L'erreur en mathématiques

Ivar Ekeland
www.ceremade.dauphine.fr/~ekeland
CEREMADE, Université Paris-Dauphine

June 28, 2012

Il y a bien des années, j'ai eu comme professeur de mathématiques un homme redoutable. Il s'appelait Alexandre Rambaud, et il était de la promotion 1913 à l'Ecole Normale Supérieure. Nous étions cinquante ans plus tard, et il était toujours là, bon pied bon oeil, auréolé du prestige de tant d'années passées à enseigner les mathématiques. Quand il rentrait en classe, nous nous levions tous, il montait sur l'estrade, et ne nous asseyions que quand il nous y invitait. Pendant son cours, il alignait les équations et les calculs, toujours impeccablement organisés, sur un tableau qui occupait tout le mur, pendant que nous nous évertuions à les reproduire sur nos cahiers.

Or cet homme redoutable, cette incarnation des mathématiques, ne commencait jamais un calcul sans se retourner vers nous et nous dire: "Si je me trompe, vous me prévenez." Cela était dit fort sérieusement, comme une précaution naturelle, et il arrivait de temps en temps qu'effectivement un signe ou un coefficient soit faux. On le lui signalait d'une voix peu affermie, il s'écartait un instant du tableau, vérifiait, corrigeait, et remerciait. C'est peut-être la lecon la plus importante qu'il m'ait donnée. Même un homme aussi expérimenté, qui en savait tellement plus que nous, pouvait se tromper ! Et on avait le droit de le lui dire ! C'est là que j'ai découvert la grande démocratie des mathématiques: l'argument d'autorité n'existe pas, il faut toujours être en mesure de justifier ce que l'on dit, et de le justifier sur-le-champ. Ce n'est vrai ni en philosophie, ni en histoire (on peut invoquer des textes et des inscriptions, mais on les a rarement sous la main), ni même en physique (on ne peut guère reproduire l'expérience de Michelson et Morley dans une salle de classe), mais c'est vrai en mathématiques. Bien des années plus tard, quand j'étais à mon tour devenu un professeur chevronné, j'ai eu la même expérience, mais de l'autre côté: un "simple" étudiant qui suivait mon cours est arrivé à démontrer un résultat sur lequel j'avais travaillé en vain. En fait, dans une première rédaction, j'avais cru le démontrer, mais il s'est apercu que la démonstration était fausse, très fausse même, et il a produit une démonstration correcte.

De ces expériences, et de bien d'autre, on peut retenir les deux traits fondamentaux, et en apparence contradictoires, de la certitude mathématique. D'une part, elle est partagée, intemporelle et universelle. Nous sommes tous d'accord sur ce qui est vrai: personne ne doute du théorème de Pythagore. Si nous ne le sommes pas, nous en parlerons tous ensemble, et la vérité émergera de la discussion: " Tu vois, là ton raisonnement ou ton calcul est faux ! Oui, c'est vrai, je me suis trompé." En mathématiques, on parle toujours sous le contrôle d'autrui, car on n'est jamais sûr de n'avoir pas commis d'erreur. Mais d'autre part, cette vérité partagée, on peut aussi y arriver tout seul, comme mon étudiant qui avait résolu un problème sur lequel j'avais travaillé en vain, et en compagnie ! Il existe des cas célèbres, Pascal, qui d'après sa soeur, avait retrouvé tout seul, à l'âge de dix ans, les premiers livres d'Euclide, Ramanujan, modeste employè au fin fond de l'Inde, dont les carnets sont remplis de formules qui laissent encore perplexes les meilleurs mathématiciens.

La vérité est une: quel que soit le chemin par lequel on l'atteint, elle est la même. Mais rien n'égale la satisfaction de la découvrir par soi-même. La vérité que l'on apprend et qui est simplement confiée à la mémoire peut s'en échapper: ce que l'on apprend la veille d'examen est effacé le lendemain de l'épreuve. La vérité que l'on a découverte au terme d'un cheminement intérieur fait partie de notre histoire, et fait dorénavant partie de nous-mêmes. On ne peut pas, bien sûr, redécouvrir toutes les mathématiques. Mais l'on peut expérimenter, au moins une fois, cette sensation inoubliable que les mathématiques ne sont pas un univers mort, peuple de statues antiques dont les guides vous vantent les mérites, mais un monde vivant, une jungle où nous pouvons, nous aussi, découvrir quelque orchidée géante ou quelque oiseau de paradis.

On me demande bien souvent de donner une idée du processus de découverte en mathématiques. Je réponds en posant quelques problèmes, qui sont moins simples qu'ils n'en ont l'air:

- Etant donnés deux points A et B, tracer le segment AB qui les joint. On dispose pour se faire d'un compas, et d'une règle trop courte: la longueur de la règle est inférieure à la distance AB

- On donne 12 pièces, dont une est fausse: elle n'a pas le même poids que les autres (mais on ne sait pas si elle est plus lourde ou plus légère). On dispose d'une balance (sans poids: la balance permet juste de dire si ce qu'il y a dans le plateau de gauche est plus lourd ou plus léger que dans le plateau de droite). En 3 pesées, trouver la pièce fausse, et dire si elle est plus lourde ou plus légère

- On donne une sphère, un compas, une règle et une feuille de papier (le compas peut tracer des cercles sur la sphère). Déterminer le rayon de la sphère (plus précisément, tracer sur la feuille un segment dont la longueur est égale au rayon de la sphère)

Trop souvent, on s'imagine les mathématiques comme un corpus de résultats à apprendre par coeur, exercice de mémoire dont on se passerait volontiers. Pourquoi apprendre les tables de multiplication quand on dispose aujourd'hui de calculettes qui vous donnent immédiatement le résultat, sans fatigue et sans risque d'erreur ? A quoi sert la formule algébrique:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2a}$$

quand votre calculette vous résout numériquement l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec toute la précision souhaitée ? Les démonstrations elles-mêmes font partie du corpus, et les exercices se contentent de vérifier que l'élève sait les reproduire. Voilá ce que j'appellerai la conception fermée des mathématiques, qui conduit tout naturellement à s'imaginer que les mathématiques sont achevées, que la liste des résultats à connaître a été arrêtée depuis longtemps par quelque ancienne autorité, tout comme la liste des textes du Nouveau Testament a été fixée par quelque lointain concile, acceptant comme livres sacrés les quatre évangiles synoptiques et rejetant l'Évangile de Thomas dans les ténèbres extérieures.

Je plaide, au contraire, pour une conception ouverte: les mathématiques ne sont pas un ensemble de règles a connaître, mais une méthode pour chercher la vérité, dans des situations où on ne la connaît pas à priori. D'où l'intérêt des exercices précédents: on ne dit pas à l'élève "montrer que...", on ne lui indique pas le résultat à démontrer. On lui pose un problème et c'est à lui de se débrouiller: tout ce qu'on lui demande, c'est de respecter certaines règles de logique. On ne cherche pas le résultat, puis sa démonstration: les deux viennent ensemble, c'est la démonstration qui enfante le résultat.

Dans la conception fermée des mathématiques, l'erreur ne peut être qu'un oubli, ou une méprise. Dans la conception ouverte, l'erreur est un passage nécessaire vers la vérité. Il peut se faire que le résultat, et le chemin qui y mène, vous apparaisse dans une illumination. C'est l'expérience que relate Poincaré, dans un passage célèbre, mais ce qu'il dit aussi c'est que cette illumination est intervenue après de longues semaines de travail, et de chemins suivis, parfois pendant longtemps, se terminant par des impasses ! Pour résoudre l'un des trois problèmes que j'ai posés plus haut, on essayera une première idée, qui n'aboutira pas, mais qui en donnera une deuxìème, qu'il faudra modifier à son tour, jusqù'a ce que l'on parvienne à une démonstration correcte. Chaque étape du chemin se termine par une erreur, mais à chaque fois on s'est rapproché de la vérité. Seuls ceux qui n'essaient pas ne se trompent pas.

L'erreur en mathématiques a ses lettres de noblesse. Voici une des plus célèbres. En 1885, le roi Oscar II de Suède et de Norvège crée un prix de mathématiques, qui sera décerné une seule fois. Les prétendants doivent soumettre leurs manuscrits anonymement à un jury international. En janvier 1889, le vainqueur est annoncé: il s'agit de mathématicien francais Henri Poincaré, et sa victoire a un immense retentissement. Son mémoire couronné ("*Sur le problème des trois corps et la théorie de la dynamique*", 270 pages) est publié en Novembre 1890 dans *Acta Mathematica*, et est considéré aujourd'hui comme l'acte de naissance de la théorie du chaos.

Le problème des trois corps consiste à étudier le mouvement de trois masses soumises á l'attraction gravitationnelle. Le problème est dit *restreint* quand l'une des masses est trop petite pour influencer le mouvement des deux autres: c'est le cas, par exemple, du système formé par le Soleil, Jupiter et un astéroïde. Jupiter décrit alors une ellipse autour du Soleil, suivant la loi de Kepler (plus exactement, le Soleil et Jupiter décrivent des ellipses autour de leur centre de gravité commun) et l'astéroïde gravite autour d'elles. C'est le cas qu'étudie Poincaré. Le problème essentiel est celui de la *stabilité*: qu'advient-il à très long terme ? Collision, éjection, stabilité ? L'astéroïde (dont la trajectoire n'a aucune raison d'être périodique) va-t-il rester éternellement entre le Soleil et Jupiter, va-t-il se précipiter sur l'un ou sur l'autre, ou va-t-il finalement être éjecté du système solaire ? Les plus grands mathématiciens et astronomes, depuis Euler et Lagrange, s'étaient attaqués à ce problème sans résultats vraiment concluants. Dans son mémoire, Poincaré conclut finalement à la stabilité dans le problème restreint des trois corps.

Mais en Juillet 1889, Phragmén, chargé de relire le manuscrit de Poincaré avant de l'envoyer à l'imprimeur, trouve dans la démonstration quelques points obscurs, et écrit à Poincaré pour lui demander des éclaircissements. La réponse de celui-ci arrive en Décembre, trop tard pour l'imprimeur: il s'était trompé. L'erreur qu'avait trouvée Phragmén n'était pas anodine: elle détruisait toutes les conclusions du mémoire. Poincaré a donc dû le reprendre entièrement, pour arriver à des conclusions diamétralement opposées ! Les équations de la dynamique amplifient les erreurs de mesure, si bien qu'on ne peut faire aucune prédiction à très long terme; les positions de planètes sont imprévisibles au-delà de 400 millions d'années, ce qui est beaucoup pour nous mais peu pour le système solaire. De fait, certaines simulations numériques donnent à penser que la planète Mercure pourrait bien un jour croiser l'orbite de la Terre, avec les conséquences que l'on peut imaginer. La théorie du chaos était née. Elle végètera pendant près d'un siècle, jusqu'à ce que l'avènement des ordinateurs permettre de faire des calculs impossibles à faire à la main et de visualiser les trajectoires. Ce qui était au départ une erreur de Poincaré, erreur qui lui a littéralement coûté cher, puisqu'il lui a fallu rappeler tous les numéros en circulation d'Acta Mathematica et les réimprimer à ses frais, est devenu son plus beau titre de gloire.

Quelles conclusions tirer de tout cela ? D'abord, que les mathématiques sont beaucoup plus riches que ne l'imaginent les mathématiciens. Elles nous surprennent en permanence: si Poincaré s'est trompé, c'est qu'il n'imaginait pas que la trajectoire d'un astéroïde, quand il n'existe à part lui que le Soleil et Jupiter, puisse être aussi compliquée. Ensuite, que l'on peut se tromprer en mathématiques: les plus grands génies l'ont fait. Mais la beauté des mathématiques, c'est que l'erreur est provisoire: elle dure tant qu'un autre (ou soi-même) n'a pas reconnu la vérité, et cette reconnaissance s'impose alors à tous. La vérité n'est jamais révélée, elle se découvre par tâtonnement, et l'erreur est inévitable dans ce processus.

Personnellement, j'en tire des conséquences plus larges. Suivant en cela Spinoza, je considère les mathématiques comme une éthique. Elle a trois moments essentiels: il y a une vérité, cette vérité est à ma portée, et elle nous rend libres et solidaires.

Il y a une vérité. Laissons la parole à Spinoza:

Ethique I, Appendice: "*et cela seul eût suffit à faire que la vérité demeurât pour l'éternité cachée au genre humain, s'il n'y avait eu la mathématique, qui s'occupe non pas des fins mais des essences et propriétés des figures, pour montrer aux hommes une autre norme de la vérité*"

Ethique I, Appendice: "*Car tout le monde a à la bouche: autant de têtes,* *autant d'avis; chacun abonde dans son sens: Il n'est pas moins de différence entre cerveaux qu'entre palais. Sentences qui montrent assez que les hommes jugent des choses suivant la disposition de leur cerveau, et imaginent les choses plutôt qu'ils ne les comprennent. Car les choses, s'ils les avaient comprises, les auraient, comme l'atteste la mathématique, sinon tous attirés, du moins tous convaincus* "

Que cette vérité soit à ma portée, c'est l'expérience quotidienne de quiconque fait des mathématiques, et je pense l'avoir abondamment montré. Cela veut dire notamment qu'il faut, toujours et en toute circonstances, rejeter tout argument d'autorité. Comme disait le regretté Monsieur Rambaud, "Si je me trompe, vous me prévenez". Ne prenez rien pour argent comptant, si on vous dit que vous êtes trop bêtes ou pas assez compétent pour comprendre telle ou telle chose, ne le croyez pas, bien au contraire méfiez-vous ! Cela vaut dans tous les domaines, les mathématiques certes, mais aussi l'économie et la politique. J'ai fait beaucoup d'économie et de finance dans ma vie de chercheur et de professeur, au Canada comme en France, et je peux vous assurer que la théorie économique ou politique est beaucoup moins avancée que les mathématiques; l'idée qu'elles contiennent des choses que vous ne pouvez pas comprendre est un artifice destiné à défendre le pouvoir et les intérêts des gens en place.

Enfin, cette vérité nous rend libres et solidaires. Libres parce qu'elle nous incite à juger par nous-mêmes, et nous soustrait à la dictature intellectuelle des bien-pensants. Solidaires parce qu'elle est partagée: un être humain est celui avec qui on peut en parler. Comme le dit Spinoza (Ethique 4, prop 18, scholie) "*A l'homme donc, rien de plus utile que l'homme*"