Revised printing from *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* (2004), **24**, 1–7

Sur le théorème de Bertrand (d'après Michael Herman)

JACQUES FÉJOZ †‡ et LAURENT KACZMAREK †

† *Analyse algébrique, Institut de mathématiques (UMR 7586 du CNRS), Université P. & M. Curie, 175 rue du Chevaleret, 75013 Paris, France (e-mail: fejoz@math.jussieu.fr, lkcz@9online.fr)*

‡ *Astronomie et systèmes dynamiques, IMCCE (UMR 8020 du CNRS), Observatoire de Paris, 77 avenue Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France*

(*Reçu le 20 janvier 2004*)

Résumé. Un point matériel soumis à une force centrale attractive dérivant d'un potentiel possède une famille à un paramètre d'orbites périodiques circulaires. Le théorème de Bertrand affirme que si toutes les orbites voisines de ces orbites circulaires sont périodiques, le potentiel est newtonien (proportionel à $1/r$, où r est la distance du point au centre attractif) ou élastique (en r^2) [Ber]. Nous calculons, sur une idée initiale de Michael Herman [Her] et pour un potentiel central générique, les deux premiers invariants de Birkhoff du système le long des orbites circulaires ; puis nous montrons comment le théorème de Bertrand s'en déduit.

Abstract. When a point mass undergoes a central, attractive, gradient force, there exists a one parameter family of circular periodic orbits. Bertrand's theorem asserts that if all the orbits close to these circular orbits are periodic then the potential is Newtonian (i.e. proportional to $1/r$, where r is the distance to the fixed centre of attraction) or elastic (i.e. proportional to r^2) [Ber]. Following an idea of Michael Herman, we compute the first two Birkhoff invariants of this system along the circular trajectories for a generic potential ; then we show how to derive Bertrand's threorem.

Il est remarquable que l'ellipse keplérienne décrite par une planète subissant l'attraction newtonienne du seul Soleil est, en particulier, une orbite fermée. Cette dégénérescence du potentiel newtonien en $1/r$ rend difficile l'étude des perturbations planétaires [Poin]. Le potentiel élastique en r^2 montre une dégénérescence similaire, mais ses problèmes à n corps sont, par un miracle algébrique, complètement intégrables. Le théorème de Bertrand affirme qu'aucun autre potentiel central n'exhibe la même dégénérescence ([Ber] ou, pour d'autres démonstrations, [Win, Alb]).

Michael Herman, au cours de ses séminaires sur la démonstration du « théorème d'Arnold » [Her, Féj], a exposé le calcul de la forme normale du problème des deux corps avec un potentiel central générique, le long des orbites circulaires. Ce calcul comportait une erreur corrigée par le premier auteur. Nous l'avons complété pour en tirer une démonstration du théorème de Bertrand. Dans cette démonstration, parmi les potentiels non newtoniens et non élastiques, l'obstruction à la propriété de n'avoir que des orbites périodiques vient soit, pour le potentiel en $1/r^2$, de l'existence d'une fonction de Lyapunov stricte soit, pour un potentiel générique, de l'existence de mouvements à deux fréquences incommensurables (une fréquence de précession et une de révolution).

1. *Notations et énoncé du théorème de Bertrand*

Soit un point matériel plongé dans un potentiel central attractif $U : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$, fonction de classe C^∞ de la distance du point au centre attractif. Le point se meut dans un plan, que nous identifions, en excluant le centre attractif, au plan complexe épointé $\mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}_*^+$, $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Notons $f = U' : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}^+$ l'amplitude de la force.

Munissons l'espace des phases $\{(q,p)\} = (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}$ de la forme symplectique standard $\omega = \mathrm{Re}(d\bar{q} \wedge dp)$, où Re désigne la partie réelle d'un nombre complexe, et de l'hamiltonien

$$H = \frac{|p|^2}{2} + U(|q|),$$

où $|\cdot|$ désigne le module d'un nombre complexe. Le champ de vecteurs hamiltonien de H, défini implicitement par l'équation $i_{\vec{D}H}\omega = DH$, vaut

$$\vec{D}H = p\,\frac{\partial}{\partial q} - f(|q|)\frac{q}{|q|}\frac{\partial}{\partial p} + \bar{p}\,\frac{\partial}{\partial \bar{q}} - f(|q|)\frac{\bar{q}}{|q|}\frac{\partial}{\partial \bar{p}}.$$

Après identification des fibrés tangents et cotangents, l'application cotangente de l'application coordonnées polaires est le difféomorphisme

$$\begin{aligned} \phi :\ & T(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}_*^+) = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow T(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C} \\ & (\theta, r, \Theta, R) \longmapsto (q,p) = \left(r\,e^{i\theta}, \left(R + i\frac{\Theta}{r}\right)e^{i\theta}\right). \end{aligned}$$

Elle induit des coordonnées (θ, r, Θ, R) sur l'espace des phases, telles que la forme symplectique vaille $\omega = d\theta \wedge d\Theta + dr \wedge dR$ et l'hamiltonien

$$H = \frac{1}{2}\left(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2}\right) + U(r).$$

L'invariance de H par la symétrie de rotation ($\theta \mapsto \theta + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{S}^1$) rend H complètement intégrable. Nous dénommerons *hamiltonien réduit* l'hamiltonien H symplectiquement réduit par cette symétrie, donc paramétré par Θ.

Une orbite est circulaire si la coordonnée r y est constante (cette définition inclut conventionnellement les points fixes). Les orbites circulaires (ou les cercles de points fixes) correspondent aux points critiques du potentiel amendé $\Theta^2/2r^2+U(r)$. L'invariance du problème par changement de l'orientation du plan permet sans perte de généralité de se restreindre aux mouvements directs $\Theta = \dot\theta > 0$, donc d'identifier l'espace des phases à l'espace

$$\mathscr{P} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R} = \{(\theta, \Theta, r, R)\}.$$

La fonction

$$\Theta_c : \quad \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}_*^+, \quad r \mapsto \sqrt{U'(r)r^3} = \sqrt{f(r)r^3}$$

définit pour tout rayon r l'unique valeur du moment cinétique Θ pour laquelle l'ensemble

$$C_r = \mathbb{S}^1 \times \{r\} \times \{\Theta_c(r)\} \times \{0\} \subset \mathscr{P}$$

est une orbite circulaire (dans le cas particulier où $\Theta_c(r) = 0$, C_r est en fait la réunion d'une infinité de points fixes).

Théorème 1 (Bertrand) *Sous l'hypothèse (H) suivante :*

> *il existe un point $r_0 \in \mathbb{R}_*^+$ et un voisinage $\mathscr{C}_{r_0}$ de l'orbite circulaire C_{r_0} dans $\mathscr{P}$ tels que toutes les courbes intégrales de $\overrightarrow{D}H$ passant par $\mathscr{C}_{r_0}$ sont périodiques,*

il existe un réel $k \geq 0$ et un voisinage de r_0 dans lequel $f(r) = k/r^2$ ou kr.

Dorénavant, supposons satisfaite l'hypothèse (H) et excluons la cas trivial où le germe de f en r_0 est nul.

2. *Bons rayons*

On peut redresser les orbites ciculaires sous réserve que la fonction Θ_c soit un difféomorphisme. Notons

$$g : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}, \quad r \mapsto \frac{1}{r^3}\frac{d}{dr}\Theta_c^2(r) = f'(r) + \frac{3}{r}f(r).$$

Lemme 2. *Il existe un intervalle ouvert $\mathscr{V} \subset \mathbb{R}_*^+$ contenant r_0 tel que la fonction Θ_c n'est constante sur aucun intervalle ouvert non vide de $\mathscr{V}$.*

Démonstration. Il existe un intervalle ouvert $\mathscr{V} \subset \mathbb{R}_*^+$ contenant r_0 tel que $\mathbb{S}^1 \times \mathscr{V} \times \Theta_c(\mathscr{V}) \times \{0\} \subset \mathscr{C}_{r_0}$. Supposons par l'absurde qu'il existe un intervalle ouvert non vide $I \subset \mathscr{V}$ tel que la fonction $g|_I$ soit nulle. Il existe $k \in \mathbb{R}_*^+$ tel que $f(r) = k/r^3$ sur I et Θ_c soit la fonction constante $\sqrt{k}$. La dérivée de la coordonnée R le long d'une trajectoire vaut

$$< DR, \overrightarrow{D}H >= \frac{\Theta^2 - k}{r^3}.$$

Donc, pour tout Θ différent mais arbitrairement proche de $\Theta_c(r_0) = \sqrt{k}$, la coordonnée R est une fonction de Lyapunov stricte de $\overrightarrow{D}H$. Ceci contredit l'hypothèse (H). □

Lemme 3. *Le point r_0 est adhérent à l'ouvert*

$$\mathscr{W} = \{r \in \mathscr{V},\ f(r) \neq 0 \text{ et } g(r) \neq 0\}.$$

Démonstration. Comme le germe de f en r_0 est non nul, il existe une suite $(r_n)_{n\geq 1}$ de $\mathscr{V}$ qui converge vers r_0 et telle que $f(r_n) \neq 0$, $n \geq 1$. Pour tout $n \geq 1$, il existe un intervalle ouvert $I_n \subset \mathscr{V}$ contenant r_n tel que I_n soit de longueur majorée par $1/n$ et f ne s'annule pas sur I_n. D'après le lemme précédent il existe $r'_n \in I_n$ tel que $g(r'_n) \neq 0$. La suite (r'_n) ainsi construite est une suite de $\mathscr{W}$ et converge vers r_0. □

3. *Forme normale*

Pour tout point $r_1 \in \mathscr{W}$, $\Theta_c : (\mathbb{R}^*_+, r_1) \to (\mathbb{R}^+_*, \Theta_c(r_1))$ est un germe de difféomorphisme, donc le germe de difféomorphisme inverse $r_c = \Theta_c^{-1}$ est bien défini. Notons a, b et c les germes en $\Theta_c(\mathscr{W})$ de fonctions de Θ définis par

$$a = f'(r_c) + 3\frac{\Theta^2}{r_c^4}, \quad b = f''(r_c) - 12\frac{\Theta^2}{r_c^5}, \quad c = f'''(r_c) + 60\frac{\Theta^2}{r_c^6}. \tag{1}$$

Proposition 4. *Pour tout point $r_1 \in \mathscr{W}$, il existe un germe C^∞ en C_{r_1} de coordonnées symplectiques*

$$(\check{\theta}, \Theta, \varphi, \rho) : \mathscr{P} \setminus (\cup_{r\in\mathscr{V}} C_r) \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^+_* \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^+_*$$

tel que

1 º l'inverse de ce germe se prolonge en le germe C^∞ d'un éclatement

$$\epsilon : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^+_* \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^+ \to \mathscr{P}$$

qui, pour tout r assez proche de r_1, envoie le tore $\mathbb{S}^1 \times \{\Theta_c(r)\} \times \mathbb{S}^1 \times \{0\}$ sur l'orbite circulaire C_r,

2 º l'hamiltonien vaille

$$H = N + o\left(\rho^2\right), \quad N = h_0(\Theta) + h_1(\Theta)\rho + \frac{1}{2}h_2(\Theta)\rho^2, \tag{2}$$

avec

$$h_0 = \frac{\Theta^2}{2r_c^2} + U(r_c),\ h_1(\Theta) = \sqrt{a(\Theta)} \ \text{ et } \ h_2(\Theta) = \frac{3a(\Theta)c(\Theta) - 5b(\Theta)^2}{24a(\Theta)^2}. \tag{3}$$

(en particulier, si r est assez proche de r_1, l'orbite périodique C_r est normalement elliptique).

Démonstration.

1 º Redressons les orbites circulaires au voisinage de r_1 en posant

$$\hat{r} = r - r_c(\Theta) \quad \text{et} \quad \hat{\theta} = \theta - r'_c(\Theta)R\ ; \tag{4}$$

l'angle θ est modifié pour que les coordonnées $(\hat{r}, R, \hat{\theta}, \Theta)$ soient symplectiques ($\omega = d\hat{r} \wedge dR + d\hat{\theta} \wedge d\Theta$). Dans ces dernières, l'hamiltonien vaut

$$H = \frac{R^2}{2} + h_0(\Theta) + \frac{1}{2}a(\Theta)\hat{r}^2 + \frac{1}{6}b(\Theta)\hat{r}^3 + \frac{1}{24}c(\Theta)\hat{r}^4 + O(\hat{r}^5), \tag{5}$$

où a, b et c sont définis par (1) et h_0 dans (3).

2 ^{o} Par hypothèse, la fonction continue $a = g \circ r_c$ ne s'annule pas en $\Theta(r_1)$. De plus, elle ne peut pas prendre de valeurs négatives, puisqu'alors le point critique $(\hat{r}, R) = (0,0)$ serait hyperbolique — et la conclusion du théorème de Grobman-Hartman est incompatible avec l'hypothèse (H). Donc a est strictement positive au voisinage de $\Theta_c(r_1)$.
Lu dans les coordonnées symplectiques locales $(\tilde{\theta}, \Theta, x, y)$ définies par

$$x = a(\Theta)^{1/4}\hat{r}, \quad y = a(\Theta)^{-1/4}R, \quad \tilde{\theta} = \hat{\theta} + \frac{a'(\Theta)}{4a(\Theta)}\hat{r}R,$$

H vaut

$$H = h_0 + \frac{\sqrt{a}}{2}\left(x^2 + y^2 + \frac{1}{3}ba^{-5/4}x^3 + \frac{1}{12}ca^{-3/2}x^4\right) + O(x^5).$$

3 ^{o} Soit ϕ le temps un du flot de l'hamiltonien

$$F = -\frac{1}{2}\alpha x^2 y - \frac{1}{3}\alpha y^3 + \left(\frac{9}{64}\alpha^2 - \frac{5}{16}\beta\right)x^3 y + \left(\frac{15}{64}\alpha^2 - \frac{3}{16}\beta\right)xy^3,$$

avec $\alpha = ba^{-5/4}/3$ et $\beta = ca^{-3/2}/12$. La formule de Taylor-Lagrange montre que l'image réciproque de H par ϕ vaut

$$\phi^* H = \left(\mathrm{id} + \overrightarrow{D}F + \frac{1}{2}(\overrightarrow{D}F)^2\right)H + O\left((x,y)^{\otimes 5}\right), \tag{6}$$

où le champ de vecteurs $\overrightarrow{D}F$ est vu comme un opérateur de dérivation. Un calcul direct montre que la forme normale de Birkhoff de

$$\tilde{H} = x^2 + y^2 + \alpha x^3 + \beta x^4$$

est, au second ordre,

$$\phi^* \tilde{H} = x^2 + y^2 + \left(\frac{3}{8}\beta - \frac{15}{32}\alpha^2\right)\left(x^2 + y^2\right)^2 + O\left((x,y)^{\otimes 5}\right).$$

Si $(\check{\theta}, \check{\Theta} = \Theta, X, Y)$ est le germe de coordonnées défini comme l'image réciproque de $(\tilde{\theta}, \Theta, x, y)$ par ϕ, on a donc

$$H = h_0 + \frac{\sqrt{a}}{2}\left(X^2 + Y^2\right) + \frac{3ac - 5b^2}{192a^2}\left(X^2 + Y^2\right)^2 + O\left((X,Y)^{\otimes 5}\right).$$

4 ^{o} Les coordonnées polaires symplectiques $(\tilde{\theta}, \Theta, \varphi, \rho)$ définies par

$$X + iY = \sqrt{2\rho}e^{-i\varphi}$$

transforment H, en dehors des orbites circulaires $\{x = y = 0\} = \{X = Y = 0\} = \{\rho = 0\}$ (qui sont des points fixes de $\overrightarrow{D}F$), en l'expression annoncée.

□

4. *Dégénérescences de l'application fréquence*

Les tores

$$\mathbb{T}^2_{\Theta,\rho} = \left\{(\check{\theta}, \Theta, \varphi, \rho),\ (\check{\theta}, \varphi) \in \mathbb{T}^2\right\}$$

sont, lorsque $(\Theta, \rho) \in \mathbb{R}^+_* \times \mathbb{R}$ est assez proche de $(\Theta_c(r_0), 0)$, N-invariants quasipériodiques et leur fréquence est donnée par l'application

$$\nu = (\nu_1, \nu_2) : (\Theta, \rho) \mapsto \left(h_0'(\Theta) + h_1'(\Theta)\rho + \frac{1}{2}h_2'(\Theta)\rho^2, h_1(\Theta) + h_2(\Theta)\rho\right).$$

Notation 5. Soient $\mathscr{T}$ et $\mathscr{G}$ les germes de fonctions en $\Theta = \Theta_c(r)$, $r \in \mathscr{W}$, définis par

$$\mathscr{T}(\Theta) = \mathrm{Det}\, D\nu(\Theta, 0) = h_0''(\Theta)h_2(\Theta) - h_1'(\Theta)^2 \tag{7}$$

et

$$\mathscr{G}(\Theta) = \nu(\Theta, 0) \wedge \frac{\partial \nu}{\partial \Theta}(\Theta, 0) = h_0'(\Theta)h_1'(\Theta) - h_0''(\Theta)h_1(\Theta). \tag{8}$$

La quantité $\mathscr{T}(\Theta)$ est la torsion du tore $\mathbb{T}^2_{(\Theta,0)}$ et s'annule aux points où l'application fréquence n'est pas un difféomorphisme local ; la quantité $\mathscr{G}(\Theta)$ s'annule aux points où la tangente à la courbe paramétrée $\Theta \mapsto \nu(\Theta, 0)$ passe par l'origine.

Lemme 6. *Pour tout $r_1 \in \mathscr{W}$, les germes en $\Theta_c(r_1)$ de $\mathscr{T}$ et de $\mathscr{G}$ sont nuls.*

Démonstration. Si l'une des deux quantités $\mathscr{T}$ ou $\mathscr{G}$ est non nulle en un point $r_2 \in \mathscr{V}$ proche de r_1, l'image de l'application fréquence est nulle part localement contenue dans une droite vectorielle : c'est immédiat dans le cas où $\mathscr{T}(\Theta_c(r_2)) \neq 0$; c'est élémentaire dans le cas où $\mathscr{G}(\Theta_c(r_2)) \neq 0$ (cf. le lemme 41 de [Féj]). Un théorème dû à Rüsmmann [Rüs] implique alors l'existence de tores invariants sur lesquels les mouvements sont quasipériodiques à deux fréquences incommensurables, dans n'importe quel voisinage de C_{r_0}. † Ceci contredit (H). □

Corollaire 7. *Pour tout $r_1 \in \mathscr{W}$, il existe deux réels $k \neq 0$ et $\gamma > -3$ tels que le germe de f en r_1 vaille*

$$f(r) = kr^\gamma.$$

Démonstration. D'après la remarque faite dans la démonstration du lemme 6, comme le germe en $\Theta_c(r_1)$ de $\mathscr{G}$ est nul, l'image locale de l'application $\Theta \mapsto \nu(\Theta, 0) = (h_0'(\Theta), h_1(\Theta))$ au voisinage de $\Theta_c(r_1)$ est contenue dans une droite vectorielle

$$\alpha\nu_1 + \beta\nu_2 = 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Comme $r_1 \in \mathscr{W}$, on a $\beta \neq 0$. Supposons par exemple $\beta = 1$. Le calcul de h_0' et de h_1 est explicite dans la coordonnée $r = r_c(\Theta)$: $h_0' = \Theta/r^2 = \sqrt{f/r}$ et $h_1 = \sqrt{f' + 3f/r}$. En composant l'équation (9) à droite par Θ_c on obtient

$$\alpha\sqrt{\frac{f}{r}} + \sqrt{f' + \frac{3f}{r}} = 0,$$

†. Alessandra Fusè, dans sa thèse *On the stability of the perturbed central motion problem : a quasiconvexity and a Nekhoroshev-type result* (2018, Univ. di Milano), a remarqué que comme H est intégrable il est inutile d'invoquer le théorème KAM, ce qui avait échappé à l'auteur : l'une quelconque de ces formes de non-dégénérescence impliquerait l'existence de tores irrationnels.

c'est-à-dire $f = kr^\gamma$, $k \in \mathbb{R}_*$, $\gamma = \alpha^2 - 3$. Comme $r_1 \in \mathscr{W}$, forcément $\alpha \neq 0$ donc $\gamma < 3$. □

Corollaire 8. *Pour tout $r_1 \in \mathscr{W}$, il existe un réel $k \neq 0$ tel que le germe de f en r_1 soit k/r^2 ou kr, $k \neq 0$.*

Démonstration. D'après le lemme précédent on a $f = kr^\gamma$. En utilisant les formules (1, 3, 7), on voit que la torsion vaut

$$\mathscr{T} = -\frac{1}{12{r_c}^4}\frac{(\gamma-1)^2(\gamma+2)}{(\gamma+3)} \tag{10}$$

(on a en effet $\gamma \neq -3$ d'après le lemme 2). Or cette quantité est nulle d'après le lemme 6, donc $\gamma = 1$ (cas élastique) ou $\gamma = -2$ (cas newtonien). □

Remarque 9. Parmi les potentiels pour lesquels $\mathscr{G} = 0$, on a $h_1 = -\alpha h_0'$. Donc la torsion vaut

$$\mathscr{T} = h_0''(h_2 + \alpha h_1').$$

Si $h_0'' \neq 0$, l'annulation de la torsion équivaut au fait que, au premier ordre en ρ, l'image locale de l'application $\rho \mapsto \nu(\Theta, \rho)$ est contenue dans une droite vectorielle. Donc la tangente à la courbe paramétrée $r \mapsto \nu(\Theta, \rho)$ ne passe pas par l'origine pour les fonctions $r \mapsto kr^\gamma$ telles que $\gamma \neq -3, -2, 1$, lorsque ρ est assez petit.

Fin de la démonstration du théorème 1. D'après le corollaire précédent, il suffit de montrer que l'on a $\mathscr{W} = \mathscr{V}$. Supposons par l'absurde $\mathscr{W} \subsetneq \mathscr{V}$. Soit I une composante connexe de l'ouvert $\mathscr{W}$. Soit $r_1 \in I$. D'après le corollaire 7, il existe deux réels $k \neq 0$ et γ tels que $f(r) = kr^\gamma$ au voisinage de r_1. L'ensemble $\{r \in I,\ f(r) = kr^\gamma\}$ est ouvert (d'après le même corollaire) et fermé, donc égal à I. Donc k et γ ne dépendent que de I. De plus, par hypothèse l'intersection avec $\mathscr{V}$ du bord de I est non vide. Or, en un point $r \in \partial I \cap \mathscr{V}$, on a soit $f(r) = 0$ soit $g(r) = 0$. La continuité de f implique, dans les deux cas, que $k = 0$, donc $f \equiv 0$ sur I. Ceci est absurde puisque $I \subset \mathscr{W}$. □

Remarque 10. L'équation d'annulation de la torsion $\mathscr{T}$ est, ici, une équation différentielle (E) homogène du troisième degré. L'ensemble de ses solutions est un cône de dimension 3, dont malheureusement on ne connaît a priori que deux génératrices, faites des potentiels newtoniens et élastiques. Mentionnons le fait curieux suivant. Il est prévisible que la linéarisation de (E) au potentiel newtonien possède un pôle en $r = 0$; mais le calcul montre qu'elle possède un second pôle en $r = (2/3)^{1/3}$, qui apparaît comme une mystérieuse longueur caractéristique du potentiel newtonien.

Remerciements. Merci à Alain Chenciner, Alain Albouy et David Sauzin pour l'aide qu'ils nous ont apportée ; merci aussi aux deux premiers pour leur participation au jury de DEA du second auteur. Merci à Connor Jackman pour avoir décelé plusieurs erreurs de calcul (2017/11/20).

Références

[Alb] A. Albouy. Lectures on the two-body problem. *Classical and Celestial Mechanics (Recife, 1993/1999)*. Princeton University Press, Princeton, 2002, pp. 63–116.

[Ber] J. Bertrand, Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe. *Comptes rendus* **77** (1873), 849–853.

[Her] M.R. Herman, Démonstration d'un théorème de V.I. Arnold. *Séminaire de Systèmes Dynamiques* et manuscripts, 1998.

[Féj] J. Féjoz, Démonstration d'Herman du théorème d'Arnold sur la stabilité du système solaire. *Ergodic Theory & Dynam. Sys.* **24** (2004).

[Poin] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Gauthier-Villars, Paris, 1892–1899

[Rüs] H. Rüssmann. Nondegeneracy in the perturbation theory of integrable dynamical systems. *Stochastics, Algebra and Analysis in Classical and Quantum Dynamics (Marseilles, 1988) (Mathematical Applications, 59)*. Kluwer Academic, Dordrecht, 1990, pp. 211–223.

[Win] A. Wintner. *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics (Princeton Math. Series, 5)*. Princeton University Press, Princeton, 1941.