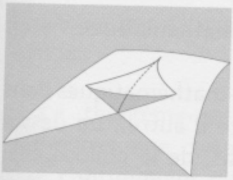

Hommage à René Thom

Ivar Ekeland

La première fois que j'ai vu René Thom[1], en 1970, il était déjà une légende des mathématiques. Les histoires sur lui ne manquaient pas (on ne prête qu'aux riches), et on se les racontait avec révérence. On disait, par exemple, qu'il avait fait sa thèse sous la direction de Cartan, et qu'il se serait avéré incapable de rédiger les démonstrations à la satisfaction de celui-ci ; un autre éminent mathématicien aurait alors dissipé les scrupules de Cartan par cette phrase admirable : « *Peu importe : il y a bien dix personnes au monde capables de démontrer ces théorèmes, mais il n'y en a qu'une qui soit capable de les trouver* ».

J'étais allé, je ne sais pourquoi, à un séminaire à l'IHÉS. Je venais de terminer ma thèse, ou j'étais en passe de le faire, et je cherchais à changer de sujet. Les séminaires, à l'époque, avaient lieu dans la bibliothèque, au fond du jardin, il avait fallu prendre le train, tout cela était un peu irréel quand on gravitait entre les salles de l'École Normale et celles de l'IHP, et cette impression d'étrangeté un peu magique m'a vraiment pris à la gorge quand j'ai vu cet homme qui ne ressemblait absolument pas à un professeur de mathématiques, qui se servait du tableau pour faire des figures et non des calculs, et qui s'appelait René Thom. Depuis, Thom est toujours pour moi resté un magicien ; il m'ouvrait les portes d'un monde merveilleux que j'avais cru quitter en rentrant à l'École Normale.

Au lycée et en prépa, j'avais adoré la géométrie sous toutes ses formes, les inversions et les transformations anallagmatiques, les courbes planes, avec leurs développantes, leurs développées, et leurs enveloppes, les courbes de l'espace et le trièdre de Frenet, la géométrie analytique, les asymptotes du cercle et les points cycliques, les solutions des équations différentielles, et le mystère des solutions singulières, le tout bien sûr agrémenté de figures, tracées à main levée au tableau ou au tire-ligne sur une épure. Tout cela s'était arrêté net à l'École Normale. Toute velléité de faire de la géométrie m'avait été retirée comme avec la main par un « cours aux carrés », destiné à nous introduire à la topologie algébrique, fait par une gloire du sujet, et dont la première séance avait consisté en une démonstration par le menu du « lemme des cinq », à grand renfort de diagrammes commutatifs. Comme je ne comprenais ni ce que l'on cherchait à démontrer ni à quoi cela pouvait bien servir, j'en avais conclu, trop vite peut-être, que la topologie algébrique n'était pas pour moi. J'avais alors cherché quelque part sur la place de Paris un cours sur les équations différentielles ordinaires, et j'avais dû me rendre à l'évidence : nulle part, ni à la Sorbonne ni à Orsay, il n'y avait de cours sur le sujet qui aille au-delà du

[1]On m'excusera d'écrire cet article sur un mode personnel. C'était plus facile ainsi, mais mon expérience a été partagée par bien d'autres mathématiciens dont je voudrais me faire l'interprète, notamment Alain Chenciner et Marc Chaperon, avec lesquels j'ai discuté du contenu de cet article et que je remercie pour leurs critiques et leurs commentaires.

théorème d'existence locale de Cauchy-Lipschitz. Mon destin mathématique s'était alors orienté vers d'autres voies.

D'où le choc Thom. C'était un géomètre, il voyait les objets mathématiques dans sa tête, et tout lui était bon pour les faire passer dans la tête d'autrui, un dessin au tableau, une analogie tirée de la biologie, ou, pourquoi pas, de la philosophie. Il ne trouvait pas la théorie des enveloppes ridicule, et il n'interposait pas l'algèbre entre la géométrie et l'entendement. Il cherchait à faire comprendre pourquoi les théorèmes étaient vrais. Les démonstrations, on allait les chercher ailleurs, mais c'est chez Thom que l'on cherchait le pourquoi des choses. Et une fois que l'on s'était engagé dans cette voie, quelle richesse mathématique l'on découvrait : le théorème de préparation différentiable, dû à Bernard Malgrange, les stratifications de Whitney, les sept catastrophes élémentaires et toute la classification des singularités des applications différentiables, menée à son terme par John Mather, avec la découverte des « nice dimensions ». Ce sont des mathématiques absolument superbes, d'une beauté transcendante, et je me souviens encore du plaisir que nous avions à les travailler et à les enseigner.

Bien sûr, il y a aussi la théorie du cobordisme, et tout le travail de Thom en topologie algébrique, à laquelle je n'ai pas accès. Mais s'il me fallait retenir une seule chose de cette œuvre, je choisirais, pour ma part, le théorème de transversalité. Encore une idée de géomètre : dans quelle mesure les objets sont-ils flexibles ? Peut-on bouger un peu la figure pour que la tangente ne soit plus tangente, et pour que les racines multiples se déploient en racines simples ? En géométrie algébrique, c'est une méthode bien connue, mais le génie de Thom est de l'avoir énoncé dans le cas différentiable : encore un de ces théorèmes que dix personnes peuvent démontrer, mais qu'une seule peut imaginer. La démonstration, comme tant de choses en topologie différentielle, repose sur le théorème des fonctions implicites, auquel vient se joindre le théorème de Baire. C'est l'utilisation de ce dernier, plutôt que de la théorie de la mesure, qui permet au théorème de transversalité de s'appliquer aux espaces de fonctions (et plus précisément, aux espaces de jets), qui sont de dimension infinie. Saluons au passage l'œuvre de Charles Ehresmann, à laquelle Thom se plaisait à rendre hommage : c'est lui qui a inventé ces espaces de jets, qui permettent de traiter de façon géométrique (et, faut-il le dire, étonnamment simple : les conditions d'intégrabilité ont tout simplement disparu) les dérivées successives, et qui fournissent le cadre naturel de la topologie différentielle.

Entre les mains de Thom, le théorème de transversalité est devenu beaucoup plus qu'un outil mathématique. Il répond à une question générale, qui devrait être à l'avant-plan de la réflexion de tout scientifique : qu'est-ce qui est ordinaire, qu'est-ce qui est exceptionnel ? Où est le général, où est le singulier ? Est-ce que je suis en train d'étudier un cas pathologique, ou est-ce que je suis sur la piste d'une loi universelle ?

On sait qu'une propriété est générique au sens de Thom si l'ensemble des points qui la satisfont contient une intersection dénombrable d'ouverts denses (et si l'espace ambiant est complet). Cette définition est utilisable, par exemple, dans les espaces de fonctions différentiables, qui ne possèdent pas de probabilité naturelle (invariante par translation). Une propriété générique se trouve donc être « générale », en un sens naturel : si P et Q sont génériques, il en est de même de $[PetQ]$[2]. Cela

[2] Et même de toute intersection dénombrable de propriétés génériques

implique, par exemple, que P et $[nonP]$ ne peuvent pas être génériques en même temps.

Le théorème de transversalité de Thom est une méthode générale pour démontrer que certaines propriétés sont génériques. Ainsi, le fait pour une fonction continûment différentiable sur une variété de ne pas avoir de point critique dégénéré est générique, et on peut même imposer que les valeurs critiques soient distinctes (ce que Cerf appelle les fonctions excellentes). Grâce au théorème de transversalité, on peut dorénavant chercher à démontrer des propriétés qui sont vraies génériquement, plutôt que des propriétés qui sont toujours vraies, ce qui ouvre aux mathématiques un champ immense, et qui est loin d'être complètement exploré. Mais sa portée ne s'arrête pas là : une fois le particulier séparé du général, on peut se demander ce qu'il y a de général dans le particulier. Par exemple, une fois identifiées les fonctions non génériques, celles qui ont au moins un point critique dégénéré, on peut se demander lesquelles, parmi ces fonctions singulières sont génériques. Nous voilà ainsi partis dans la classification des singularités des applications différentiables, allant du plus général vers le moins général, et qui commence, comme chacun sait, par les sept « catastrophes élémentaires » : le pli, la fronce, la queue d'aronde, les trois ombilics et le papillon. Ce magnifique début n'est malheureusement pas suivi d'effet. Mather a montré que l'on tombe assez rapidement sur des modules, c'est-à-dire des familles continues de singularités qui ne peuvent être réduites l'une à l'autre. En outre, dans l'idée de Thom, la classification des singularités de fonctions était en fait une classification des singularités de champs de gradients, et ne devait être qu'un premier pas vers la classification des singularités des champs de vecteurs, et donc des solutions d'équations différentielles. Malheureusement, là aussi, on a su bien vite que les champs de vecteurs structurellement stables sont l'exception, ce qui rendait sans espoir toute tentative de classification, ou du moins la renvoyait dans un avenir où l'on disposerait d'instruments moins frustes.

Les catastrophes élémentaires ont bien vite quitté les pages des revues mathématiques pour celles des journaux grand public, et ont suscité un très large intérêt parmi des gens qui se trouvaient tout étonnés de comprendre (ou de voir) quelque chose en mathématiques. Du coup Thom est devenu une personnalité connue et s'est trouvé mêlé à de nombreux débats scientifiques et philosophiques ; la parution de son livre « Stabilité structurelle et morphogenèse » a été un événement. Cela lui a permis de révéler un vrai talent d'écriture, et une réflexion très profonde sur la nature de la science. Il faut être très reconnaissant à Michèle Porte d'avoir rassemblé ses textes, et à l'IHÉS de les avoir publiés dans un CD-Rom. On y trouve des trésors, et notamment l'article de 1973, écrit pour l'Encyclopedia Universalis, intitulé « La science malgré tout », où il énonce le fameux principe de complémentarité, « *Tout ce qui est rigoureux est insignifiant* », où la beauté de l'expression ne doit pas faire oublier qu'il y a véritablement un contenu. Dans un style plus pamphlétaire, il avait intitulé un de ses articles « Halte au hasard, silence au bruit », et cela avait fait du bruit, justement. Il avait le sens de la formule, et le goût de la poésie. Quand je pense à Thom, il me revient toujours le titre de sa thèse : « Espaces fibrés en sphères et carrés de Steenrod ». Je ne l'ai jamais lue, mais quelle musique ! Ces allitérations, cette succession de s, de f et de r, cette opposition entre sphères et carrés, il n'est pas possible qu'il ne l'ait pas fait exprès.

Il avait une vue très exigeante de la science, qu'il pensait liée à des structures profondes de l'esprit humain, par opposition à ceux qui n'y voient qu'un agrégat plus ou moins conventionnel de faits regroupés par des lois statistiques. Ces structures se retrouvent dans toutes les activités de l'esprit, pas seulement les mathématiques, et c'est sans doute ce qui explique qu'il s'aventurait sans complexe dans des domaines qui n'étaient initialement pas les siens, comme la biologie, dont il pressentait, bien avant que ce ne soit à la mode, l'avenir mathématique, ou la philosophie. Mais en même temps, Thom doutait de la possibilité de tout connaître avec précision, d'étendre le modèle de connaissance que nous proposent les sciences exactes bien au-delà de ce qu'elles sont aujourd'hui. Je ne vais pas reprendre ici ses positions, il s'en est expliqué lui-même avec plus de pertinence et de talent que je ne saurais le faire.

Nous étions nombreux à beaucoup aimer René Thom. Sa personne suscitait autant d'intérêt que ses mathématiques. Il était très accessible, toujours prêt à répondre aux questions, on allait le voir avec plaisir. Il était débonnaire, plein d'indulgence (quelquefois mêlée d'étonnement) pour les lacunes de ma culture mathématique. Il était profondément honnête, il ne cherchait pas à construire un empire, et il cherchait avant tout la vérité : il donnait l'exemple d'une totale liberté intellectuelle. Mais tout cela ne suffit pas, et je me suis longtemps demandé pourquoi j'ai tellement aimé René Thom. Après tout, je ne croyais pas à la théorie des catastrophes, je n'avais jamais lu une démonstration de lui[3] , une grande partie de son œuvre me restait inconnue, et d'un point de vue strictement professionnel, tout l'investissement technique que j'avais fait dans la théorie des singularités d'applications différentiables ne m'avait servi que deux fois, dans des articles que j'aimais bien et qui m'avaient donné du mal, mais dont on ne peut pas dire qu'ils aient eu un retentissement considérable.

Maintenant qu'il n'est plus là, et que moi-même j'approche de la fin de ma carrière mathématique, j'ai enfin compris : jamais les mathématiques n'ont été aussi belles qu'avec René Thom. Ah, les fonctions excellentes au sens de Thom, ah, le lemme de Nakayama, ah, les déploiements universels ! Tout cela paraissait simple parce que c'était naturel. Après avoir vu cela, on ne pouvait plus faire de mathématiques comme avant, et se lancer dans des calculs sous prétexte qu'on espérait pouvoir les faire un peu mieux ou les pousser un peu plus loin que quelqu'un d'autre. D'un certain point de vue, l'effet de Thom était négatif, parce qu'on ne pouvait plus s'intéresser à certaines choses, mais en contrepartie il nous avait appris qu'en cherchant à comprendre les choses les plus simples on allait à la rencontre de grandes découvertes.

Je connais quelques autres mathématiciens capables de faire cela, capables de prendre un objet simple et d'en faire surgir tout un univers mathématique grouillant de vie, comme un Loewenhoek mettant une goutte d'eau sous son microscope. Peter Lax par exemple, est dans cette catégorie, ainsi que John Milnor. Il y en a certainement bien d'autres, dans des domaines que je ne connais pas. Mais seul

[3]Pour le théorème de transversalité, Smale était passé par là, et en avait donné une démonstration simple, et très accessible à un analyste, basée sur l'alternative de Fredholm. Voir le livre d'Abraham et Robbin « Transversal mappings and flows » où tout cela est exposé de façon très claire.

René Thom a été capable de faire partager sa vision à des non-mathématiciens, de montrer à tout le monde, tout le monde ! la beauté et la richesse des objets mathématiques. Peu importe finalement que la théorie des catastrophes ne serve pas, ce n'est pas ce que nous demandons. Si on le prend par là, d'un point de vue strictement utilitariste, alors ce n'était pas la peine que Cervantes écrive le « don Quichotte », ni que van Gogh peigne des champs de tournesol sous le soleil, ou un ciel de nuit halluciné au-dessus d'un café. Tout cela fait partie de la culture, et la culture est éternellement ambiguë : à quoi sert-elle, puisqu'elle ne rend pas les hommes meilleurs, qu'elle n'empêche ni l'oppression ni les massacres, et qu'il n'est pas prouvé qu'elle les rende plus productifs ? Vieille question, toujours non résolue. La seule vraie réponse est que la culture est justement ce qui fait de nous des êtres humains, et que c'est ce que nous pouvons léguer de meilleur. René Thom est un des très rares mathématiciens à avoir contribué à la culture. De manière ambiguë, certes, mais dans ce domaine on ne peut pas faire autrement : « *Le maître dont l'oracle est à Delphes ne cache ni ne montre, mais fait signe* ».