!R^n$ tel que $f^{n-1}(a) \neq 0$.

   a) f est-il diagonalisable?

   b) Montrer que $\{a, f(a), \dots, f^{n-1}(a)\}$ est une base de $I\!R^n$ et donner la matrice A représentant f dans cette base.

   c) Montrer que $I_n - A$ est inversible et déterminer son inverse.

9. Soient f et g deux endomomorphismes de $I\!R^n$. On suppose que f et g ont chacun n valeurs propres distinctes deux à deux. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

   a) $f \circ g = g \circ f$

   b) f et g ont mêmes vecteurs propres.

10. Soit $E = \{A = (a_{ij})_n \in M_n(C) \mid \forall j \in \{1, \dots, n\},\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1\}$.

    a) Caractériser un élément de E à l'aide de la matrice "colonne" U dont tous les éléments sont égaux à 1.

    b) Montrer que si A et B sont éléments de E, alors AB est élément de E et que, si A est inversible, A^{-1} est aussi élément de E. Montrer que 1 est valeur propre de toute matrice de E et donner un Vecteur propre de A associé à cette valeur propre.

    c) Montrer que si A est élément de E et a tous ses éléments positifs, alors toute valeur propre de A est de module inférieur à 1.

11. a) Soit $A \in M_n(C)$. Montrer que :

    $$* \ P_{-A}(\lambda) = (-1)^n P_A(-\lambda) \qquad * \ P_{A^T}(\lambda) = P_A(\lambda) \qquad * \ P_{A+kI}(\lambda) = P_A(\lambda - k)$$

    $$* \ P_{2A}(\lambda) = 2^n P_A(\frac{\lambda}{2}) \qquad * \ P_{A^2}(\lambda^2) = P_A(\lambda)P_A(-\lambda)$$

    * Si A est inversible, $P_{A^{-1}}(\lambda) = \frac{1}{Det(A)}(-\lambda)^n P_A(\frac{1}{\lambda})$ * $P_{\bar{A}}(\lambda) = P_A(\bar{\lambda})$ (si $A = (a_{ij})_n$, on note $\bar{A} = (\overline{a_{ij}})_n$).

    b) On suppose que les valeurs propres de A sont λ_1, λ_2, ... λ_p. Quelles sont les valeurs propres de $-A$, $2A$, A^T, A^2, $\bar{A}$, $A + kI$? Que doivent vérifier les λ_i pour que A soit inversible ? Quelles sont alors les valeurs propres de A^{-1} ?

12. Calculer le polynôme caractéristique et trouver les valeurs propres des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ -1 & 2 & i+1 \\ 2-i & 1+i & i-1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} m+1 & 0 & 2 & 3 \\ m-7 & 2 & 4 & 7 \\ m+3 & -1 & 2 & 2 \\ m+1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & . & . & . & 0 & a_n \\ a_1 & 0 & . & & & 0 \\ 0 & a_2 & & & & . \\ . & & . & & . & . \\ 0 & . & . & 0 & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

13. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ (a, b, c éléments de $I\!R$).

a) Montrer que $P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$, avec λ_1, λ_2 réels.

b) Dans quel cas a-t-on $\lambda_1 = \lambda_2$? Préciser alors A.

c) En déduire que A est toujours diagonalisable.

14. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ une matrice à coefficients réels.

a) Quelles sont les valeurs propres de A ?

b) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice soit diagonalisable.

15. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ avec a, b dans $I\!R$. On note g l'endomorphisme de $I\!R^3$ associé.

a) Calculer le polynôme caractéristique de A et montrer que A a deux valeurs propres λ_1 et λ_2, de multiplicités respectives 1 et 2.

b) Calculer $Ker(g - \lambda_1 id)$ et $Ker(g - \lambda_2 id)$; en déduire que A est diagonalisable.

c) Trouver une matrice S inversible, indépendante de a et de b, et une matrice diagonale D telles que $D = S^{-1}AS$.

d) Calculer A^n, pour $n \in I\!N^*$.

16. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que A n'est pas diagonalisable dans $M_3(I\!R)$, puis que A est diagonalisable dans $M_3(C)$; donner ses valeurs propres.

b)Trouver deux matrices de $M_3(C)$, S inversible et D diagonale telles que $A = SDS^{-1}$; calculer A^n.

17. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Calculer P_A et déterminer les valeurs propres de A ; en déduire que A est diagonalisable.

b) Déterminer S inversible et D diagonale telles que $A = SDS^{-1}$

c) Calculer A^n

18. On suppose que deux matrices A et B d'ordre n, diagonalisables, ont mêmes valeurs propres et mêmes vecteurs propres associés. Montrer que A et B sont semblables.

19. Soit A une matrice diagonalisable. Montrer que $Ker(A) = Ker(A^2)$.

20. Soient A une matrice carré d'ordre n et λ un réel non nul. Montrer que

$$Ker(A^2 - \lambda^2 I_n) = Ker(A - \lambda I_n) \oplus Ker(A + \lambda I_n)$$

En déduire que, si A^2 est diagonalisable et $Ker(A) = Ker(A^2)$, alors A est diagonalisable.

21. Soient A et B deux matrices d'ordre n.

a) On suppose A inversible. Montrer que $P_{AB} = P_{BA}$.

b) On ne suppose plus A inversible. Montrer qu'il existe $\sigma_0 > 0$ tel que pour tout $\sigma \in]0, \sigma_0[$, la matrice $A - \sigma I_n$ est inversible.

c) En utilisant l'exercice 9 TD 3, montrer que $P_{(A-\sigma I_n)B}(\lambda)$ et $P_{B(A-\sigma I_n)}(\lambda)$ sont des polynômes en σ.

d) En déduire que $P_{AB} = P_{BA}$ pour toutes matrices A et B d'ordre n.

e) Redémontrer que deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

QUIZZ de révision: les affirmations suivantes sont-elles vraies (justifier)?

1. Tout projecteur de $\mathbb{R}^n$ est diagonalisable.
2. Deux matrices semblables ont les mêmes sous-espaces propres.
3. Si $f \in L(\mathbb{R}^n)$ alors $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires.
4. Toute matrice inversible est diagonalisable.

EXAMENS ET PARTIELS

Université Paris-Dauphine. Année 2000/2001. MD1. T. Tomala.

Partiel d'algèbre 2. Lundi 2 avril 2001. 2 heures.

Sans documents ni calculatrices.

I. Soit les applications linéaires f et g suivantes.

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout (x_1, x_2, x_3) dans $\mathbb{R}^3$ par:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_2, 3x_1 + 2x_2 + x_3, 2x_1 - x_2 + x_3)$$

$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie pour tout (x_1, x_2, x_3) dans $\mathbb{R}^3$ par:

$$g(x_1, x_2, x_3) = -x_1 + x_2 - x_3$$

1. Déterminer $Ker(f)$, donner une base et la dimension.
2. Déterminer $Ker(g)$, donner une base et la dimension.
3. Montrer que $Im(f) \subset Ker(g)$.
4. Montrer que $g \circ f$ est l'application nulle.
5. Calculer $rg(f)$ puis déterminer $Im(f)$.

II. Soit f l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ qui à tout polynôme P associe le polynôme Q définit par $Q(X) = P(X+1)$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Donner M, la matrice représentative de f dans la base canonique $B = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Déterminer $Ker(f)$ et en déduire $Im(f)$.
4. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.
5. Déduire de 4. que M est inversible et déterminer M^{-1}.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $f^n = f \circ \cdots \circ f$ n fois. Montrer que pour tout polynôme P, $f^n(P)$ est le polynôme R définit par $R(X) = P(X+n)$.
7. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, M^n est la matrice représentative de f^n dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
8. Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

III. Soit $\mathbb{E}$ le $\mathbb{R}$-e.v. des matrices à 2 lignes et 2 colonnes à coefficients complexes. On admet que $\mathbb{E}$ est bien un $\mathbb{R}$-e.v. (la démonstration en est évidente mais ce n'est pas le but de cet exercice).

Pour tout couple $(k, l) \in \{1, 2\} \times \{1, 2\}$, on note E_{kl} la matrice élémentaire dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en k-ième ligne et l-ième colonne qui vaut 1.

1. Montrer que la famille:

$$(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}, iE_{11}, iE_{12}, iE_{21}, iE_{22})$$

est une base de $\mathbb{E}$. Donner $dim(\mathbb{E})$.

2. On note $\mathbf{H}$ le sous-ensemble de $\mathbb{E}$ formé par les matrices M qui s'écrivent

$$M = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$$

avec a et b des nombres complexes. Montrer que $\mathbf{H}$ est un S.E.V. de $\mathbb{E}$.

3. Pour tout couple de complexes (a, b) on note $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$.

Calculer $M(a, b)M(c, d)$ pour tous nombres complexes a, b, c, d.

En déduire que l'on a:

$$\forall (M, N) \in \mathbf{H} \times \mathbf{H}, \quad MN \in \mathbf{H}$$

4. Calculer $M(a, b)M(\bar{a}, -b)$ pour tout couple de complexes (a, b).

5. Montrer que toute matrice non-nulle de $\mathbf{H}$ est inversible et calculer son inverse.

Université Paris-Dauphine. Année 2000/2001. MD1. T. Tomala.

Examen d'algèbre 2. Mardi 12 juin 2001. 2 heures.

Sans documents ni calculatrices.

I. Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel et f un endomorphisme de E. On suppose que f vérifie la propriété suivante:

Pour tout x de E, la famille $(x, f(x))$ est liée.

1. Montrer que pour tout vecteur x non-nul, $f(x)$ est proportionnel à x. En déduire que tout $x \neq 0$ est vecteur propre pour f.

   On notera maintenant $\lambda_{(x)}$ la valeur propre associée à x.

2. Montrer que pour tous $(x, y) \in E \times E$ tels que $x \neq 0$ et $y \neq 0$, si y est proportionnel à x alors $\lambda_{(y)} = \lambda_{(x)}$.
3. Pour tous $(x, y) \in E \times E$ tels que $x \neq 0$, $y \neq 0$ et $x + y \neq 0$, calculer $f(x + y)$ et montrer que:

$$\lambda_{(x+y)} \cdot (x + y) = \lambda_{(x)} \cdot x + \lambda_{(y)} \cdot y$$

4. Déduire de 3. que si (x, y) est libre, $\lambda_{(x)} = \lambda_{(y)}$.
5. Montrer qu'il existe un réel λ tel que $f = \lambda Id_E$.

II. Soit A la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Le but de cet exercice est de trouver une matrice $R \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$.

1. Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$ une matrice diagonale. Montrer que M^2 est diagonale et que tous ses coefficients sont positifs ou nuls.

2. Soit

$$\Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 \end{pmatrix}$$

une matrice diagonale dont tous les termes sont positifs ou nuls. Déterminer toutes les matrices $M \in M_3(\mathbb{R})$ diagonales vérifiant $M^2 = \Delta$.

3. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A. Déterminer les valeurs propres de A et donner leurs multiplicités algébriques respectives.

4. Donner une base et la dimension de chaque sous-espace propre de A.

5. Montrer que A est diagonalisable.

6. Trouver une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

7. Déterminer les matrices M diagonales telles que $M^2 = D$. Montrer que les matrices de la forme $R = PMP^{-1}$ avec $M^2 = D$ sont solutions du problème initial.

8. Montrer que A et D sont inversibles.

9. Calculer D^{-1} et montrer que A^{-1} et D^{-1} sont semblables.

III. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit les matrice suivantes.

I_n = la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$.

J = la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

U = la matrice unicolonne de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Soient a et b deux réels avec $b \neq 0$. On pose:

$$C = aI_n + bJ$$

1. Soit $f \in L(\mathbb{R}^n)$ représenté par C dans la base canonique. Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, donner les coordonnées $(y_1, \ldots, y_n)$ de $f(x)$ dans la base canonique.

2. Soit $F = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \mid JX = 0\}$. Donner la dimension de F. J est-elle inversible?

3. Montrer que a est valeur propre de C et que le sous-espace propre associé à a est F. Quelle est la multiplicité géométrique de a ?

4. Montrer que U est vecteur propre de C et donner la valeur propre associée.

5. Montrer que C est diagonalisable et déterminer une matrice diagonale Δ semblable à C.

6. Calculer $det(C)$ et $trace(C)$.

Université Paris-Dauphine. Année 2000/2001. MD1. T. Tomala.

Examen d'algèbre 2. Mardi 12 juin 2001. 2 heures.

Sans documents ni calculatrices.

Exercice 1. (10 points)

Soit f l'application qui à un polynôme P à coefficients réels associe le polynôme Q définit de la façon suivante:

$$Q(X) = (X+1)P'(X) + P(X)$$

1. Montrer que f définit une application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans lui-même et que celle-ci est linéaire.

2. Montrer que la matrice représentative de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est la matrice M suivante:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Déterminer le polynôme caractéristique de f ainsi que ses valeurs propres.

4. Calculer les sous-espaces propres de f.

5. Montrer que f est diagonalisable et donner une base de $\mathbb{R}_3[X]$ formée de vecteurs propres pour f.

6. Déterminer $P \in M_4(\mathbb{R})$ inversible et $D \in M_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que:

$$M = PDP^{-1}$$

7. Calculer M^k pour $k \geq 1$ entier.

8. Montrer que f est bijective.

9. Déterminer la matrice représentative de f^{-1} dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 2. (10 points)

Soit E un $I\!R$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. On considère $f \in L(E)$ vérifiant:

$$Ker(f) = Im(f)$$

1. Montrer que $\forall x \in E,\ f \circ f(x) = 0_E$.

2. On pose $p = dimKer(f)$. Soit F un supplémentaire de $Ker(f)$, c'est à dire que F est un sous-espace vectoriel de E tel que $E = Ker(f) \oplus F$.

Montrer grâce au théorème du rang que $dimF = p$. En déduire que $n = dimE$ est un nombre pair.

3. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F. Montrer que $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ est une base de $Ker(f)$.

4. Montrer que $(e_1, \dots, e_p, f(e_1), \dots, f(e_p))$ est une base de E.

5. Déterminer la matrice représentative de f dans cette base.

6. Montrer que 0 est la seule valeur propre de f.

7. Montrer que f n'est pas l'application nulle puis que f n'est pas diagonalisable.

8. Exemple. Soit f, application linéaire de $M_2(I\!R)$ dans lui-même définie par:

$$f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

pour toute matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(I\!R)$.

Déterminer $Ker(f)$ et $Im(f)$. Sont ils égaux ?

Université Paris-Dauphine. Année 2001/2002. MD1. T. Tomala.

Partiel d'algèbre 2. Lundi 25 avril 2001. 2 heures.
Sans documents ni calculatrices.

I. On se place dans $I\!R^3$ et on considère les vecteurs: $u = (0, -1, 3)$, $v = (2, 0, -1)$, $w = (6, -2, 3)$ et $e = (-2, -3, 1)$.

1. On pose $F = Vect\{u, v, w\}$. Déterminer la dimension et une base de F.
2. Déterminer trois réels a, b, c tels que:

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) \in I\!R^3, ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0\}$$

3. Soit f l'application de $I\!R^3$ dans lui-même définie pour tout vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ par:

$$f(x) = x_1 \cdot u + x_2 \cdot v + x_3 \cdot w$$

Montrer que f est linéaire.

4. Calculer: $f((1, 0, 0))$; $f((0, 1, 0))$; $f((0, 0, 1))$ et $f((2, 3, -1))$.
5. Montrer que $Im(f) = F$.
6. Donner une base et la dimension de $Ker(f)$.
7. Montrer que $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont supplémentaires l'un de l'autre.
8. Soit g l'application de $I\!R^3$ dans lui-même définie pour tout vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ par:

$$g(x) = (x_1 + 6x_2 + 2x_3) \cdot e$$

Montrer que g est linéaire.

9. Montrer que $Ker(g) = Im(f)$ et que $Im(g) = Ker(f)$.
10. Montrer que pour tout $x \in I\!R^3$, $f \circ g(x) = O_{I\!R^3}$ et $g \circ f(x) = O_{I\!R^3}$

II. Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $n + 1$ nombres réels **deux à deux distincts**. On pose:

$$\forall i \in \{0, \ldots, n\}, \;\; B_i = \prod_{j \neq i, j=0}^{n} (a_i - a_j)$$

et on définit les polynômes $L_0, L_1, \ldots, L_n$:

$$\forall i \in \{0, \ldots, n\}, \;\; L_i(X) = \frac{1}{B_i} \prod_{j \neq i, j=0}^{n} (X - a_j)$$

1. Calculer $L_i(a_j)$ pour tous entiers i, j dans $\{0, \ldots, n\}$.

2. En utilisant la question précédente, montrer que la famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$. En déduire que c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Montrer que pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ on a:

$$P(X) = \sum_{j=0}^{n} P(a_j) L_j(X)$$

4. Soit $P(X) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j X^j$. Donner les coordonnées de P dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et dans la base $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$. Préciser ces coordonnées pour le polynôme constant $P(X) = 1$.

5. Soit F la fraction rationnelle définie pour tout x dans $\mathbb{R} \backslash \{a_0, \ldots a_n\}$ par:

$$F(x) = \frac{1}{(x - a_0)(x - a_1) \cdots (x - a_n)}$$

Montrer que l'on a:

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{B_i} \frac{1}{x - a_i}$$

Université Paris-Dauphine. Année 2001/2002. MD1. T. Tomala.

Examen d'algèbre 2. Lundi 3 juin 2002. 2 heures.

Sans documents ni calculatrices.

I. Soit $a \in]0, \frac{1}{2}[$. Soit A la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$$

Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par A dans la base canonique.

1. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$det(A - \lambda I_3) = (1-\lambda)(1-3a-\lambda)^2$$

2. Déterminer les valeurs propres de f.

3. Déterminer les sous espaces propres de f en donnant une base de chacun.

4. Montrer que f est diagonalisable et donner une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres pour f.

5. Trouver une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

6. Calculer D^k, $det(D^k)$ et $det(A^k)$ pour tout k entier positif.

7. On rappelle que si $M \in M_n(\mathbb{R})$ on a:

$$trace(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$$

et l'on admet que pour toutes matrices carrées M et N dans $M_n(\mathbb{R})$, on a:

$$trace(MN) = trace(NM)$$

Montrer que si deux matrices B et C sont semblables alors:

$$trace(B) = trace(C)$$

8. Calculer $trace(A^k)$ pour k entier positif.

II. Soit $M \in M_n(I\!R)$ telle que:
$$M^2 = M + 6I_n$$
Soit $f \in L(I\!R^n)$ l'endomorphisme de $I\!R^n$ représenté par M dans la base canonique.

1. Montrer que pour tout x dans $I\!R^n$, on a:
$$f \circ f(x) = f(x) + 6x$$

2. Soit $x \in I\!R^n$, $x \neq 0$ et $\lambda \in I\!R$ tels que:
$$f(x) = \lambda x$$
Montrer que λ ne peut valoir que -2 ou 3.

3. On considère les deux sous-espaces vectoriels suivants:
$$F = \{x \in I\!R^n, f(x) = -2x\} \;\; ; \;\; G = \{x \in I\!R^n, f(x) = 3x\}$$
Montrer que F et G sont en somme directe.

4. On pose $H = F \oplus G$. Montrer que pour tout x dans H il existe de manière unique $u \in F$ et $v \in G$ tels que $x = u + v$. Montrer de plus qu'alors:
$$u = \frac{3}{5}x - \frac{1}{5}f(x) \;\; ; \;\; v = \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}f(x)$$

5. Pour tout $x \in I\!R^n$, on pose:
$$u(x) = \frac{3}{5}x - \frac{1}{5}f(x) \;\; ; \;\; v(x) = \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}f(x)$$
Montrer que pour tout $x \in I\!R^n$,
$$u(x) \in F \;\; ; \;\; v(x) \in G$$

6. Montrer que $H = I\!R^n$ et que M est diagonalisable.

III. Soit E un $I\!R$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in L(E)$ tel que
$$dim Im(f) = 1$$
On suppose de plus qu'il existe un vecteur x tel que $f \circ f(x) \neq 0$.

1. Soit $e \in Im(f)$ et $e \neq 0$. Montrer que (e) forme une base de $Im(f)$ et que $f(e) \neq 0$.
2. Montrer que $Im(f)$ et $Ker(f)$ sont en somme directe.
3. Monter qu'il existe un scalaire μ tel que pour tout $x \in Im(f)$ on a $f(x) = \mu x$.
4. Montrer que f est diagonalisable.

Université Paris-Dauphine. Année 2002/2003. MD1. Analyse et Algèbre 2.

Sujet préparatoire. Devoir préparé 1. 3 mars 2003.

Exercice 1. Soit E l'espace vectoriel des suites réelles. Soit F l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence suivante:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de F telles que $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n$.

3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de F telle que $(a_0, a_1) = (1, 0)$. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de F telle que $(b_0, b_1) = (0, 1)$. Montrer que la famille $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ est une base de F. Quelle est la dimension de F?

4. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que:

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+2} = 2z_{n+1} - 4z_n$$

   Montrer que $(Re(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Im(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans F.

5. Soit q un nombre complexe non nul et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = q^n$. Déterminer un complexe q tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+2} = 2z_{n+1} - 4z_n$.

6. Déterminer deux réels r et θ tels que toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F puisse s'écrire:

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = r^n(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$$

   avec λ et μ deux nombres réels.

7. Montrer que pour chaque suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F, λ et μ sont uniques. Exprimer λ et μ en fonction de u_0 et u_1.

Université Paris-Dauphine. Année 2002/2003. MD1.
Analyse et Algèbre 2.

Interrogation 2. 12 mai 2003. Sans documents ni calculatrices.

ALGEBRE

Exercice 3. 4 points.
Soit A_n la matrice de $M_n(I\!R)$ dont les coefficients (a_{ij}) sont tels que:

$a_{i,i+1} = a$, $\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$.
$a_{i,i-1} = b$, $\forall i \in \{2, \ldots, n\}$.
$a_{i,j} = 0$ sinon.

Avec a, b paramètres réels et n entier supérieur à 2.

1. Calculer $\det(A_2)$, $\det(A_3)$.
2. On pose $D_n = \det(A_n)$. Montrer que pour tout $n \geq 4$, $D_n = -abD_{n-2}$.
3. Calculer D_n pour tout $n \geq 2$.

Exercice 4. 6 points.
Soit E un $I\!R$-espace vectoriel de dimension finie. Soit B une base de E, f un endomorphisme de E. On pose $M = M_B(f)$.

On suppose que f est involutive, c'est à dire que $f \circ f = Id_E$:

$$\forall x \in E, f \circ f(x) = x$$

On pose $F = \{x \in E, f(x) = x\}$ et $G = \{x \in E, f(x) = -x\}$

1. Calculer M^2. Quelles sont les valeurs possibles pour $\det(M)$?
2. Montrer que F et G sont des sous-espaces de E.
3. Montrer que pour tout $x \in E$, $x + f(x) \in F$ et $x - f(x) \in G$.
4. Montrer que $E = F \oplus G$.
5. On suppose $dimF = p$. Montrer qu'il existe une base C de E telle que la matrice de f dans le base C s'écrive:

$$M = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$$

Université Paris-Dauphine. Année 2001/2002. MD1. T. Tomala.

Partiel d'algèbre 2. Mercredi 19 mars 2003. 2 heures.

Sans documents ni calculatrices.

Exercice 1. Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants:

$u_1 = (1, -2, 3)$; $u_2 = (0, 1, 2)$; $u_3 = (1, 0, 7)$; $u_4 = (2, -7, 0)$.

$F = \text{vect}\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$

$G = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_1 + x_2 + x_3 = 0 \ et \ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0\}$

1. Donner une base de F.
2. Déterminer trois réels a, b, c tels que:
$$F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0\}$$
3. Donner une base de G.
4. Déterminer $F \cap G$.
5. Déterminer $F + G$.

Exercice 2. Une matrice carrée est dite **magique** si la somme de ses coefficients est la même sur chaque ligne et chaque colonne, c'est à dire:

$$A \in M_n(\mathbb{R}) \text{ est magique si:}$$
$$\exists d(A) \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \ \textstyle\sum_{k=1}^n a_{ik} = d(A) \text{ et}$$
$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}, \ \textstyle\sum_{k=1}^n a_{kj} = d(A)$$

Soit E_n l'ensemble des matrices magiques de $M_n(\mathbb{R})$.

1. On appelle J_n la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 et I_n la matrice identité. Montrer que J_n et I_n sont dans E_n. Calculer $d(J_n)$ et $d(I_n)$.
2. Montrer que E_n est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.
3. Soient A et B dans E_n et α, β dans $\mathbb{R}$, montrer que $d(\alpha A + \beta B) = \alpha d(A) + \beta d(B)$.
4. Soit G_n l'ensemble des matrices A, magiques telles que $d(A) = 0$. Montrer que G_n est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.
5. Déterminer $\text{vect}(J_n) \cap G_n$.

6. Montrer que pour tout $A \in E_n$, il existe λ réel tel que $A - \lambda J_n \in G_n$.

7. Montrer que $E_n = \text{vect}(J_n) \oplus G_n$.

8. On prend $n = 2$. Déterminer G_2 et en déduire une base.

9. Donner une base et la dimension de E_2.

Exercice 3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. La famille libre $\{u_1, \ldots, u_p\}$ est dite libre maximale si pour tout vecteur y de E, $\{u_1, \ldots, u_p, y\}$ est liée. Montrer que $\{u_1, \ldots, u_p\}$ est une base.

2. La famille $\{u_1, \ldots, u_p\}$ est dite génératrice minimale si elle est génératrice et pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, la sous-famille $\{u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_p\}$ n'est pas génératrice. Montrer que $\{u_1, \ldots, u_p\}$ est une base.

Université Paris-Dauphine. Année 2002/2003. MD1.

Algèbre 2. T.Tomala

Examen. 3 juin 2003. Sans documents ni calculatrices.

On considère les matrice suivantes dans $M_3(\mathbb{R})$:

$$S = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = S + M = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

On notera B la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

I. Etude de S. 8 points.

1. Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ tel que S soit la matrice représentative de f dans la base B. Exprimer $f(x_1, x_2, x_3)$ pour tout vecteur $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
2. Montrer que le polynôme caractéristique de S s'écrit:
$$P_S(\lambda) = (5 - \lambda)^2(2 - \lambda)$$
3. En déduire les valeurs propres de f et que f est bijective.
4. Donner une base de chaque sous-espace propre de f.
5. Montrer que f est diagonalisable et donner une base $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres pour f.
6. Déterminer une matrice D diagonale et une matrice Q inversible telles que
$S = QDQ^{-1}$.
7. Calculer D^n pour $n \geq 1$ entier. Exprimer S^n en fonction de Q et D^n.

II. Etude de M. 7 points.

8. Soit $g \in L(\mathbb{R}^3)$ tel que S soit la matrice représentative de f dans la base B. Exprimer $g(x_1, x_2, x_3)$ pour tout vecteur $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
9. Montrer que $M^2 = 0$.
10. Montrer que 0 est valeur propre de M et que c'est la seule.
11. Montrer que si M est diagonalisable, M est semblable à la matrice nulle.
12. En déduire que M n'est pas diagonalisable.
13. On reprend la base $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres pour f. Calculer $g(u_1), g(u_2)$ et $g(u_3)$. En déduire la matrice N représentative de g dans la base B'.
14. Montrer que M et N sont semblables.

III. Etude de A. 5 points.

15. Montrer que $f \circ g(u_i) = g \circ f(u_i)$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$.
16. En déduire que $f \circ g = g \circ f$, puis que $SM = MS$.
17. Montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$A^n = S^n + nMS^{n-1}$$

18. Calculer explicitement QA^nQ^{-1}.

Examen, juin 2005

Université Paris-Dauphine. MD1 2004/2005. Algèbre 2. G. Carlier.

Barême indicatif: Exercice 1 : 12 pts, Exercice 2 : 8 pts.
Exercice 1
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est:

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Soit $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f(x_1, x_2, x_3)$.

2. Déterminer P_A le polynôme caractéristique de A .

3. Déterminer les valeurs propres de f.

4. Déterminer les sous espaces propres de f.

5. Montrer que f est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

6. Déterminer Δ matrice diagonale et P inversible tels que $A = P\Delta P^{-1}$.

7. Pour $n \in \mathbb{N}$ calculer Δ^n puis A^n.

8. Calculer $(f \circ f \circ f \circ f)(1, 0, 2)$.

Exercice 2
Pour $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire de x et y est défini par:

$$x.y := \sum_{i=1} x_i y_i.$$

Soit a et b deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$, pour $x \in \mathbb{R}^n$, on définit:

$$g(x) := (a.x)b \text{ et } f(x) := 2x + g(x).$$

1. Montrer que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Déterminer son image et son rang. Déterminer la dimension du noyau de g.

2. Donner la matrice représentant g dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit injective.

4. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

5. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.

Université Paris-Dauphine. MD1 2004/2005. Algèbre 2. G. Carlier.

Session de septembre 2005

Exercice 1 (7 points)
Les affirmation suivantes sont elles vraies ou fausses (justifiez rigoureusement votre réponse)?

1. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, si f est inversible alors f est diagonalisable.

2. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, si f est diagonalisable alors f est injective.

3. Deux matrices carrées semblables ont les mêmes valeurs propres.

4. Toute matrice carrée à coefficients réels positifs n'a que des valeurs propres positives.

5. Tout projecteur de $\mathbb{R}^n$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

6. Une matrice et sa transposée ont les mêmes valeurs propres.

7. La matrice suivante est diagonalisable:

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 7 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 12 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (6 points)
Soit $f \in L(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $f^2 = 3f - 2\text{id}$ (N.B. $f^2 = f \circ f$).

1. Quelles sont les valeurs propres de f?

2. Montrer que $\text{Im}(f - \text{id}) \subset \ker(f - 2\text{id})$ et $\text{Im}(f - 2\text{id}) \subset \ker(f - \text{id})$.

3. Montrer que $\ker(f - 2\text{id}) \oplus \ker(f - \text{id}) = \mathbb{R}^n$ puis que f est diagonalisable.

Exercice 3 (7 points)
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et M la matrice de format $n \times n$:

$$M = \begin{pmatrix} a+b & a & . & . & a \\ a & a+b & a & . & a \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a & . & . & a & a+b \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les valeurs propres de M?

2. Quels sont les vecteurs propres de M?

3. A quelle condition M est-elle diagonalisable?

Partiel, 28 mars 2006

Exercice 1

Pour $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, on pose

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 - x_4, x_1 - x_4, x_3 - x_4)$$

1. Montrer que $f \in L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$.

2. Déterminer $\ker f$ et en donner une base.

3. Déterminer $\mathrm{rang} f$ et déterminer si f est surjective.

Exercice 2
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E := M_n(\mathbb{R})$ pour $A \in E$ on pose

$$f(A) = A - \frac{\mathrm{tr}(A)}{n} I_n$$

(I_n: matrice identité, $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii}$ la trace de A.) et

$$E_1 := \{\lambda I_n \ \lambda \in \mathbb{R}\}, \ E_2 := \{A \in E : \mathrm{tr}(A) = 0\}$$

1. Montrer que E_1 et E_2 sont deux s.e.v. de E.

2. Montrer que $E_1 \oplus E_2 = E$ et déterminer la dimension de E_2.

3. Montrer que $f \in L(E)$.

4. Montrer que $\ker f = E_1$.

5. Montrer que $\mathrm{Im} f = E_2$.

Exercice 3
Soit $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ défini pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ par $f(P) = XP'(X)$.

1. Montrer que $f \in L(\mathbb{R}[X])$.

2. Déterminer le noyau et l'image de f.

3. Déterminer un supplémentaire du noyau de f.

4. Déterminer $f \circ f$ et $\ker(f - \mathrm{id})$.

Université Paris-Dauphine. MD1 2005/2006. Algèbre 2. G. Carlier.

Examen, juin 2006

Les deux premiers exercices devraient compter pour 5 pts chacun et l'exercice 3 pour 10 pts environ (ce n'est qu'indicatif).

Exercice 1

Soit $f \in L(\mathbb{R}^4)$ telle que $\mathrm{rg}(f) = 2$.

1. Montrer qu'il existe $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ tels que:

$$\text{vect}\{f(x_1), f(x_2)\} = \text{Im}(f) \text{ et } \text{vect}\{x_1, x_2\} \oplus \ker(f) = \mathbb{R}^4.$$

2. En déduire qu'il existe deux bases de $\mathbb{R}^n$, B et B' de $\mathbb{R}^4$ telles que

$$M_{B'B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable (sur $\mathbb{R}$) dont toutes les valeurs propres sont positives, montrer qu'il existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$ (autrement dit A admet une racine carrée dans $M_n(\mathbb{R})$).

Exercice 3

Soit:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de A puis en déduire que A est diagonalisable.
2. Déterminer les sous-espaces propres de A.
3. Déterminer Δ diagonale et P inversible telles que $\Delta = P^{-1}AP$.
4. Calculer P^{-1}.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n.

Université Paris-Dauphine. DUMI2E 2005/2006. Algèbre 2. G. Carlier.

Session de septembre 2006

Exercice 1 (7 points)
Soit $f \in L(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $f^2 = 4f - 3\text{id}$ (N.B. $f^2 = f \circ f$).

1. Quelles sont les valeurs propres possibles de f?
2. Montrer que $\text{Im}(f - \text{id}) \subset \ker(f - 3\text{id})$ et $\text{Im}(f - 3\text{id}) \subset \ker(f - \text{id})$.
3. Montrer que $\ker(f - 3\text{id}) \oplus \ker(f - \text{id}) = \mathbb{R}^n$ puis que f est diagonalisable.

Exercice 2 (8 points)
Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f(x, y, z)$.
2. Sans calcul, déterminer les valeurs propres de f puis montrer que f est inversible et diagonalisable.
3. Déterminer les sous-espaces propres de f.
4. Déterminer P inversible et D diagonale telles que $M = PDP^{-1}$.
5. Calculer M^k pour $k \in \mathbb{N}$.
6. Montrer que M est inversible et que M^{-1} est diagonalisable.
7. Calculer M^k pour $k \in \mathbf{Z}$.

Exercice 3 (5 points)
Soit E l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et :

$$I := \{f \in E \ : \ f(-x) = -f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}\}, \ P := \{f \in E \ : \ f(-x) = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}\}$$

1. Montrer que I et P sont deux s.e.v de E.
2. Montrer que $I \oplus P = E$.