

# TOPOLOGIE DIFFERENTIELLE ET THEORIE DES JEUX

IVAR EKELAND

(Received 10 November 1973; revised 15 February 1974)

## INTRODUCTION

LORSQU'UN mathématicien désire étudier une situation concrète, il commence par construire un modèle formel dépendant de certains paramètres, puis il ajuste les valeurs des paramètres, suivant la réalité à observer, et enfin il en démontre certaines propriétés. On peut alors légitimement se demander si les conclusions qu'on en tire se rapportent effectivement à la réalité, ou au modèle mathématique particulier qui en a été donné. Une première précaution à prendre est de ne tenir compte que des propriétés qui sont peu sensibles à de petites variations des paramètres, c'est-à-dire des propriétés structurellement stables. L'intérêt de celles-ci est encore plus apparent si l'on tient compte des difficultés inhérentes à tout ajustement précis des paramètres. Si en outre une telle propriété est générique c'est-à-dire si elle est satisfaite pour presque toutes les valeurs des paramètres, on pourra être assuré qu'elle traduit un comportement qualitatif général d'un certain type de situations concrètes. C'est de ce point de vue que nous avons voulu examiner la théorie des jeux.

On reconnaîtra là sans peine les idées de René Thom, dont l'influence se fera sentir tout au long de l'article. Nous tenons également à remercier le referee anonyme qui a trivialisé la démonstration de la Proposition 4.

## §1. LA THEORIE CLASSIQUE DES JEUX A DEUX PERSONNES

La théorie des jeux est l'étude des situations où plusieurs personnes ont à prendre des décisions dont dépend un résultat qui les concerne. Nous nous limiterons au cas de deux personnes: l'une sera Urbain ou le premier joueur, l'autre sera Victor ou le second joueur. Depuis les travaux de Von Neumann et Morgenstern [8], on adopte la formalisation suivante. Urbain a le choix parmi un certain ensemble  $U$  de décisions possibles. Victor a le choix parmi un certain ensemble  $V$  de décisions possibles. Lorsque Urbain a fixé sa décision  $u \in U$ , et que Victor a fixé sa décision  $v \in V$ , il en résulte une situation, fonction de  $u$  et de  $v$ , qu'ils apprécient différemment. Chacun d'eux chiffre la valeur qu'il attache à la situation  $(u, v)$ : Urbain l'évalue à  $f(u, v)$  et Victor l'évalue à  $g(u, v)$ . Les fonctions  $f$  et  $g$ , de  $U \times V$  dans  $\mathbb{R}$  sont appelées critères. Chacun des joueurs désire une situation où son propre critère soit le plus grand possible.

Graphiquement, on peut se représenter l'ensemble des situations possibles comme le produit cartésien  $U \times V$ . Le choix de  $\bar{u} \in U$  par Urbain signifie l'acceptation par celui-ci de toutes les situations figurant sur la colonne  $\{(\bar{u}, v) | v \in V\}$  et l'élimination de toutes celles qui n'y figurent pas. Le choix de  $\bar{v} \in V$  par Victor signifie l'acceptation par celui-ci de toutes les situations figurant sur la ligne  $\{(u, \bar{v}) | u \in U\}$  et l'élimination de toutes celles qui n'y figurent pas. A l'intersection de la ligne de Victor et de la colonne d'Urbain figure la situation  $(\bar{u}, \bar{v})$  qui en résulte. Le gain d'Urbain est  $f(\bar{u}, \bar{v})$ , celui de Victor est  $g(\bar{u}, \bar{v})$ .

Quelle peut être une issue naturelle du jeu? Une première réponse est apportée par l'ensemble de Pareto. Il s'agit de l'ensemble des éléments de  $U \times V$  maximaux pour la relation de préordre  $\lesssim$ :

$$(u_1, v_1) \lesssim (u_2, v_2) \Leftrightarrow f(u_1, v_1) \leq f(u_2, v_2) \text{ et } g(u_1, v_1) \leq g(u_2, v_2).$$

Cette notion a été introduite par Pareto [6] en économie, et à récemment été reprise par Smale [7] dans un cadre de géométrie différentielle. L'intérêt qu'elle présente dépend du degré de coopération possible entre les joueurs. Ainsi, dans le cas extrême où  $f = \alpha g$ ,  $\alpha > 0$ , il y a identité de vues entre Urbain et Victor, l'ensemble de Pareto est réduit aux maxima de  $f$ , et il est clair que ce sont là les issues naturelles du jeu. Mais, dans l'autre cas extrême où  $f = \alpha g$ ,  $\alpha < 0$ , les intérêts d'Urbain et Victor sont diamétralement opposés, l'ensemble de Pareto est  $U \times V$  tout entier, et n'apporte donc plus aucune indication. On voit donc qu'il est besoin de faire appel à d'autres notions pour décrire des situations de conflit. La notion classique est celle d'équilibre que l'on doit à Von Neumann [8]:

*Definition 1.* On appelle équilibre une situation  $(\bar{u}, \bar{v})$  telle que:

$$\begin{aligned} f(\bar{u}, \bar{v}) &= \max\{f(u, \bar{v}) | u \in U\} \\ g(\bar{u}, \bar{v}) &= \max\{g(\bar{u}, v) | v \in V\}. \end{aligned}$$

Aucun des deux joueurs, à lui seul, ne peut plus améliorer son propre critère. On a là une issue naturelle du jeu, à condition de faire une hypothèse de non-coopération: on pourra supposer, par exemple, que les joueurs ignorent le critère de leur adversaire. Ils considèrent donc la décision de celui-ci comme une donnée, et à l'équilibre, ils se trouvent y avoir répondu au mieux. Ainsi, si l'on propose séparément à Urbain ou à Victor de rejouer, en lui révélant le choix de l'adversaire, il ne modifiera pas sa décision pour autant.

La première question qui se pose est bien entendu celle de l'existence: un jeu donné possède-t-il oui ou non des équilibres? On y répond en se ramenant à un théorème de point fixe. Une façon simple de procéder est de faire l'hypothèse d'unicité suivante:

(H) Pour tout  $v \in V$  la fonction  $f(\cdot, v)$  possède un unique maximum absolu  $m(v) \in U$  et, pour tout  $u \in U$ , la fonction  $g(u, \cdot)$  possède un unique maximum absolu  $n(u) \in V$ .

En d'autres termes, Urbain a une seule meilleure réponse  $m(v)$  à toute décision  $v$  de Victor, et Victor a une seule meilleure réponse  $n(u)$  à toute décision  $u$  d'Urbain. L'équilibre est une situation où chacun se trouve avoir joué la meilleure réponse au choix de l'adversaire:

**PROPOSITION 2.** Hypothèse (H). Une situation  $(\bar{u}, \bar{v})$  est un équilibre si et seulement si c'est un point fixe de l'application  $\widetilde{m \times n}$  de  $U \times V$  dans lui-même définie par

$$(u, v) \mapsto (m(v), n(u)).$$

Si en outre  $U$  et  $V$  sont des espaces topologiques compacts et les fonctions  $f$  et  $g$  sont continues, les fonctions  $m$  et  $n$  le seront également, ce qui nous permettra d'appliquer le théorème de Lefschetz: si l'index de  $\widehat{m} \times \widehat{n}$  est non nul, il existera au moins un équilibre. On énoncera par exemple: si  $U$  et  $V$  sont des espaces topologiques compacts et contractiles, si les fonctions  $f$  et  $g$  sont continues, et si l'hypothèse d'unicité ( $H$ ) est satisfaite, le jeu admettra un équilibre.

La théorie des jeux classique remplace l'hypothèse d'unicité ( $H$ ) par une hypothèse de convexité. On arrive ainsi à des énoncés dont le prototype est le théorème de Von Neumann: si  $U$  (resp.  $V$ ) est une partie convexe compacte d'un espace vectoriel topologique, si pour tout  $v \in V$  (resp. tout  $u \in U$ ) la fonction  $f(\cdot, v)$  (resp.  $g(u, \cdot)$ ) est concave et continue, il existe un équilibre. Remarquons simplement que si l'on remplace "concave" par "strictement concave", on est ramené à l'énoncé précédent:  $f(\cdot, v)$  et  $g(u, \cdot)$  atteignent leur maximum en un point unique et  $U$  et  $V$  sont contractiles puisque convexes.

§2. STABILITE STRUCTURELLE

Montrons d'abord que l'hypothèse ( $H$ ) n'est pas générique. Nous allons donner un contre-exemple pour  $U = V = [-1, 1]$ , laissant au lecteur le soin de l'étendre aux dimensions supérieures. Considérons donc  $I = [-1, 1]$  et la fonction  $\varphi$  de  $I \times I$  dans  $\mathbb{R}$  définie par:

$$\varphi(x, y) = -x^4 + 3x^2/2 + 4yx$$

Pour tout  $y \in I$  la fonction  $\varphi(\cdot, y)$  admet deux maxima locaux  $\mu_1(y)$  et  $\mu_2(y)$  et un minimum local  $v(y)$ , de telle sorte que  $\mu_2(y) < v(y) < \mu_1(y)$ . Les fonctions  $\mu_1, \mu_2$ , et  $v$  de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  sont de classe  $C^\infty$ . Pour  $y \neq 0$  il y a un seul maximum absolu:  $\mu_1(y)$  pour  $y > 0$  et  $\mu_2(y)$  pour  $y < 0$ . On peut donc choisir  $\varepsilon > 0$  assez petit pour que:

- (a)  $\forall y \in [\frac{1}{2}, 1], \varphi(\mu_1(y), y) - \varepsilon > \varphi(\mu_2(y), y) + \varepsilon;$
- (b)  $\forall y \in [-1, -\frac{1}{2}], \varphi(\mu_2(y), y) - \varepsilon > \varphi(\mu_1(y), y) + \varepsilon,$
- (c)  $\forall y \in [-1, 1], \varphi(\mu_1(y), y) - \varepsilon > \varphi(v(y), y) + \varepsilon;$
- (d)  $\forall y \in [-1, 1], \varphi(\mu_2(y), y) - \varepsilon > \varphi(v(y), y) + \varepsilon.$

Soit maintenant une fonction  $\psi \in C^0(I \times I)$ , telle que  $\|\varphi - \psi\|_0 \leq \varepsilon$ . Supposons que pour tout  $y \in I$  la fonction  $\psi(\cdot, y)$  atteigne son maximum absolu sur  $I$  en un point unique  $\mu(y)$ . L'application  $\mu$  est alors continue de  $I$  dans  $I$ . D'après (a) on a  $\mu(y) > v(y)$  pour  $y \geq \frac{1}{2}$ . D'après (b) on a  $\mu(y) < v(y)$  pour  $y \leq -\frac{1}{2}$ . On doit donc avoir  $\mu(y) = v(y)$  pour un certain point  $y \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ , en contradiction avec (c) et (d). Donc, pour toute fonction continue  $\psi$  de  $I \times I$  dans  $\mathbb{R}$  assez voisine de  $\varphi$  pour la norme uniforme, il existera  $y \in I$  tel que  $\psi(\cdot, y)$  atteigne son maximum absolu sur  $I$  en deux points distincts.

Passons maintenant à l'étude de la stabilité structurelle. Cette étude se fait dans un cadre de topologie différentielle, qui nécessite l'emploi de modèles réguliers. Dorénavant,  $U$  et  $V$  seront des variétés compactes, connexes, sans bord, de classe  $C^\infty$ , de dimensions respectives  $p$  et  $q$ . Les fonctions  $f: U \times V \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g: U \times V \rightarrow \mathbb{R}$  seront de classe  $C^2$ . En outre, nous serons amenés à faire diverses hypothèses de transversalité.

Introduisons d'abord quelques notations. On désigne par  $C^2(U \times V)$  l'espace des fonctions deux fois continûment différentiables sur  $U \times V$ , muni de sa structure naturelle d'espace de Banach (voir Abraham-Robbin [1]). Dans le fibré  $J^1(U)$  des jet d'ordre 1 de fonctions numériques  $\varphi$  sur  $U$ , on distingue le sous-fibré  $J_0^1(U)$  défini par les équations locales :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) = \cdots = \frac{\partial \varphi}{\partial u_p}(u) = 0.$$

Par abus de notation, on désignera également par  $J_0^1(U)$  le sous-fibré de  $J^1(U \times V)$  défini par les équations locales :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u, v) = \cdots = \frac{\partial \varphi}{\partial u_p}(u, v) = 0.$$

On définit de même  $J_0^1(V)$ , et on pose :

$$\begin{aligned} M &= \{(u, v) \in U \times V \mid J^1 f(u, v) \in J_0^1(U)\} \\ N &= \{(u, v) \in U \times V \mid J^1 g(u, v) \in J_0^1(V)\}. \end{aligned}$$

Note première hypothèse de transversalité se formule de la façon suivante :

(T)  $J^1 f$  est transversal à  $J_0^1(U)$  et  $J^1 g$  est transversal à  $J_0^1(V)$ . Les sous-variétés  $M$  et  $N$  sont transversales dans  $U \times V$ .

La première partie de l'hypothèse assure que  $M$  et  $N$  sont des sous-variétés de classe  $C^1$  de dimensions respectives  $p$  et  $q$ , de  $U \times V$ , et donne donc un sens à la seconde. L'hypothèse (T) est structurellement stable et même générique pour la topologie  $C^2$  :

**PROPOSITION 3.** *L'ensemble des couples  $(f, g)$  qui vérifient (T) est un ouvert dense de  $C^2(U \times V) \times C^2(U \times V)$ , noté  $\Theta$ .*

*Démonstration.* Cela résulte des théorèmes de transversalité de Thom, tels qu'ils sont exposés dans Lévine [3], ou dans Abraham-Robbin [1]. On en déduit immédiatement l'ouverture dans  $C^2 \times C^2$  et la densité dans  $C^r \times C^r$ , pour  $r$  assez grand. Mais, pour  $r \geq 2$ ,  $C^r(U \times V)$  est dense dans  $C^2(U \times V)$  et est muni d'une topologie plus fine, d'où le résultat.

Les sous-variétés  $M$  et  $N$ , étant transversales et de dimensions complémentaires, se coupent en un nombre fini de points. Parmi ceux-ci figurent nécessairement les équilibres du jeu. En effet, dire que  $(u, v) \in M \cap N$  signifie que  $u$  est un point critique de  $f(\cdot, v)$  et  $v$  un point critique de  $g(u, \cdot)$ , et dire que  $(u, v)$  est un équilibre signifie que  $u$  est un maximum absolu de  $f(\cdot, v)$  et  $v$  un maximum absolu de  $g(u, \cdot)$ . On a donc une indication très précieuse avec le résultat suivant, qui m'a été signalé par René Thom :

**PROPOSITION 4.** *Si les caractéristiques d'Euler-Poincaré de  $U$  et de  $V$  sont toutes deux non nulles (cas orientable) ou toutes deux impaires (cas non orientable), alors  $M \cap N \neq \emptyset$ .*

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que si  $M \cap N = \emptyset$ , alors  $T_u f \oplus T_v g$  définit un champ de vecteurs partout non nul sur la variété compacte  $U \times V$ , dont la caractéristique d'Euler-Poincaré doit donc être nulle si elle est orientable, paire si elle ne l'est pas.

On se convainc facilement que, si les hypothèses sur les caractéristiques d'Euler ne sont pas satisfaites ( $U = V = S^1$  par exemple) les variétés  $M$  et  $N$  peuvent ne pas se couper, et

que même si elles le sont les variétés  $M$  et  $N$  peuvent se couper en des points dont aucun n'est un équilibre. On voit donc en quoi l'hypothèse  $(H)$  est nécessaire. On a vu qu'elle n'était pas générique. Elle n'est pas non plus structurellement stable; on s'en convainc aisément en considérant dans  $I \times I$  la famille de fonctions:

$$\varphi_\varepsilon(x, y) = x^4 - \varepsilon x^2 + xy.$$

Quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\varphi_\varepsilon$  tend vers  $\varphi_0$  dans  $C^\infty(I \times I)$  et cependant  $\varphi_0$  satisfait à  $(H)$  sans que les  $\varphi_\varepsilon$  y satisfassent pour  $\varepsilon > 0$ . On peut cependant rendre l'hypothèse  $(H)$  structurellement stable en la renforçant légèrement:

$(H')$  Pour tout  $v \in V$  la fonction  $f(\cdot, v)$  possède un unique maximum absolu  $m(v) \in U$ ; et pour tout  $u \in U$  la fonction  $g(u, \cdot)$  possède un unique maximum absolu  $n(u) \in V$ . Les applications  $m: V \rightarrow U$  et  $n: U \rightarrow V$  sont de classe  $C^1$ .

Remarquons que, dans ces conditions, la projection de  $U \times V$  sur  $V$  induit un difféomorphisme du graphe de  $m$  sur  $V$ . Le graphe de  $m$  est donc une composante connexe de  $M$ ; de même le graphe de  $n$  est une composante connexe de  $N$ .

PROPOSITION 5. L'ensemble des couples  $(f, g)$  satisfaisant à  $(T)$  et  $(H')$  est un ouvert  $\Omega$  de  $C^2(U \times V) \times C^2(U \times V)$ .

Démonstration. L'équation  $(\partial f / \partial u)(m(v), v) = 0$  s'écrit aussi  $T_u f(m(v), v) = 0$  dans le fibré tangent à  $U \times V$ . On peut donc définir de manière intrinsèque des dérivées secondes  $T_{uu}^2 f$  et  $T_{vv}^2 f$  au point  $(m(v), v)$ . On obtient:

$$T_{uu}^2 f(m(v), v) \circ Tm(v) + T_{vv}^2 f(m(v), v) = 0$$

ce qui prouve que:

$$\text{Im } T_{vv}^2 f(m(v), v) \subset \text{Im } T_{uu}^2 f(m(v), v).$$

Mais comme  $f$  satisfait à l'hypothèse  $(T)$ ,  $J^1 f(m(v), v)$  est transversal à  $J_0^1(U)$  ce qui s'exprime par:

$$\text{Im } T_{vv}^2 f(m(v), v) + \text{Im } T_{uu}^2 f(m(v), v) \simeq \mathbb{R}^p$$

On a donc  $\text{Im } T_{uu}^2 f(m(v), v) \simeq \mathbb{R}^p$ , ce qui signifie, compte tenu des dimensions, que  $T_{uu}^2 f(m(v), v)$  est un isomorphisme. D'après le théorème des fonctions implicites, pour tout  $v \in V$ , il existera un voisinage  $\nu$  de  $v$  dans  $V$ , un voisinage  $\omega$  de  $m(v)$  dans  $U$  et un voisinage  $\omega'$  de  $f$  dans  $C^2(U \times V)$  tels que pour tout  $f' \in \omega'$  et tout  $v' \in \nu$ , l'équation  $T_u f'(u, v') = 0$  ait une solution unique  $u' = m(f', v')$  dans  $\omega$ , la fonction  $m: \omega' \times \nu \rightarrow \omega$  étant de classe  $C^1$ . Par définition  $m(f, v) = m(v)$ .

Il est clair que si  $f'$  est assez voisin de  $f$  dans  $C^2(U \times V)$  et même dans  $C^0(U \times V)$ , les maxima absolus de  $f'(\cdot, v')$  seront tous contenus dans  $\omega$  si  $v' \in \nu$ . Le seul candidat possible est  $m(f', v')$  et on a ainsi établi l'unicité et la différentiabilité du maximum au voisinage de  $f$  dans  $C^2(U \times V)$  et de  $v$  dans  $V$ . Il ne reste plus qu'à recouvrir le compact  $V$  par un nombre fini d'ouverts possédant la propriété requise, et à prendre l'intersection des voisinages de  $f$  correspondants. En procédant de même pour  $g$ , on voit que l'ensemble des couples  $(f, g)$  vérifiant  $(H')$  est ouvert dans  $\Theta$ , d'où le résultat.

**PROPOSITION 6.** *Tout couple  $(f, g) \in \Omega$  possède un voisinage  $\omega_1 \times \omega_2$  où le nombre d'équilibres est fini et constant, chacun d'eux étant donné par une application de classe  $C^1$  de  $\omega_1 \times \omega_2$  dans  $U \times V$ .*

*Démonstration.* Nous venons de voir qu'au voisinage de  $(f, g) \in \Omega$  et d'un équilibre  $(u, v) \in U \times V$  associé au couple  $(f, g)$ , les équilibres sont donnés par la résolution du système d'équations:

$$(s) \begin{cases} m(f', v') = u' \\ n(g', u') = v'. \end{cases}$$

Les fonctions  $m$  et  $n$  sont de classe  $C^1$ . L'hypothèse (T) nous permet d'affirmer la transversalité de  $m(f, \cdot)$  et  $n(g, \cdot)$  en  $(u, v)$  et donc d'appliquer le théorème des fonctions implicites. Il existe donc une fonction  $\omega$  de classe  $C^1$  définie sur un voisinage de  $(f, g)$  telle que l'unique solution de (s) au voisinage de  $(u, v)$  soit donnée par  $(u', v') = \omega(f', g')$ .

Soit  $(u_i, v_i)$ ,  $i \in I$ , l'ensemble des équilibres du jeu associé au couple  $(f, g)$ . On a vu que  $I$  est fini et peut éventuellement être vide. On a donc un voisinage  $\omega_1 \times \omega_2$  de  $(f, g)$  et pour tout  $i \in I$  un voisinage  $\omega_i \times \nu_i$  de  $(u_i, v_i)$  et une application de classe  $C^1$   $\omega_i: \omega_1 \times \omega_2 \rightarrow \omega_i \times \nu_i$ , telle que l'unique équilibre associé au couple  $(f', g')$  dans  $\omega_i \times \nu_i$  soit  $\omega_i(f', g')$ . Il ne reste plus qu'à montrer qu'on peut choisir,  $\omega_1 \times \omega_2$  assez petit pour que tout équilibre associé à un couple  $(f', g')$  appartienne à un certain  $\omega_i \times \nu_i$ . Mais s'il en était autrement, on pourrait construire une suite  $(u_n', v_n')$  d'équilibres associés à des couples  $(f_n', g_n')$  tendant vers  $(f, g)$  telle que:

$$(e) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in I, (u_n', v_n') \notin \omega_i \times \nu_i.$$

Par compacité, la suite  $(u_n', v_n')$  a un point d'adhérence  $(u, v)$ , qui est un équilibre associé à  $(f, g)$ , qui appartient donc à  $\omega_i \times \nu_i$  pour un certain  $i \in I$ , en contradiction avec (e). D'où le résultat.

De la Proposition 6 il ressort que le nombre d'équilibres est constant sur chaque composante connexe de  $\Omega$ , c'est-à-dire qu'on ne peut modifier le nombre d'équilibres en restant dans  $\Omega$ . Il ressort aussi que chacun des équilibre est structurellement stable dans  $\Omega$ .

En conclusion, les hypothèses de transversalité que nous avons introduites permettent de rendre structurellement stables les notions introduites au §1. Mais elles permettent aussi de relier l'index de  $\widetilde{m \times n}$  au nombre de points fixes et donc d'affiner les résultats énoncés à la fin du §1.

**PROPOSITION 7.** *Si  $U$  et  $V$  sont orientables, si  $f$  et  $g$  vérifient (T) et (H'), si  $i$  est l'index de  $\widetilde{m \times n}$ , le jeu présente au moins  $|i|$  équilibres.*

*Démonstration.* Si  $(u, v)$  est un équilibre, les variétés  $M$  et  $N$  s'y coupent transversalement, c'est-à-dire que:

$$\begin{aligned} T_{u,v}(M) + T_{u,v}(N) &= T_{u,v}(U \times V) \\ (I \times T_u n)\mathbb{R}^p + (T_v m \times I)\mathbb{R}^q &= \mathbb{R}^{p+q} \end{aligned}$$

Je dis que  $T_{u,v}(\widetilde{m \times n}) = \widetilde{T_v m \times T_u n}$  ne saurait admettre la valeur propre 1. Si en effet on avait  $e_p \in \mathbb{R}^p$  et  $e_q \in \mathbb{R}^q$  tels que:

$$\begin{aligned} \widetilde{(T_v m \times T_u n)}(e_p, e_q) &= (e_p, e_q) \\ (T_v m)e_q = e_p \quad \text{et} \quad (T_u n)e_p &= e_q \end{aligned}$$

alors on aurait :

$$(I \times T_u n)e_p + (T_v m \times I)(-e_q) = 0$$

et l'opérateur  $(I \times T_u n) + (T_v m \times I)$  de  $\mathbb{R}^{p+q}$  dans lui-même ne serait pas une injection. Or on a vu plus haut que c'est une surjection, d'où contradiction.

Donc l'index local de  $\widetilde{m \times n}$  au point  $(u, v)$  est  $\pm 1$ . L'index global est la somme des index locaux d'où le résultat.

Ainsi, par exemple, si  $U = S^p$  et  $V = S^q$  l'index de  $\widetilde{m \times n}$  sera donné par :

$$\begin{aligned} i &= (-1)^{p+q} \text{ degré}(\widetilde{m \times n}) + 1 && \text{si } p \neq q \\ i &= \text{degré}(m) \cdot \text{degré}(n) + 2(-1)^p + 1 && \text{si } p = q \end{aligned}$$

comme on s'en convainc aisément en appliquant la formule de Künneth.

### §3. SEUILS

Nous allons maintenant apporter une troisième réponse à la question de l'issue naturelle du jeu. La notion d'équilibre menait à une issue symétrique, structurellement stable mais non générique. La notion de seuil, que nous introduisons, conduit à une issue dissymétrique, structurellement stable et générique.

Nous nous plaçons pour l'instant au même degré de généralité qu'au paragraphe 1, c'est à dire que nous supposons simplement que  $U$  et  $V$  sont des espaces topologiques séparés. Soient  $N_+$  et  $N_+^0$  deux parties de  $U \times V$  définies par :

$$\begin{aligned} N_+ &= \{(u, v) \mid v \text{ est un maximum absolu de } g(u, \cdot)\} \\ N_+^0 &= \{(u, v) \mid v \text{ est l'unique maximum absolu de } g(u, \cdot)\}. \end{aligned}$$

Il est clair que  $N_+^0 \subset N_+$  ; on peut dire qu'un point  $(u, v) \in N_+$  appartient à  $N_+^0$  s'il n'existe pas d'autre point de  $N$  dont la projection horizontale soit  $u$ .

*Définition 8.* On dit qu'une situation  $(\bar{u}, \bar{v}) \in U \times V$  est un *seuil* si :

- (a)  $(\bar{u}, \bar{v})$  est un maximum absolu de  $f$  sur  $N_+$ .
- (b)  $(\bar{u}, \bar{v})$  est adhérent à l'intérieur de  $N_+^0$  dans  $N$ .

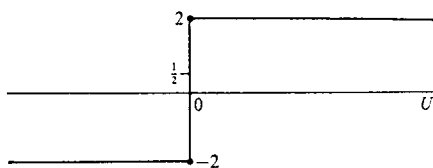
On a là une issue naturelle du jeu, si l'on convient par exemple qu'Urbain connaît le critère de Victor, mais que Victor ignore le critère d'Urbain. Si alors une situation  $(\bar{u}, \bar{v})$  vérifie la condition (a), elle est satisfaisante pour Urbain. En effet, celui-ci, connaissant le critère de son partenaire, peut anticiper sur ses réactions ; si donc il modifie sa propre décision en  $u \in U$ , il tiendra compte de la réaction de Victor, dont la réponse sera une décision  $v \in V$  telle que  $(u, v) \in N_+$  ; il sera donc amené à comparer  $(\bar{u}, \bar{v})$  et  $(u, v)$ , et comme  $f(\bar{u}, \bar{v}) \geq f(u, v)$  à décider qu'il ne gagne pas au changement. En termes d'escrime, on pourrait exprimer les différences de comportement des deux joueurs en disant que Victor tire en "première intention" et Urbain en "deuxième intention".

Mais la condition (a) à elle seule laisse planer une ambiguïté. En effet, si  $(\bar{u}, \bar{v})$  vérifie la condition (a), il peut se faire que  $(\bar{u}, \bar{v}) \notin N_+^0$ . La fonction  $g(\bar{u}, \cdot)$  atteint alors son maximum absolu sur  $V$  en plusieurs points, et comment Urbain peut-il contraindre Victor à choisir parmi ceux-ci précisément  $\bar{v}$ , et de s'y tenir? La réponse est apportée par la condition (b), qui exprime qu'on peut trouver dans  $N_+^0$  une famille  $(u_i, v_i)$ ,  $i \in I$ , tendant vers  $(\bar{u}, \bar{v})$ . A chacun des  $u_i$  la réponse de Victor est  $v_i$ , sans aucune ambiguïté. Si donc Urbain ne joue la décision  $\bar{u}$  qu'au terme de toute la série d'intermédiaires  $u_i$ ,  $i \in I$ , son partenaire Victor sera passé par toutes les décisions intermédiaires  $v_i$ ,  $i \in I$  et sera naturellement amené, par continuité, à jouer  $\bar{v}$ . Si ultérieurement il lui prenait fantaisie de s'en écarter au profit d'un autre maximum absolu  $v$  de  $g(\bar{u}, \cdot)$ , il suffirait à Urbain de jouer un des  $u_i$  pour que la réponse obligée  $v_i$  revienne dans n'importe quel voisinage de  $\bar{v}$  prescrit à l'avance.

Enfin l'hypothèse que l'on peut choisir la suite  $u_i$ ,  $i \in I$ , dans l'intérieur de  $N_+^0$ , répond à une préoccupation de stabilité: si Urbain fait une légère erreur dans la détermination des  $u_i$ , et tombe en fait sur des  $u_i'$  suffisamment voisins, tout ce qui précède reste valable.

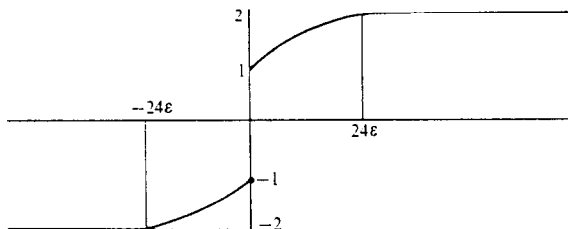
En conclusion, remarquons que cette notion est dissymétrique et favorise Urbain: si le jeu présente simultanément un seuil  $(u_1, v_1)$  et un équilibre  $(u_2, v_2)$ , nécessairement  $(u_2, v_2) \in N_+$ , donc  $f(u_1, v_1) \geq f(u_2, v_2)$  d'après (a).

Eclairons tout ceci par un exemple. Prenons  $U = \mathbb{R}$ ,  $V = [-2, 2]$ ,  $f(u, v) = -(v - \frac{1}{2})^2$ . Si  $g(u, v) = uv$ , on représente aisément  $N_+$  sur une figure; pour obtenir  $N_+^0$  il faut en exclure le segment  $\{0\} \times [-2, 2]$



Le seul point qui satisfasse à (a) est  $(0, \frac{1}{2})$ , mais il ne vérifie pas (b), si bien qu'on ne voit pas comment Urbain peut être amené à privilégier  $v = \frac{1}{2}$  parmi toutes les réponses possible  $(-1 \leq v \leq 1)$  à  $u = 0$ . C'est donc un exemple de modèle ne présentant pas de seuil.

Si on le modifie légèrement, en prenant  $g(u, v) = uv - \varepsilon(v^2 - 1)^2$ , où  $\varepsilon > 0$  est petit, on représente facilement  $N_+$  qui se compose de demi-droites et de parties de la courbe  $u = 4\varepsilon(v^2 - 1)$ .



Pour obtenir  $N_+^0$ , il faut en exclure les deux points  $(0, 1)$  et  $(0, -1)$ . Le seul point qui satisfasse à (a) est  $(0, 1)$ . Il est clair qu'il vérifie (b). Ainsi, à la décision  $u = 0$ , Victor a



deux réponses possibles, une "bonne"  $v = 1$  et une "mauvaise"  $v = -1$ . Pour l'amener à choisir la bonne, Urbain n'a qu'à faire varier ses décisions continûment dans l'intervalle de temps  $[0, T]$  arbitrairement petit, suivant la loi:

$$[0, T] \ni t \mapsto (T - t) \in U.$$

Tant que  $t < T$  Victor répondra par  $1 + (T - t)/8\varepsilon$  et aura donc tendance, par continuité, à répondre par  $+1$  en  $t = T$ . Remarquons d'ailleurs que pour tout  $\varepsilon > 0$ , Urbain peut jouer  $u = \eta > 0$  assez petit pour que l'unique maximum absolu de  $g(u, v)$  soit  $v_\eta > 1$  tel que  $f(\eta, v_\eta) \geq f(0, 1) - \varepsilon$ . Si donc Victor s'obstine à choisir en  $u = 0$  la "mauvaise" réponse  $v = -1$ , de telle sorte qu'Urbain ne peut réaliser son gain maximum de  $-\frac{1}{4}$ , du moins reste-t-il à ce dernier la possibilité de réaliser un gain  $-\frac{1}{4} - \varepsilon$ , arbitrairement voisin du maximum.

§4. STABILITE STRUCTURELLE ET GENERICITE

Nous allons maintenant préciser et étudier la notion de seuil dans un cadre de géométrie différentielle. Dorénavant,  $U$  et  $V$  seront des variétés  $C^\infty$  compactes, de dimensions respectives  $p$  et  $q$ ,  $f$  et  $g$  seront des fonctions numériques  $C^\infty$  sur  $U \times V$ .

Il est nécessaire ici de rappeler quelques résultats de stratification de J. Mather ([4]; cf. aussi l'exposé d'A. Chenciner, [2]). Pour tout entier  $k \geq 2$ , il existe un sous-fibré  $\sum^k(V)$  de  $J^k(V)$  et une stratification de Whitney de  $J^k(V) - \sum^k(V)$  par des sous-fibrés  $S_i^k(V)$  tels que:

- (a) La fibre de  $\sum^k(V)$  est un sous-ensemble algébrique fermé de la fibre de  $J^k(V)$ .
- (b) La codimension de  $\sum^k(V)$  dans  $J^k(V)$  tend vers l'infini avec  $k$ .
- (c) Les strates  $S_i^k(V)$  sont en nombre fini  $0 \leq i \leq r$ . Ce sont des sous-variétés  $C^\infty$  de  $J^k(V)$ , de codimensions respectives  $i$ .

On peut interpréter géométriquement les premières strates. Dire que  $J^k\varphi(v) \in S_0^k(V)$  signifie que le point  $v \in V$  n'est pas un point critique de la fonction  $\varphi \in C^\infty(V)$ . Toutes les autres strates sont donc contenues dans la sous-variété de  $J^k(V)$  d'équation  $J^1\varphi(v) = 0$ . Dire que  $J^k\varphi(v) \in S_1^k(V)$  signifie que la fonction  $\varphi$  présente en  $v \in V$  un point critique du type de Morse (quadratique non dégénéré).

Fixons  $k$  de façon que  $\text{codim } \sum^k(V) > p + q$ , ce qui est possible d'après (b), et détermine  $r$  d'après (c). Notre hypothèse sur  $g$  s'énonce alors ainsi:

(T') l'application  $(u, v) \mapsto J_v^k g(u, v)$  de  $U \times V$  dans  $J^k(V)$  est transversale à  $\sum^k(V)$ , et l'application:  $(u, v) \mapsto (u, J_v^k g(u, v))$  de  $U \times V$  dans  $U \times J^k(V)$  est multitransversale aux  $U \times S_i^k(V)$ ,  $1 \leq i \leq r$ .

La transversalité de  $J_v^k g$  à  $\sum^k(V)$ , compte tenu des dimensions, exprime simplement que  $J_v^k(g) \cap \sum^k(V) = \emptyset$ . La multitransversalité de  $(u, v) \mapsto (u, J_v^k g(u, v))$  aux  $U \times S_i^k(V)$  exprime la propriété suivante: si en un point  $\bar{u} \in U$  il existe  $a$  points deux à deux distincts  $v_m \in V$  tels que:

$$\begin{aligned} T_v g(\bar{u}, v_1) &= \dots = T_v g(\bar{u}, v_a) = 0 \\ g(\bar{u}, v_1) &= \dots = g(\bar{u}, v_a) = \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

si  $\sigma_m$  désigne le germe en  $J_v^k g(\bar{u}, v_m)$  de la strate contenant ce point, et si  $\gamma_m$  désigne le germe en  $(\bar{u}, v_m)$  de l'application  $(u, v) \mapsto (u, g(u, v))$  restreinte à  $(J_v^k g)^{-1}(\sigma_m)$ , alors les germes  $\gamma_1, \dots, \gamma_a$  se coupent en position générale en  $(\bar{u}, \alpha)$  dans  $U \times \mathbb{R}$ . Il revient au même de dire que la germe produit  $(\gamma_1, \dots, \gamma_a)$  de  $\prod_{m=1}^a (J_v^k g)^{-1}(\sigma_m)$  dans  $(U \times \mathbb{R})^a$  est transversale en  $(\bar{u}, \alpha)$  à la diagonale de  $(U \times \mathbb{R})^a$ . En particulier, compte tenu des dimensions, on en déduit que  $a \leq p + 1$ : l'hypothèse de multitransversalité implique que la fonction  $g(u, \cdot)$  présente au plus  $(p + 1)$  points critiques distincts associés à une même valeur critique. D'où immédiatement, par application des théorèmes de transversalité de R. Thom, la:

**PROPOSITION 8.** *L'ensemble des fonctions  $g$  vérifiant l'hypothèse  $(T')$  constitue un ouvert dense de  $C^\infty(U \times V)$ .*

L'hypothèse  $(T')$ , comme l'hypothèse  $(T)$ , implique que  $J_v^1 g$  est transversale à  $J_0^1(V)$ , et donc que  $N$ , définie par l'équation  $J_v^1 g(u, v) = 0$ , est une sous-variété de  $U \times V$ . Mais elle permet en outre de définir sur  $N$  une stratification de Whitney, de la manière suivante. Soit  $(u, v) \in N$ , avec  $g(u, v) = \alpha$ ; on considère tous les  $(u, v') \in N$  tels que  $g(u, v') = \alpha$ . Ils sont en nombre fini  $a$ , compris entre 1 et  $p + 1$ : on dira que la valeur critique  $\alpha$  est  $a$ -uple. On les écrit sous la forme  $(u, v_m)$ ,  $1 \leq m \leq a$ , en commençant par  $(u, v_1)$  (ainsi  $v_1 = v$ ). En reprenant les notations ci-dessus, on définit alors le germe en  $(u, v)$  de la strate contenant ce point comme l'image réciproque de  $\bigcap_{m=1}^a \gamma_m$  dans  $(J_v^k g)^{-1}(\sigma_1)$  par  $\gamma_1$ , ou, ce qui revient au même, comme la projection sur  $(J_v^k g)^{-1}(\sigma_1)$  de l'image réciproque de la diagonale de  $(U \times \mathbb{R})^a$  par  $(\gamma_1, \dots, \gamma_a)$ .

Chaque strate est une sous-variété de  $N$  possédant un nombre finie de composantes connexes, ses cellules. La strate de codimension zéro est un ouvert dense de  $N$ ; dire que le point  $(u, v) \in N$  lui appartient signifie que la fonction  $g(u, \cdot)$  présente en  $v$  un point critique du type de Morse,  $g(u, v)$  étant valeur critique simple. La strate de codimension un rassemble deux types de points:

(a) les points  $(u, v) \in N$  tels que la fonction  $g(u, \cdot)$  admette  $g(u, v)$  comme valeur critique double,  $v$  et l'autre point critique étant du type de Morse. Ce sont les points de croisement ou catastrophes de conflit dans la terminologie de R. Thom.

(b) Les points  $(u, v) \in N$  tels que la fonction  $g(u, \cdot)$  présente en  $v$  un point critique du type:

$$-x_1^2 - \dots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_{q-1}^2 + x_q^3,$$

donc non de Morse, la valeur critique  $g(u, v)$  étant simple. Ce sont les points de naissance ou catastrophes de bifurcation dans la terminologie de R. Thom.

Rappelons la définition des ensembles  $N_+$  et  $N_+^0$ , introduits au §3, et définissons  $N_+^1$ :

$$N_+ = \{(u, v) \mid v \text{ est un maximum absolu de } g(u, \cdot)\}$$

$$N_+^0 = \{(u, v) \mid v \text{ est l'unique maximum absolu de } g(u, \cdot)\}$$

$$N_+^1 = \{(u, v) \mid v \text{ est l'unique maximum absolu de } g(u, \cdot) \text{ et c'est un point critique du type de Morse}\}$$

Il est clair que  $N_+^1 \subset N_+^0 \subset N_+ \subset N$ . On peut aussi définir  $N_+^1$  comme l'intersection de  $N_+^0$  avec la strate de codimension zéro de  $N$ . Comme l'une et l'autre sont des ouverts de  $N$ , on en déduit que  $N_+^1$  est contenu dans l'intérieur de  $N_+$  relativement à  $N$ . Nous allons montrer que  $\overline{N_+^0} = N_+$  et même que  $\overline{N_+^1} = N_+$ . C'est ce qui fait l'intérêt de l'hypothèse (T'), en nous permettant d'étudier commodément les seuils.

PROPOSITION 9. *Sous l'hypothèse (T'):*

$$N_+ = \overline{N_+^1}.$$

*Démonstration.* De la continuité de  $g$  et de la compacité de  $V$ , il ressort immédiatement que  $N_+$  est fermé dans  $U \times V$ . Pour la suite de la démonstration il faut faire usage de l'hypothèse (T') et de la stratification qui s'en déduit.

Nous supposons d'abord que  $(\bar{u}, \bar{v}) \in N_+$  est tel que tous les points critiques de  $g(\bar{u}, \cdot)$  soient du type de Morse, c'est-à-dire que l'application  $v \mapsto J_v^1 g(\bar{u}, v)$  soit transversale à  $J_0^1(V)$ . On sait que pour  $u$  assez voisin de  $\bar{u}$ , l'application  $v \mapsto J_v^1 g(u, v)$  reste transversale à  $J_0^1(V)$ . Il existe donc un ouvert  $O$  de  $U$  contenant  $\bar{u}$ , tel que pour  $u \in O$ , la fonction  $g(u, \cdot)$  présente un nombre fixe de points critiques, tous du type de Morse et en dépendance  $C^\infty$  de  $u$ . Soit  $a$  le nombre de maxima absolus de  $g(\bar{u}, \cdot)$ . On les notera  $v_m \in V$ , en s'arrangeant pour que  $v_1 = \bar{v}$ , et  $\alpha \in \mathbb{R}$  leur commune valeur. Si  $a = 1$ , le point  $(\bar{u}, \bar{v})$  appartient à  $N_+^1$ . Sinon, nous introduisons dans  $(U \times \mathbb{R})^a$  sa diagonale  $\Delta$ , et la sous-variété  $P_1$  définie par:

$$P_1 = \left\{ (u_i, \alpha_i), 1 \leq i \leq a \mid \begin{array}{l} u_1 = u_2 = \dots = u_a \\ \alpha_1 > \alpha_2, \dots, \alpha_1 > \alpha_a \end{array} \right\}.$$

Il est clair que  $\Delta \subset \overline{P_1}$  et que toute sous-variété transversale à  $\Delta$  sera transversale à  $P_1$  au voisinage de  $\Delta$ . Mais l'hypothèse (T'), dans ce cas particulier, exprime justement que l'application:

$$(u_i, v_i) \mapsto (u_i, g(u_i, v_i)), \quad 1 \leq i \leq a$$

de  $N^a$  dans  $(U \times \mathbb{R})^a$  est transversale à  $\Delta$  en  $(\bar{u}, \alpha)^a$ . On a donc la transversalité à  $P_1$  au voisinage de  $(\bar{u}, \alpha)^a$ . Il sera alors possible de trouver dans  $U$  une suite  $u_n, n \in \mathbb{N}$ , et dans  $V$  suites  $v_{mn}, n \in \mathbb{N}, 1 \leq m \leq a$ , telles que:

- (a)  $(u_n, v_{mn}) \rightarrow (\bar{u}, v_m)$  dans  $N$ .
- (b)  $u_n \in O, \forall n \in \mathbb{N}$ .
- (c)  $g(u_n, v_{1n}) > g(u_n, v_{mn})$  pour  $m \neq 1, n \in \mathbb{N}$ .

On en déduit que  $v_{1n}$  est l'unique maximum absolu de  $g(u_n, \cdot)$ , et donc que  $(u_n, v_{1n}) \in N_+^1$ , d'où le résultat dans ce cas. On remarquera comment l'hypothèse de multitransversalité permet de déployer un maximum multiple d'ordre  $a$  en  $a$  maxima simples.

Revenons au cas général, où  $(\bar{u}, \bar{v})$  est un point quelconque de  $N_+$ . On sait que  $(\bar{u}, \bar{v})$  est adhérent à une cellule de codimension zéro dans  $N$ , se projetant sur  $U$  suivant un ouvert. Mais on sait aussi que l'ensemble des  $u$  pour lesquels l'application  $v \mapsto J_v^1 g(u, v)$  est transversale à  $J_0^1(V)$  est un ouvert dense de  $U$ . On peut donc trouver une suite  $(u_n, v_n)$  de  $N$  tendant vers  $(\bar{u}, \bar{v})$  et telle que tous les points critiques de  $g(u_n, \cdot)$  soient du type de Morse. D'où le résultat.

On a ainsi montré que le graphe  $N_{\perp}$  de la multi-application  $u \mapsto \{(u, v) \mid v \text{ maximise } g(u, \cdot)\}$  se décompose comme l'adhérence d'un nombre fini de sous-variétés ouvertes de  $N$  telles que la restriction à chacune d'elles de la projection horizontale soit un difféomorphisme. D'où aussitôt la :

**PROPOSITION 10.** *Si  $g$  satisfait à l'hypothèse  $(T')$  et si  $f$  est continue, le jeu associé au couple  $(f, g)$  possède au moins un seuil.*

En effet  $N_{\perp}$  est compact et tout maximum de  $f$  sur  $N_{\perp}$  est un seuil. Ainsi donc, pour toutes les fonctions  $f$  continues sur  $U \times V$ , et pour des fonctions  $g$  constituant un ouvert dense de  $C^{\infty}(U \times V)$ , le modèle présente un seuil, ce qui répond à la question de la généricité. La question de la stabilité structurelle est plus complètement élucidée par la proposition suivante :

**PROPOSITION 11.** *Si  $g$  satisfait à  $(T')$ , il existe un ouvert dense  $O$  de  $C^2(U \times V)$  et une application de classe  $C^1$   $s : O \rightarrow N$  telle que  $s(f)$  soit l'unique seuil du jeu associé au couple  $(f, g)$ .*

*Démonstration.* Définissons  $O$  comme l'ensemble des fonctions de  $C^2(U \times V)$  au voisinage desquelles le seuil est unique, en dépendance  $C^1$  de  $f$ . Il en ressort immédiatement que c'est un ouvert; reste simplement à montrer qu'il est dense.

Pour cela, nous partons d'un autre ouvert dense  $O'$  de  $C^2(U \times V)$ , défini, à l'aide de la stratification de  $N$  associée à  $g$ , comme l'ensemble des  $f \in C^2(U \times V)$  tels que :

— pour toute strate  $S$  de  $N$ , la restriction de  $f$  à  $S$  n'a que des points critiques du type de Morse.

— toutes les valeurs critiques des restrictions de  $f$  à  $S$ , pour toutes les strates  $S$  de  $N$ , sont distinctes.

Si  $f \in O'$ , le jeu associé au couple  $(f, g)$  possède un seuil unique  $s(f)$ . Par un argument de compacité, on montre aisément que l'application  $s$  est continue sur  $O'$ .

Soit donc  $\bar{f} \in O'$ , et  $S$  la cellule de  $s(\bar{f})$  dans  $N$ . Deux cas se présentent :

*Cas (i)* Il existe un voisinage  $\Omega$  de  $\bar{f}$  dans  $O'$  tel que  $s(\Omega) \subset S$ . Dans ces conditions, pour tout  $f$  de  $\Omega$ ,  $s(f)$  est l'unique maximum de  $f$  sur  $S$ . La propriété de transversalité traduisant le fait que c'est un point de Morse implique que  $s$  est de classe  $C^1$  sur  $\Omega$ .

*Cas (ii).* On peut trouver dans  $N$  une cellule  $S' \neq S$  et dans  $O'$  une suite  $f_n \rightarrow \bar{f}$  telle que  $s(f_n) \in S', \forall n \in \mathbb{N}$ . Mais on sait également que  $s(f_n) \rightarrow s(\bar{f}) \in S$ , donc que  $S \cap \bar{S}' \neq \emptyset$ . D'après les propriétés usuelles des stratifications, ceci implique que  $S \subset \bar{S}'$  et  $\text{codim } S > \text{codim } S'$ .

Si l'on est dans le cas (i), alors  $\bar{f} \in O$ . Si l'on est dans le cas (ii), on se donne  $\varepsilon > 0$ , et on choisit  $f' \in O'$  tel que  $s(f') \in S'$  et  $\|f' - \bar{f}\| \leq \varepsilon/2$  dans  $C^2(U \times V)$ . Puis on applique l'alternative (i)–(ii) à la fonction  $f'$ . Dans le cas (i),  $f' \in O$ ; dans le cas (ii) on peut trouver  $f'' \in O'$  tel que  $s(f'')$  appartienne à une cellule  $S''$  avec  $\text{codim } S'' < \text{codim } S'$ , et que

$$\|f' - f''\| \leq \varepsilon/4$$

dans  $C^2(U \times V)$ . Et ainsi de suite. A force de descendre les codimensions on finit par s'arrêter, si bien qu'on aura trouvé une fonction  $\tilde{f} \in O$  telle que  $\|\tilde{f} - \tilde{f}'\| \leq \varepsilon$  dans  $C^2(U \times V)$ . Comme  $\varepsilon > 0$  est quelconque, ceci prouve que  $\tilde{f} \in \bar{O}$ . Donc  $\bar{O} \supset \bar{O}' = C^2(U \times V)$ .

Terminons par quelques remarques sur la stratification de  $N$ . Tout d'abord, les cellules de la strate de codimension un contiennent, les unes uniquement des points de naissance, les autres uniquement des points de croisement. L'allure de la fonction  $g(u, \cdot)$  au voisinage d'un point de naissance montre aisément que celui-ci ne peut être un maximum local, a fortiori global. Ainsi donc  $N_+$  ne contient que des cellules de croisement.

Suivant la fonction  $f$ , le seuil pourra être atteint sur la strate de codimension zéro; ou sur la strate de codimension un, auquel cas on observera une catastrophe de conflit et non une catastrophe de bifurcation; ou sur une strate de codimension plus élevée. Tous ces cas peuvent se présenter de manière structurellement stable, comme on peut s'en convaincre en examinant par exemple le "papillon" de René Thom.

La stratification de  $N$  a été construite à partir de la stratification de  $J^k(V)$ . On peut d'une manière analogue construire à partir de celle-ci une stratification de  $C^\infty(V)$ , puis en déduire une stratification de  $U$  par l'intermédiaire de l'application  $u \rightarrow g(u, \cdot)$  de  $U$  dans  $C(V)$ . On aura ainsi montré que la stratification de  $N$  se projette en une stratification de  $U$ .

Il peut être utile pour des applications au contrôle optimal et aux jeux différentiels de remarquer que la Proposition 9 donne une forme générique de la multi-application qui, à  $u \in U$ , associe l'ensemble des points  $v \in V$  où  $g(u, \cdot)$  atteint son maximum. Plus précisément, introduisons la définition suivante:

*Définition 12.* Une multi-application  $\Gamma$  de  $U$  dans  $V$  sera dite *excellente* si:

(a)  $\Gamma(u)$  comporte au plus  $(\dim U + 1)$  points;

(b) il existe une stratification de Whitney de  $U$  dont les cellules de codimension zéro seront  $U_1, \dots, U_r$  et  $r$  applications  $\gamma_i : U_i \rightarrow V$ , continues sur  $\bar{U}_i$  et de classe  $C^\infty$  sur  $U_i$ , telles que:

$$\text{graphe}(\Gamma) = \bigcup_{i=1}^r \text{graphe}(\gamma_i).$$

A toute fonction réelle  $g$  sur  $U \times V$  on peut associer une multi-application  $\Gamma$  de  $U$  dans  $V$  définie par:

$$\forall u \in U, \Gamma(u) = \{v \in V \mid g(u, v) \geq g(u, v') \forall v' \in V\}.$$

On a alors le résultat de généralité:

**PROPOSITION 9 BIS.** *Si  $g \in C^\infty(U \times V)$  vérifie (T'), la multi-application  $\Gamma$  associée est excellente.*

Enfin, nous aurions pu nous intéresser aux maxima locaux plutôt qu'aux maxima globaux. Cela revient à attribuer une certaine "myopie" à Urbain et Victor, tout au moins à ce dernier. Il nous aurait alors fallu considérer, à la place de  $N_+$ , l'ensemble  $N'_+$  défini par:

$N_{\pm}' = \{(u,v) \mid v \text{ est un maximum local de } g(u, \cdot)\}$  ou plutôt son adhérence. Le centre d'intérêt de l'étude se serait déplacé, avec les seuils, des catastrophes de conflit aux catastrophes de bifurcation.

#### BIBLIOGRAPHIE

1. R. ABRAHAM et J. ROBBIN: *Transversal Mappings and Flows*. Benjamin, New York (1967).
2. A. CHENCINER: Travaux de Thom et Mather sur la stabilité topologique. *Séminaire Bourbaki*, No. 424 (Février 1973).
3. H. LEVINE: Singularities of differentiable mappings, in *Proceedings of Liverpool Singularities*, Vol. 1. Lecture Notes in Mathematics, No. 192. Springer, Berlin (1971).
4. J. MATHER: Stratifications and mappings, in *Dynamical Systems* (Edited by M. PEIXOTO). Academic Press, New York (1973).
5. R. THOM: *Stabilité Structurelle et Morphogenèse*. Benjamin, New York (1972).
6. V. PARETO: *Cours d'Économie Politique*. Lausanne (1896–1897).
7. S. SMALE: Global analysis and economics, in *Dynamical Systems* (Edited by M. PEIXOTO). Academic Press, New York (1973).
8. J. VON NEUMANN and O. MORGENSTERN: *Theory of Games and Economic Behaviour*. Princeton University Press (1944).

*Université Paris-9 Dauphine*  
*U.E.R. Mathématiques de la Décision*  
 75775 Paris, Cedex 16