De Frank Ramsey à René Thom : l'optimisaion en quesion

Ivar Ekeland

CEREMADE, Université Paris-Dauphine

2023

Le problème mathématique

$$\max \int_0^\infty R(t)\, u(c_t)\, dt \tag{1}$$

$$\frac{dk}{dt} = f(k_t) - c_t \tag{2}$$

$$c_t \geq 0,\, k_t \geq 0, :\, k_0 \text{ prescrit} \tag{3}$$

Le facteur d'actualisation $R(t)$ est décroissant, avec $R(0) = 1$ et $R(t) \to 0$ quand $t \to \infty$. On prendra :

$$u(c) = \frac{1}{\alpha} c^\alpha, \qquad \alpha < 1$$

$$f(k) = \frac{1}{\beta} k^\beta, \qquad 0 < \beta < 1$$

C'est un problème de contrôle optimal où l'état est k et le contrôle c. Il se reformule comme un problème classique de calcul des variations, en horizon infini

$$\max_{k(0)=k_0} \int_0^\infty R(t)\, u\left(f(k) - \frac{dk}{dt}\right) dt$$

L'interprétation économique

On a une économie industrielle menée par un dictateur bienveillant entre $t = 0$ et ∞. Il y a un seul bien, en quantité totale k_t, qui peut soit être consommé immédiatement, soit être utilisé pour en produire davantage. La quantité produite entre t et $t + dt$ est $f(k_t)\,dt$, et le dictateur doit la répartir entre consommation et investissement. Cela donne :

$$\frac{dk}{dt} = f(k_t) - c_t$$

Il y a un seul consommateur, dit représentatif. Consommer c entre $t > 0$ et $t + dt$ lui fournit une utilité $R(t)\,u(c)\,dt$ où $0 \leq R(t) \leq 1$ est le facteur d'actualisation :

$$R(0) = 1, \quad R'(t) \leq 0$$

Le dictateur veut maximiser le bien-être du consommateur, défini comme

$$\int_0^\infty R(t)\,u(c_t)\,dt$$

Quel facteur d'actualisation ?

Le premier à avoir proposé ce type de modèle est Frank Ramsey (1903-30) sous l'impulsion de John Maynard Keynes, dans un article de 1928 : *A Mathematical Theory of Saving*, Il diffère de ses successeurs sur deux points fondamentaux :

- il suppose qu'il existe un point de saturation (bliss point), un niveau de consommation $\bar{c}$ au-delà duquel l'utilité n'augmente plus
- il préconise $R(t) = 1$: *One point should perhaps be emphasized more particularly : it is assumed that we do not discount later enjoyments in comparison with earlier ones, a practice which is ethically indefensible and arises merely from the weakness of the imagination*

Ce faisant il soulève le problème de l'équité intergénérationnelle : le facteur d'actualisation n'a pas la même signification suivant qu'il s'agit d'un individu ou d'une société

Quel facteur d'actualisation ?

Paul Samuelson, dans un article de 1937 : *A Note on Measurement of Utility*, propose de prendre $R(t) = e^{-rt}$ où $r > 0$ est une constante. Mais il entoure sa proposition de précautions :

- comme on compare des utilités et non des sommes d'argent, il ne faut pas prendre r pour un taux d'intérêt : c'est un taux de préférence pour le présent, de nature psychologique
- il se restreint strictement aux choix individuel et met en garde contre la tentation d'appliquer le modèle aux choix collectifs : *In conclusion, any connection between utility as discussed here and any welfare concept is disallowed. The idea that the results of such a statistical investigation could have any influence upon ethical judgments of policy is one which deserves the impatience of modern economics*
- les mises en garde de Samuelson ont été oubliés, et la maximisation de l'intégrale (1) avec le choix $R(t) = e^{-rt}$ constitue aujourd'hui le fondement de la théorie macroéconomique de la croissance : Solow (1956), Cass (1965), Koopmans (1965), Nordhaus (2018)

Le modèle unitaire

$$\max_{c \in \mathcal{A}(k_0)} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} u(c_t) dt$$

$$\mathcal{A}(k_0) = \left\{ c \;\middle|\; \begin{array}{c} c = \frac{dk}{dt} - \frac{1}{\beta} k_t^{\beta} \\ c_t \geq 0, \quad k_t \geq 0 \\ k(0) = k_0 \end{array} \right\}$$

En utilisant l'équation d 'Euler-Lagrange et en tournant autour de la condition à l'infini, on obtient un résultat classique :

Théorème

Le problème admet une solution optimale unique, et quel que soit le point de départ k_0, la solution converge quand $t \to \infty$ vers le point k_∞ défini par $k_\infty^{\beta-1} = \delta$

Le modèle est classiquement interprété comme décrivant la croissance d 'une économie industrielle. C'est aussi le modèle qui a valu un prix Nobel à Nordhaus

Les facteurs d'actualisation sont-ils vraiment exponentiels ?

- Pour les *individus*, les expériences psychologiques mettent en évidence des taux d'actualisation décroissants : les individus accordent beaucoup plus d'importance entre demain et aprés-demain qu'entre la 1000ème et la 1001ème nuit

$$R(t) = \frac{1}{1+at}, \quad r(t) = \frac{1}{t}\ln(1+at)$$

- Même si les individus ont des taux d'actualisation constants, ils n'ont aucune raison d'être égaux. Pour une *collectivité* de N, ayant les taux $r_n, 1 \leq n \leq N$, il est raisonnable de prendre une moyenne

$$R_N(t) = \sum \lambda_n e^{-r_n t}$$

- Dans le cas du modÃšle de Ramsey, des considerations d'equite intergenerationnelles (IE-Sumaila) nous conduisent a prendre :

$$R(t) = \lambda \exp(-\delta t) + (1-\lambda)\exp(-\rho t)$$

Le modèle général

$R(t)$ est décroissant, avec $R(0) = 1$ et $R(t) \to 0$ quand $t \to \infty$.
On cherche

$$\max_{c \in \mathcal{A}(k_0)} \int_0^{\infty} R(t) u(c_t) dt$$

$$\mathcal{A}(k_0) = \left\{ c \;\middle|\; \begin{array}{c} c = \frac{dk}{dt} - \frac{1}{\beta} k_t^{\beta} \\ c_t \geq 0, \quad k_t \geq 0 \\ k(0) = k_0 \end{array} \right\}$$

On a toujours existence et unicité de la solution optimale, ainsi que l'équation d'Euler-Lagrange.

Une remarque importante

Si $\bar{c}(t)$ est optimale :

$$\int_0^\infty R(t)\,\bar{c}_t^\alpha dt \geq \int_0^\infty R(t)\,c_t^\alpha dt \quad \forall c \in \mathcal{A}(k_0)$$

Alors elle reste optimale au-dela de T

$$\forall T,\ \int_T^\infty R(t)\,\bar{c}_t^\alpha dt \geq \int_T^\infty R(t)\,c_t^\alpha dt \quad \forall c \in \mathcal{A}(k_T)$$

Si par exemple $\int_T^\infty R(t)\,\bar{c}_t^\alpha dt < \int_T^\infty R(t)\,\tilde{c}_t^\alpha dt$, partant du meme capital initial $k(T)$, alors on remplacerait $\bar{c}$ par $\tilde{c}$ pour $t \geq T$

Cohérence et incohérence temporelle

- à l'instant $t = 0$, le décideur doit résoudre le problème

$$\max_c I_0(c) = \int_0^{\infty} R(t)\, c_t^{\alpha} dt$$

- à l'instant $t = T$, le décideur doit résoudre le problème

$$\max_c I_T(c) = \int_T^{\infty} R(t - T)\, c_t^{\alpha} dt$$

- si $R(t) = e^{-\delta t}$, alors $I_T(c) = e^{\delta T} \int_T^{\infty} e^{-\delta t} c_t^{\alpha} dt$, et d 'après la remarque précédente, si $\bar{c}$ est optimal pour le premier, il est optimal pour le second
- si $R(t)$ n'est pas une exponentielle, ce n'est plus vrai. La solution présumée optimale á l 'instant $t = 0$ se révèle ne plus l 'être á l 'instant $t = T$ oú il s'agit de l'appliquer

Retour à Samuelson

- Pour un facteur d'actualisation exponentiel :
  - *Contemplation of our particular equations will reveal that the results are unchanged even if the individual always discounts from the existing point of time rather than from the beginning of the period. He will still make at each instant the same decision with respect to expenditure as he would have if, at the beginning of the period, he were to decide on the expenditure for the whole period*
- Pour un facteur d'actualisation général
  - Optimiser en $t = 0$ ne sert à rien
  - Optimiser au fil de l'eau (stratégie myope) pas davantage
  - Que faire ?

Solutions d'équilibre

On considère des stratégies markoviennes $c = \sigma(k)$

$$\frac{dk}{dt} = f(k) - \sigma(k)$$

Le planificateur se fixe une strategie σ. A l'instant T il dispose du capital k_T, et réévalue sa stratégie dans le futur immédiat (le seul qu 'il puisse contrôler) soit $[T,\ T+\varepsilon]$, $\varepsilon \to 0$. Il a le choix entre

- appliquer σ, donc consommer $c = \sigma(k_T)$. L'utilité résultante est :

$$I_T = \int_T^{\infty} R(t-T)\,\sigma(k_t)^{\alpha}\,dt$$

- consommer $c \neq \sigma(k_T)$. Notons $I_T(\varepsilon, c)$ l 'utilité résultante sachant que, pour $t \geq T + \varepsilon$, il appliquera la stratégie σ.

La stratégie σ est un équilibre si :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[I_0 - I_T(\varepsilon, c)\right] \leq 0 \text{ pour tout } c \text{ et } T$$

Du point de vue de la théorie des jeux c'est un équilibre de Nash : les déviations unilatérales sont pénalisées

La fonction valeur

Si une stratégie d'équilibre $\sigma(k)$ existe, on lui associe la fonction

$$v(k) = \int_0^\infty R(t)\, u(c_t)\, dt$$

où $c_t = \sigma(k_t)$ est le profil de consommation associé à σ en partant de k à l 'instant 0 :

$$\frac{dk_t}{dt} = f(k_t) - \sigma(k_t), \quad k(0) = k$$

On peut récupérer σ à partir de v par la formule $v'(k) = u'(\sigma(k))$. En introduisant la fonction duale

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x) &= \max_c \{u(c) - xc\} \\ u(c) &= \min_x \{\tilde{u}(x) + xc\} \end{aligned}$$

cela donne $\sigma(k) = -\tilde{u}' \circ v'(k)$. Si $u(c) = \frac{1}{\alpha} c^\alpha$ on a $\tilde{u}(x) = \frac{1}{\beta} x^\beta$ avec $\alpha^{-1} + \beta^{-1} = 1$

L'equation de Hamilton-Jacobi

La fonction $v(k)$ satisfait l'équation

$$\rho(k)v(k) = \sup_c \left[u(c) + v'(k)(f(k) - c)\right] \tag{4}$$

$$\rho(k) = -\frac{\int_0^\infty R'(t)\,u(c_t)\,dt}{\int_0^\infty R(t)\,u(c_t)\,dt}$$

où c_t est la consommation obtenue en appliquant la stratégie σ en partant de k à l'instant 0.
Dans le cas où $R(t) = \exp(-rt)$ on retrouve l'équation HJB habituelle. Dans le cas général, c 'est une équation fonctionnelle sur laquelle on sait peu de choses. Nous allons expliciter le cas biexponentiel :

$$R(t) = \lambda \exp(-\delta t) + (1 - \lambda)\exp(-\rho t)$$

Le cas biexponentiel

Théorème

Supposons qu'il existe un point k_∞ *et deux fonctions* v *et* w, *de classe* C^2, *définies sur* $[0,\ \infty)$, *telles que :*

$$\begin{aligned}
\tilde{u}\left(v'\right) + fv' &= \left(\frac{\delta+\rho}{2}\right) v + \left(\frac{\delta-\rho}{2}\right) w \\
A\left(v'\right) w' + B\left(v'\right) &= \left(\frac{\delta-\rho}{2}\right) v + \left(\frac{\delta+\rho}{2}\right) w \\
v\left(k_\infty\right) &= \left(\frac{\lambda}{\delta} + \frac{1-\lambda}{\rho}\right) u\left(f\left(k_\infty\right)\right) \\
w\left(k_\infty\right) &= \left(\frac{\lambda}{\delta} - \frac{1-\lambda}{\rho}\right) u\left(f\left(k_\infty\right)\right)
\end{aligned}$$

avec $A\left(v'\right) = \left(\tilde{u}'\left(v'\right) + f\right)$ *et* $B\left(v'\right) = \left(2\lambda - 1\right)\left(\tilde{u}\left(v'\right) - v'\tilde{u}'\left(v'\right)\right)$.
Si la stratégie $\sigma = -u'\left(v'\right)$ *converge vers* k_∞ *quand* $t \to \infty$, *c'est une stratége d''equilibre*

C'est un systéme de deux EDO *sous forme implicite* (René Thom)

L'espace de phase

C'est l'espace des (k, v, w). Si on se donne (k, v, w), on trouve (v', w') en résolvant lla première équation

$$\tilde{u}\left(v'\right) + f\left(k\right) v' = \left(\frac{\delta + \rho}{2}\right) v + \left(\frac{\delta - \rho}{2}\right) w$$

qui donne v', et en reportant dans la seconde, qui donne w'. On a :

$$\min_{v'} \left\{\tilde{u}\left(v'\right) + f\left(k\right) v'\right\} = u\left(f\left(k\right)\right)$$

- Si $\left(\frac{\delta+\rho}{2}\right) v + \left(\frac{\delta-\rho}{2}\right) w < u\left(f\left(k\right)\right)$ pas de solution
- Si $\left(\frac{\delta+\rho}{2}\right) v + \left(\frac{\delta-\rho}{2}\right) w = u\left(f\left(k\right)\right)$ une seule solution
- Si $\left(\frac{\delta+\rho}{2}\right) v + \left(\frac{\delta-\rho}{2}\right) w > u\left(f\left(k\right)\right)$ deux solutions

La surface S d'équation $\left(\frac{\delta+\rho}{2}\right) v + \left(\frac{\delta-\rho}{2}\right) w = u\left(f\left(k\right)\right)$ sépare l 'espace de phase en deux régions, et la condition aux limites est exactement sur S.

Le cas exponentiel

Si $\delta = \rho$, c'est-à-dire si $R(t) = e^{-\delta t}$, on a affaire à une seule équation

$$\begin{aligned} \tilde{u}\left(v'\right) + fv' &= \delta v \\ v\left(k_\infty\right) &= \frac{1}{\delta} u\left(f\left(k_\infty\right)\right) \end{aligned}$$

L 'espace de phases est de dimension 2 avec une frontière de séparation S d'équation

$$u\left(f\left(k\right)\right) = \rho v$$

On cherche une solution $v : [0, \ \infty] \to R$ de classe C^2
On pose $dv = pdk$ et on dérive l'équation pour obtenir un système de Pfaff

$$\left(\tilde{u}'\left(p\right) + f\left(k\right)\right) dp = p\left(\delta - f'\left(k\right)\right) dk$$

Résolution locale ; points ordinaires

- A l'intérieur du domaine permis : $\rho v > u\left(f\left(k\right)\right)$. L'équation $\tilde{u}\left(p\right) + fp = \delta v$ a deux solutions distinctes p_1 et p_2, et autour de chacune d'elles ont résout le problème de Cauchy :

$$\frac{dp}{dk} = \frac{p\left(\delta - f'\left(k\right)\right)}{\tilde{u}'\left(p\right) + f\left(k\right)}$$

- Sur la frontiére : $\rho v > u\left(f\left(k\right)\right), \delta \neq f'\left(k\right)$. L'équation $\tilde{u}\left(p\right) + fp = \delta v$ a une seule solution p_0, et autour d'elle ont résout le problème de Cauchy :

$$\frac{dk}{dp} = \frac{\tilde{u}'\left(p\right) + f\left(k\right)}{p\left(\delta - f'\left(k\right)\right)}$$

  Aucune de ces solutions ne s'etend à $[0,\ \infty)$

Résolution locale : le point extraordinaire

C 'est le point $\rho v = u\left(f\left(k\right)\right), \delta = f'\left(k\right)$, qui définit un point k_∞. On considère le problème :

$$\begin{aligned} \frac{dk}{dt} &= \tilde{u}'\left(p\right) + f\left(k\right) \\ \frac{dp}{dt} &= p\left(\delta - f'\left(k\right)\right) \end{aligned}$$

On trouve un point fixe hyperbolique $\left(k_\infty, \rho^{-1} u\left(f\left(k_\infty\right)\right)\right)$, associé à deux solutions $v_1\left(k\right)$ et $v_2\left(k\right)$, tangentes l'une à l'autre et à la frontière, toutes les deux de classe C^2 et définies sur $[0, \ \infty]$. Une seule d'entre elles converge vers k_∞. C'est elle qui définit la stratégie d'équilibre

Le cas général

On considère le problème, avec $\rho > \delta$

$$\int_0^\infty \left(\lambda e^{-\delta t} + (1-\lambda)\, e^{-\rho t}\right) u\,(c)\, dt, \quad c \in \mathcal{A}\,(k_0)$$

On définit deux points k_h et k_ℓ par :

$$\begin{aligned} f'\,(k_\ell) &= \delta + (1-\lambda)\,\rho \\ f'\,(k_h) &= \left(\frac{\lambda}{\delta} + \frac{1-\lambda}{\rho}\right)^{-1} \end{aligned}$$

Théorème

Pour tout k_∞ compris entre k_ℓ et k_h il existe une stratégie d 'équilibre convergeant vers k_∞

Pour la démonstration (qui utilise le théorème de la variété centrale) voir https ://www.ceremade.dauphine.fr/ ekeland/Articles/NirenbergFestschrift.pdf

Conclusion pour le mathématicien

Il ne faut pas écrire $\int_0^\infty e^{-\delta t} u(c_t)\, dt$ sans réfléchir

- s'il s'agit d'un individu, ses préférences sont mieux représentées, et son comportement mieux décrit, en prenant $R(t) = (1 + at)^{-1}$
- s'il s'agit d'une collectivité, par exemple un couple, $R(t)$ n'a aucune chance d'être de cette forme
- dans les deux cas, les solutions optimales existent mathématiquement, mais sont inutiles
- on comprend mieux le comportement, et on fait de plus belles mathématiques, en cherchant autre chose

Conclusion pour le citoyen

- l'optimisation nécessite un modele unitaire
  - un seul optimiseur
  - un seul taux d'actualisation
  - qui doit etre exponentiel
- ce modele necessite des choix politiques
  - qui optimise ?
  - quel est son critere ?
  - quel est son taux d'actualisation ?
- le modele ne vaut pas plus que ces choix implicites

Conclusion générale

- En nommant mal les choses on rajoute au malheur du monde
- En construisant et en propageant des modéles faux on rajoute au malheur du monde
- Au-delà de $2^{\circ}C$ de réchauffement on rentre en terrain inconnu