Stratégies optimales, stratégies exécutables

Qu'est-ce que la rationalité ?

1: Motivation
2: Le cas biexponentiel: les équations
3: Le cas biexponentiel: résolution

Motivation

Qu'est-ce que la rationalité ?

Les modèles mathématiques du comportement employés en économie reposent sur l'hypothèse que les individus sont *rationnels*. Il s'agit d'une conception extrêmement étroite de la rationalité (rationalité des *moyens*, par opposition à la rationalité des fins), qui se traduit mathématiquement par trois modules que l'on combine suivant les besoins:

1. Pour les décisions qui ont une conséquence immédiate et certaine: l'individu maximise une fonction d'utilité concave
$$\max_{a \in A} \; U(a)$$
2. Pour les décisions qui ont une conséquence immédiate et incertaine: l'individu maximise son espérance d'utilité
$$\max_{a \in A} \mathrm{E}\left[U(a)\right]$$
3. Pour les décisions qui ont une conséquence différée et certaine: l'individu maximise son utilité escomptée
$$\max_{a \in A} E\left[r^t U(a)\right]$$

Critiques

1. Sur le modèle $\max_{a\in A} \; U(a)$ la théorie est validée (Browning & Chiappori, Econometrica, 1998)
2. Sur le modèle $\max_{a\in A} \mathrm{E}\left[U(a)\right]$ la théorie est fortement critiquée (Kahnemann & Tverski, Econometrica, 1979)
3. Le modèle $\max_{a\in A} r^t U(a)$ peu de critique au sein de la communauté économique.

C 'est sur ce point que vont porter les lecons. Je commence par présenter un cadre général où tester les différents types de comportemen

Le problème de Ramsey (1928)

Un agriculteur récolte x_t en année t. Il en sème une partie k_t et consomme ce qui reste, soit c_t. La partie semée k_t donne une nouvelle récolte $f(k_t)$

$$f(k_t) = c_{t+1} + k_{t+1} = x_{t+1}, \quad t \geq 0 \tag{1}$$

$$c_t \geq 0, \quad k_t \geq 0 \tag{2}$$

On notera $A(x_0)$ les suites $c = (c_t)_{t\geq 1}$ accessibles à partir de x_0 et plus généralement $A(x_T)$ les suites $c = (c_t)_{t\geq T}$ accessibles à partir de x_{T-1}. L'utilité que l'agriculteur en retire dépend uniquement de sa consommation, soit $u(c_t)$ en année t. Classiquement on prendra

$$f(k) = \frac{1}{\alpha}k^{\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1$$

$$u(c) = \frac{1}{\beta}c^{\beta}, \quad \beta < 1$$

Monsieur Pressé

Monsieur Pressé est parfaitement rationnel, mais s'intéresse uniquement à ce qui lui arrive aujourd'hui et demain. Ses facteurs d'actualisation sont:

$$R(0) = 1, \quad R(1) = 1/2, \quad R(t) = 0 \;\; \forall t \geq 2$$

Il résout donc le problème:

$$\max \left\{ u(c_0) + \frac{1}{2} u(c_1) \right\}, \quad c \in A(x_0)$$
$$\max \left\{ u(c_0) + \frac{1}{2} u(f(k_0) - k_1) \right\}$$

Dont la solution, de toute évidence, nécessite que $k_1 = 0$, c'est-à-dire que l'agriculteur, en $t = 1$, consomme toute sa récolte. Le fera-t-il vraiment ? Et s'il ne le fait pas, est-ce rationnel de prévoir de faire quelque chose que l'on sait que l'on ne fera pas? Qu'est-ce qu'un comportement rationnel ?

Madame Patiente

Madame Patiente prend en compte de tout le futur, même le plus éloigné. Ses facteurs d'actualisation sont

$$R(t) = \alpha^t, \quad t \geq 0 \quad \text{avec} \quad 0 < \alpha < 1$$

Elle résout donc le problème $\max \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t u(c_t), \quad c \in A(x_0)$, dont la solution est $\bar{c}$. En particulier:

$$\sum_{t=1}^{\infty} \alpha^t u(\overline{c_t}) = \max \sum_{t=1}^{\infty} \alpha^t u(c_t), \quad c \in A(x_0) \tag{3}$$

A l'instant $t = 1$ elle sera confrontée au problème

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t u(c'_t), \quad c' \in A(x_1) \tag{4}$$

On remarque que $\sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t u(c'_t) = \alpha^{-1} \sum_{t=1}^{\infty} \alpha^t u(c_t)$ et les problèmes (3) et (4) coïncident. Madame Patiente fera donc en $t = 1$ exactement ce qu'elle avait prévu de faire au temps $t = 0$

Le génie de Bellman

La question naturelle est la question de la stratégie. Si je suis dans l'état $x_t = f(x_{t-1})$ à l'instant t, comment dois-je choisir c_t (et donc $k_t = x_t - c_t$) ? Une stratégie est une fonction $c_t = \sigma(t, x_t)$. Le génie de Bellman est d'avoir ramené la recherche d'une stratégie à la recherche d'une fonction.

$$
\begin{aligned}
V(x) &= \max \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t u(c_t), \quad c \in A(x_0) \\
&= \max \left\{ u(c_0) + \alpha \sum_{t \geq 1} \alpha^{t-1} u(c_t) \right\} \\
V(x) &= \max_{c_0} \{ u(c_0) + \alpha V(f(x - c_0)) \}
\end{aligned}
$$

On résout cette dernière équation par la méthode des contractions et on en tire la stratégie $c = \sigma(x)$

$$u'(c) = \alpha V'(f(x-c)) f'(x-c)$$

Retour à Monsieur Pressé

Plutôt qu'une stratégie optimale il cherchera une stratégie *exécutable*, c'est-à-dire que le moment venu il fera ce qu'il avait prévu de faire. Il s'agit donc d'un feedback $c = \sigma(x)$ avec $x = c + k$, tel que

$$\sigma(x) = \arg\max_c \left\{ u(c) + \frac{1}{2} u(\sigma(f(x - c))) \right\}$$

$$u'(\sigma(x)) = \frac{1}{2} u'(\sigma(f(x - \sigma(x)))) \sigma'(f(x - \sigma(x))) f'(x - \sigma(x))$$

En prenant $f(k) = 2\sqrt{k}$ et $u(c) = \ln c$ cela donne:

$$\frac{1}{\sigma(x)} = \frac{1}{2} \frac{\sigma'\left(2\sqrt{x - \sigma(x)}\right)}{\sigma\left(2\sqrt{x - \sigma(x)}\right)} \frac{1}{\sqrt{x - \sigma(x)}}$$

Je ne sais pas résoudre ces équations et je ne sais donc que conseiller à Monsieur Pressé

Retour au cas général

On considère un individu rationnel, dont les taux d'actualisation sont $R(t)$, avec:

$$R(0) = 1, \quad R(t) \geq R(t+1) \geq 0 \quad \forall t \tag{5}$$

$$R(t) > 0 \Longrightarrow \frac{R(t)}{R(t-1)} > \frac{R(t+1)}{R(t)} \to 1 \tag{6}$$

Plutôt qu'une stratégie optimale il cherchera une stratégie *exécutable*, c'est-à-dire que le moment venu il fera ce qu'il avait prévu de faire, compte tenu du fait qu'il ne peut décider que de l'action présente, et non des actions suivantes (non-commitment). Désignons par $c^{x,\sigma}$ la trajectoire obtenue à partir de x en appliquant la stratégie σ :

$$x_0 = x, \quad x_t = f\left(x_{t-1} - \sigma\left(x_{t-1}\right)\right), \quad c_t^{x,\sigma} = \sigma\left(x_t\right)$$

Comparaison avec l'équation de Bellman

Definition

Une stratégie $c = \sigma(x)$, avec $x = c + k$, est exécutable si

$$\sigma(x) = \arg\max_{c} \left\{ u(c) + \sum_{t=1}^{\infty} R(t)\, u\left(c_t^{y,\sigma}\right) \;\middle|\; y = f(x - c) \right\} \tag{7}$$

Posons

$$V_0(x) = \sum_{t=0}^{\infty} R(t)\, u\left(c_t^{x,\sigma}\right), \quad V_1(x) = \sum_{t=0}^{\infty} R(t+1)\, u\left(c_t^{x,\sigma}\right),$$

Alors σ est exécutable ssi

$$V_0(x) = \max_{c} \left\{ u(c) + V_1(f(x-c)) \right\} \tag{8}$$

$$\sigma(x) = \arg\max_{c} \left\{ u(c) + V_1(f(x-c)) \right\} \tag{9}$$

En dehors du cas $R(t) = \alpha^t$ je ne connais aucun théorème d'existence.

Le cas de l'horizon fini

On considère un horizon fini T et un critère final $V_T\left(x\right)$ .La stratégie exécutable peut alors être construite par récurrence descendante:

$$\sigma\left(T-1,x\right)=\arg\max_{c}\left\{u\left(c\right)+R\left(1\right)V_T\left(f\left(x-c\right)\right)\right\}$$

$$\sigma\left(t,x\right)=\arg\max_{c}\left\{u\left(c\right)+R\left(1\right)u\left(\sigma\left(t+1,f\left(x-c\right)\right)\right)+\sum_{s=t+2}^{T-1}R\left(s-\right.\right.$$

où les x_s, $t+1\leq s\leq T-s$ sont calculés de manière évidente

$$x_{t+1}=f\left(x-c_{\max}\right) \tag{10}$$

$$x_{t+n+1}=f\left(x_{t+n}-\sigma\left(t+n,x_{t+n}\right)\right) \tag{11}$$

La procédure bloque dès que le maximum n'est plus unique

$$
\begin{array}{lllll}
 & \text{Aujourd'hui: } 1 & \text{Demain: } \frac{1}{2} & \text{Après-demain: } \frac{1}{3} & \text{Jour } n : \frac{1}{n} \\
\text{Gain} & & 150 & & \\
 & -100 & & &
\end{array} \tag{12}
$$

Calcul coût/bénéfice

- Si je cours aujourd'hui, le gain est $-100 + 75 = -25$
- Si je cours demain (jour 1) le gain est $-\frac{1}{2}100 + \frac{1}{3}75 = 0$
- Si je cours le jour n le gain est $\frac{n-1}{(n+1)(n+2)}50$

Il est optimal de courir le jour 3 ou le jour 4

Nature des contrats exécutables

Si on court tous les jours: un contrat non exécutable

$$\begin{array}{ccc} t & t+1 & t+2 \\ 150 & 150 & 150 \\ -100 & -100 & -100 \end{array} \tag{13}$$

Gain de 50 tous les jours: je reçois 150 aujourd'hui parce que j'ai couru hier. Mais comparons deux stratégies:

1. je cours aujourd'hui et demain: bilan actualisé aujourd'hui: $50 + \frac{1}{2}50 = 75$
2. je ne cours pas aujourd'hui mais je reprends demain: $150 - \frac{1}{2}100 = 100$

Il est optimal de ne pas courir aujourd'hui, mais de courir demain (air connu)

On ajoute une modification: si on n'a pas couru au temps t, le coût de courir en $t+1$ est 200 et non 100.
Courir tous les jours est alors une stratégie exécutable. En effet

- si je cours aujourd'hui $50 + \frac{1}{2}50 = 75$
- si je ne cours pas aujourd'hui, je sais que je courrai demain, le gain est $150 - \frac{1}{2}200 = 50$

Il est optimal de courir aujourd'hui.
Le contrat exécutable est une contrainte *par l'aval*, utilisable quand une contrainte *par l'amont* n'est pas réalisable (Ulysse et les sirènes). Le décisionnaire à l'instant $t+1$ a la capacité de punir le décisionnaire à l'instant t, et celui-ci en tient compte

En ce qui concerne les sommes d'argent, il existe un unique taux d'actualisation, et il est exponentiel. 1000 Euros aujourd'hui valent 1000 $e^{\rho t}$ Euros à l'instant t, et si vous en doutes, il existe tout un système bancaire prêt à échanger 1000 Euros aujourd'hui contre 1000 $e^{\rho t}$ livrables à l'instant t

En matière financière, on aura donc deux taux d'actualisation, $R(t)$ qui porte sur l'utilité et qui dépend de l'individu, et $e^{\rho t}$ qui porte sur l'argent.
Une somme de 1000 Euros placée aujourd'hui et livrable à l'instant t a une utilité présente de

$$R(t)\, u\left(1000 e^{\rho t}\right) \tag{14}$$

En gestion de portefeuille, il faut tenir compte des deux (IE-Pirvu, 2008)

Les expériences menées en laboratoire donnent des taux dits *hyperboliques*

$$R(t) = \frac{1}{1+at}$$

Noter qu'ils se conforment aux conditons (5) et (6)
Laibson (1997) propose:

$$R(0) = 1, \quad R(t) = \beta\alpha^t \text{ pour } t \geq 1 \tag{15}$$

Soit une collectivité de N individus, chacun ayant une fonction d 'utilité u_n et un facteur d'a ctualisation α_n^t. (donc classique). Quel est le facteur d'actualisation de la collectivité ?
Un bien X est livrable à l'instant T.

- Cas 1: il s'agit d'un bien public (climat). Dans ce cas il faut comparer les bien-être

$$W\left(0\right)=\sum\lambda_n u_n\left(X\right)\quad\text{et}\quad W\left(T\right)=\sum\lambda_n\alpha_n^t u_n\left(X\right)$$

- Cas 2: il s 'agit d'un bien privé. Dans ce cas il y aura un marché, et un équilibre défini par

$$u_n'\left(x_n\right)=p$$

  oú le prix p dépendra des utilités et de la richesse de chacun

On n 'obtient de conclusion raisonnable que si les utilités sont identiques, $u_n=u$, ce qui conduit à des facteurs d 'actualisation de la forme $\sum\lambda_n\alpha$