

## Démonstration du « théorème d’Arnold » sur la stabilité du système planétaire (d’après M. Herman)

JACQUES FÉJOZ

*Analyse algébrique, Institut de mathématiques (UMR 7586 du CNRS),  
Université P. & M. Curie, 175 rue du Chevaleret, 75013 Paris, France  
(e-mail: fejoz@math.jussieu.fr)*

*Astronomie et systèmes dynamiques, IMCCE (UMR 8020 du CNRS),  
Observatoire de Paris, 77 avenue Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France  
(e-mail: fejoz@imcce.fr)*

(Version révisée de janvier 2007)

*Résumé.* V.I. Arnold [Petits dénominateurs et problèmes de stabilité du mouvement en mécanique classique et en mécanique céleste (en russe), *Uspehi Mat. Nauk.* **18** (1963), 91–192] a affirmé et partiellement démontré que, pour le modèle newtonien du Système solaire à  $n \geq 2$  planètes dans l’espace, si la masse des planètes est suffisamment petite par rapport à celle du Soleil, il existe, dans l’espace des phases au voisinage des mouvements képlériens circulaires coplanaires, un sous-ensemble de mesure de Lebesgue strictement positive de conditions initiales conduisant à des mouvements quasipériodiques à  $3n - 1$  fréquences. Cet article détaille la démonstration que M.R. Herman a exposée de ce théorème [Démonstration d’un théorème de V.I. Arnold, *Séminaire de Systèmes Dynamiques* et manuscrits, 1998].

*Abstract.* V.I. Arnold [Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics (in Russian), *Uspehi Mat. Nauk.* **18** (1963), 91–192] stated and partly proved the following theorem : in the Newtonian model of the Solar system with  $n \geq 2$  planets in space, if the masses of the planets are small enough compared to the mass of the Sun, there is a subset of the phase space of positive measure, in the neighborhood of circular and coplanar Keplerian motions, leading to quasiperiodic motions with  $3n - 1$  frequencies. This article details the proof of this theorem, following M.R. Herman’s lectures [Proof of a theorem of V.I. Arnold, *Séminaire de Systèmes Dynamiques* and manuscrits, 1998].

*Table des matières*

1	Le problème de la stabilité du Système solaire	3
1.1	Le système planétaire newtonien . . . . .	3
1.2	Le « théorème d'Arnold » . . . . .	3
1.3	La démonstration d'Herman . . . . .	4
2	Inversion locale dans les bons espaces de Fréchet	5
2.1	La catégorie des bons espaces de Fréchet . . . . .	6
2.2	Théorème d'inversion locale et théorème d'extension de Whitney . .	10
2.3	Une propriété de compacité . . . . .	12
3	Équations linéaires de redressement infinitésimal	13
3.1	Redressement du flot d'un tore . . . . .	13
3.2	Redressement normal d'un tore . . . . .	14
3.3	Redressement de la dynamique normale le long d'un tore . . . . .	16
3.4	Conditions diophantiennes . . . . .	17
4	Formes normales d'hamiltoniens	18
4.1	Un espace de symplectomorphismes hamiltoniens . . . . .	18
4.2	Théorème de conjugaison tordue . . . . .	22
4.3	Deux cas particuliers . . . . .	25
4.4	Théorème de conjugaison hypothétique . . . . .	27
5	Existence de tores invariants	29
5.1	Théorème de Kolmogorov-Arnold . . . . .	29
5.2	Condition d'Arnold-Pyartli . . . . .	32
5.3	Théorème de tores invariants isotropes . . . . .	39
5.4	Théorème de stabilité d'Herman . . . . .	41
6	Le système planétaire	45
6.1	Notations et énoncé du théorème d'Arnold . . . . .	45
6.2	L'hamiltonien séculaire et sa singularité elliptique . . . . .	49
6.3	Développement en les rapports des demi grands axes . . . . .	52
7	Vérification de la condition d'Arnold-Pyartli	52
7.1	Lemmes sur les valeurs propres . . . . .	52
7.2	Condition d'Arnold-Pyartli dans le plan . . . . .	54
7.3	Les uniques relations dans l'espace . . . . .	58
7.4	Condition d'Arnold-Pyartli dans l'espace . . . . .	59
8	Le Système solaire est-il stable?	61
	Notations tensorielles	62
	Bibliographie	62

1. *Le problème de la stabilité du Système solaire*

1.1. *Le système planétaire newtonien* Soient  $m_0$  et  $m_1, \dots, m_n$  les masses respectivement du Soleil et des planètes du Système solaire, et  $q_0$  et  $q_1, \dots, q_n$  leurs vecteurs position dans l'espace, identifié par le choix d'un référentiel galiléen à l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ . Les unités étant convenablement choisies, la loi de l'attraction universelle de Newton affirme que le mouvement des astres est régi par les équations différentielles

$$m_j \frac{d^2 q_j}{dt^2} = \sum_{k \neq j} m_j m_k \frac{q_k - q_j}{\|q_k - q_j\|^3}, \quad j = 0, \dots, n. \quad (1)$$

Or, les rapports de masses  $m_j/m_0$  ( $j \neq 0$ ) sont petits, au plus de 1/1000 pour Jupiter. Donc, en mettant les  $n$  dernières équations sous la forme

$$\frac{d^2 q_j}{dt^2} = m_0 \left( \frac{q_0 - q_j}{\|q_0 - q_j\|^3} + \sum_{k \neq 0, j} \frac{m_k}{m_0} \cdot \frac{q_k - q_j}{\|q_k - q_j\|^3} \right), \quad j = 1, \dots, n, \quad (2)$$

on voit que le terme qui rend compte de l'attraction du Soleil est prédominant, et, pendant un court intervalle de temps, chaque planète décrit approximativement l'ellipse képlérienne qu'elle décrirait si elle subissait la seule attraction du Soleil.

La loi de l'attraction universelle explique de façon magistrale la contradiction apparente entre le principe, mis en avant par Galilée et Descartes, du mouvement inertiel rectiligne uniforme en mécanique terrestre et les lois, énoncées par Kepler, régissant le mouvement elliptique des planètes autour du Soleil. Mais Newton lui-même mesura très vite, à la fin du XVII<sup>e</sup> siècle, que les perturbations mutuelles des planètes pouvaient avoir, au fil des révolutions képlériennes, des implications dynamiques énormes. Le contre-coup imprévu de la découverte de Newton fut donc d'ébranler la conviction que le Système solaire fût stable : il ne fut plus évident que le mouvement des planètes du Système solaire se répêât immuablement, sans collisions ( $\|q_j - q_k\| \rightarrow 0, j \neq k$ ) ni éjections ( $\|q_j - q_k\| \rightarrow \infty$ ).

1.2. *Le « théorème d'Arnold »* En 1963 Vladimir Arnold publia le résultat remarquable suivant [Arn63] (voir l'énoncé plus précis 63).

**THÉORÈME 1.** *Si le maximum  $\epsilon = \max\{m_j/m_0\}_{j=1, \dots, n}$  des masses des planètes rapportées à la masse du soleil est suffisamment petit, les équations (1) admettent, dans l'espace des phases au voisinage des mouvements képlériens circulaires et coplanaires, un ensemble de mesure de Lebesgue strictement positive de conditions initiales conduisant à des mouvements quasipériodiques.*

Michael Herman commente ainsi ce théorème dans [Her98a] :

I. Newton, [New87], certainly believed that the  $n$ -body problem,  $n \geq 3$ , ( $n$  particles moving under universal gravitation) is topologically unstable and, to paraphrase Laplace, made the hypothesis that God solves the problem and controls the instabilities (a hypothesis criticized by Leibniz and all the enlightened XVIIIth century). [...]

The fact that the bounded orbits have positive Lebesgue measure when the masses belong to a non empty open set, is a remarkable result announced by V.I. Arnold [Arn63] (Arnold only gives a proof for the planar 3-body problem and, if the author is not mistaken, Arnold's claim is correct).

Dans l'approximation képlérienne ( $m_j/m_0 = 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ ), le mouvement de chaque planète est périodique, alors qu'un potentiel d'interaction gravitationnel générique engendrerait des mouvements quasipériodiques à deux fréquences. La dégénérescence du potentiel newtonien est levée par les petites interactions mutuelles des planètes, qui font que les ellipses képlériennes tournent et se déforment lentement. C'est cette dynamique lente, qualifiée de séculaire, qu'il s'agit d'étudier à long terme. Moser a dû résoudre un problème de même nature pour démontrer le théorème de stabilité des points fixes elliptiques [Mos62], points au voisinage desquels la torsion est faible. Dans le système planétaire, des difficultés supplémentaires proviennent de la forme même de la perturbation considérée : non-intégrabilité du système séculaire, dégénérescences dues à l'invariance par rotation et à une mystérieuse résonance remarquée par Herman [AA01] (Propriété 80), ainsi qu'à la singularité elliptique du système séculaire.

La démonstration d'Arnold est complète dans le cas où trois corps se meuvent dans le plan. Les mouvements quasipériodiques ont alors 4 fréquences. L'argument d'Arnold pour déduire le cas spatial du cas plan est discutable. Après réduction symplectique par la symétrie de rotation, le problème des trois corps ressemble en effet à un certain problème plan, qui est une perturbation du problème plan des trois corps quand les inclinaisons sont petites. Mais, après réduction, il n'y a plus d'inclinaisons, et l'étude de la limite des faibles inclinaisons n'est donc pas une simple formalité [Rob95, Her98]! Par ailleurs, l'argument d'Arnold dans le cas de  $n$  corps dans l'espace est faux, comme la Proposition 81 et la remarque suivant sa démonstration le montrent.

1.3. *La démonstration d'Herman* Dans [Her98] M. Herman a démontré un théorème de tores invariants abstrait qui généralise et simplifie le résultat homologue d'Arnold (Théorème 60), puis il a montré que le système planétaire relève de ce théorème. Pendant ma thèse, j'ai eu la grande chance de profiter du secours et des explications de Michael Herman sur la théorie KAM. J'ai rédigé cette démonstration à partir de ses notes manuscrites, qu'il avait pour la plupart distribuées aux auditeurs de ses exposés. Ces notes sont parfois succinctes, et j'espère ne pas les avoir trahies en introduisant des erreurs. Par ailleurs, j'ai essayé de mentionner quand je m'en suis écarté.

Les démonstrations du Théorème 60 et de son précurseur 59 reposent sur un théorème de forme normale, le Théorème 38, dont la démonstration décrite ici utilise un théorème d'inversion locale pour un certain opérateur  $\Phi_{\alpha,\beta}$  de conjugaison. À cause des petits diviseurs, aucun choix de topologies banachiques ne permet de rendre l'opérateur  $\Phi_{\alpha,\beta}$  simultanément borné et coercif; c'est le phénomène de

« perte de différentiabilité », qui oblige à utiliser un théorème d'inversion locale dans des espaces de Fréchet, à la Nash-Moser [Nas56, Mos61, Zeh76]. Comme dans des démonstrations antérieures [Her80], Herman utilise la version due à Sergeraert et à Hamilton [Ser72, Ham74, Ham82], en classe différentiable, à cause de sa simplicité.

Les Théorèmes 59 et 60 de tores invariants de dimension non maximale sont analogues ou liés à des résultats annoncés ou prouvés antérieurement, notamment [Mel65, Mel68, Par84, Eli85, Kuk88, Eli89, Pös89, Rüs90, Rüs94, CS94, Sev95, Bou97]. Nous renvoyons à [Sev03] pour une histoire et une bibliographie beaucoup plus complètes. Ces deux théorèmes utilisent la condition de non-dégénérescence de l'application fréquence d'Arnold-Pyartli [Pya69] (Définition 57).

D'autre part, Herman a démontré que le problème des  $n$  corps dans l'espace satisfait d'une certaine façon à la condition de non-dégénérescence de Kolmogorov, ce qui n'est pas nécessaire pour démontrer le théorème d'Arnold. Je me suis limité ici à vérifier la condition d'Arnold-Pyartli, par récurrence sur le nombre  $n$  de planètes.

Le corps de cet article commence, dans la deuxième partie, par des rappels sur la catégorie des bons espaces de Fréchet et sur le Théorème 18 d'inversion locale de Nash-Moser-Sergeraert-Hamilton. Dans la troisième partie on démontre des lemmes de redressement infinitésimal de flots et de tores. Dans la quatrième partie on démontre un Théorème 38 de forme normale pour les hamiltoniens proches d'un hamiltonien ayant un tore invariant isotrope quasipériodique diophantien. Cette forme normale définit une conjugaison à un hamiltonien possédant un tore invariant diophantien, tordue par une correction de la fréquence. L'existence de tores invariants ne découle pas directement de l'existence de cette conjugaison tordue, et c'est l'objet de la cinquième partie que d'établir des conditions sous lesquelles on peut en déduire l'existence d'un ensemble transversalement cantorien de tores invariants : condition de Kolmogorov (Théorème 43), puis condition d'Arnold-Pyartli (Théorème 59). Un théorème de stabilité 60, qui complète le Théorème 59 est prouvé. Dans la sixième partie on définit la dynamique séculaire du système planétaire (1) et on introduit deux développements classiques de l'hamiltonien séculaire au voisinage de sa singularité elliptique. Dans la septième partie, on montre comment ramener le système planétaire à un système satisfaisant à la condition d'Arnold-Pyartli. Enfin la question du rapport entre le théorème d'Arnold et la question de la stabilité du Système solaire est succinctement discutée. Un appendice décrit les notations tensorielles utilisées.

## 2. Inversion locale dans les bons espaces de Fréchet

Reprenant et raffinant les travaux de Sergeraert [Ser72], Hamilton [Ham82] a énoncé une version différentiable du théorème de Nash-Moser [Nas56, Mos61] que nous utiliserons de façon cruciale pour démontrer le Théorème 38 de forme normale. Le théorème de Sergeraert-Hamilton est un analogue pour la catégorie des « bonnes » applications entre « bons » espaces de Fréchet du théorème d'inversion locale dans les espaces de Banach. Pour commodité j'inclus quelques rappels sur cette catégorie. Les démonstrations omises sont dans [Ser72], dans [Ham82] ou dans

des références spécifiques indiquées au fur et à mesure.

### 2.1. La catégorie des bons espaces de Fréchet

DÉFINITION 2. Un *espace de Fréchet* est un espace vectoriel topologique séparé, séparable, localement convexe et complet.

La propriété de convexité locale signifie que l'origine admet un système fondamental de voisinages convexes. La caractérisation suivante de la convexité locale est démontrée par exemple dans [Sch64, I-9] :

THÉORÈME 3. *Un espace vectoriel topologique  $E$  est localement convexe si et seulement si il existe une famille de semi-normes définissant la topologie de  $E$ .*

Une telle famille, quand elle est dénombrable, est un *échelonnement* et son existence fait de  $E$  un espace métrisable. †

DÉFINITION 4. Un *espace de Fréchet échelonné* est un couple formé d'un espace de Fréchet et d'un échelonnement de cet espace de Fréchet.

EXEMPLE 5. Soit  $M$  une variété compacte de dimension finie et de classe  $C^\infty$ , éventuellement à bord. Soit  $E$  un fibré vectoriel de classe  $C^\infty$  et de rang fini au-dessus de  $M$ . L'espace  $\Gamma^\infty(E)$  des sections de classe  $C^\infty$  du fibré, muni de la topologie  $C^\infty$ , est un espace de Fréchet.

Pour s'assurer de la convergence de l'algorithme de Newton dans la démonstration du théorème d'inversion locale, on a besoin de certaines estimations d'interpolations sur les semi-normes, dont l'existence est assurée par l'hypothèse de « bonté » suivante :

DÉFINITION 6. Une *famille d'opérateurs de lissage* sur un espace de Fréchet échelonné  $(E, (\|\cdot\|_j)_{j \in \mathbb{N}})$  est une famille  $(S_t)_{t > 1}$  d'applications linéaires continues de  $E$  dans lui-même, telle qu'il existe des réels  $C_{j,k}$ ,  $(j, k) \in \mathbb{N}^2$ , tels que pour tous  $x \in E$ ,  $t > 1$  et  $j < k$  on ait

$$\begin{cases} \|S_t x\|_k \leq C_{k,j} t^{k-j} \|x\|_j & \text{(régularisation)} \\ \|(\text{id} - S_t)x\|_j \leq C_{j,k} t^{j-k} \|x\|_k & \text{(approximation de l'identité)}. \end{cases}$$

L'espace  $E$  est *bon* si on peut le munir d'une famille d'opérateurs de lissage.

(Un bon espace de Fréchet dans ce sens est essentiellement ce que Sergeraert appelle un  *$\mathcal{L}$ -objet*. Les *tame Fréchet spaces* d'Hamilton sont, en particulier, de bons espaces de Fréchet.)

EXEMPLE 7. L'espace des sections du fibré  $E$  comme ci-dessus est un bon espace de Fréchet [Ham74] (pour voir comment construire des opérateurs de lissage comme opérateurs de convolution, voir aussi Hirsch [Hir76], et, pour le problème spécifique des bords, voir Seeley [See64]).

†. Merci à M. Garay pour ses explications sur ce sujet.

DÉFINITION 8. Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Fréchet et soit  $\Phi : U \rightarrow F$  une application continue d'un ouvert  $U$  de  $E$  vers  $F$ . La *différentielle de Gâteaux* ou *différentielle radiale* de  $\Phi$ , si elle existe, est l'unique application

$$D\Phi : U \times E \rightarrow F, \quad (x, h) \mapsto D\Phi(x) \cdot h,$$

linéaire dans sa seconde variable, telle que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + ty) - \Phi(x)}{t} = D\Phi(x) \cdot y.$$

L'application  $\Phi$  est *continûment différentiable* ou *de classe  $C^1$*  si elle possède une différentielle de Gâteaux continue; pour tout entier  $k \geq 2$ , elle est *de classe  $C^k$*  si elle est de classe  $C^1$  et si sa différentielle est de classe  $C^{k-1}$ ; elle est *de classe  $C^\infty$*  si elle est de classe  $C^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

*Remarques.*

— L'usage est de ne pas toujours préciser qu'il s'agit de la différentielle radiale, bien que dans le cas banachique de dimension infinie la différentiabilité radiale n'implique pas la différentiabilité habituelle.

— L'espace des applications linéaires continues de  $U$  dans  $F$  n'est généralement pas un bon espace de Fréchet. Donc il est préférable de voir  $D\Phi$  comme une application du bon espace de Fréchet  $TU = U \times E$  (muni de la structure produit naturelle) vers  $F$  que comme une application de  $U$  vers  $L(E, F)$ .

Soient  $(E, \|\cdot\|_{j \in \mathbb{N}})$  et  $(F, \|\cdot\|_{j \in \mathbb{N}})$  deux espaces de Fréchet échelonnés. Si  $E$  et  $F$  sont banachiques, une application continue d'un ouvert  $U$  de  $E$  vers  $F$  est localement bornée. Mais en général cette propriété n'est pas vérifiée, et on lui substitue le succédané suivant :

DÉFINITION 9. Une application  $\Phi : U \subset E \rightarrow F$  est *bonne* si pour tout point  $x_0$  de  $U$  il existe un voisinage  $V$  de  $x_0$  dans  $U$ , un entier  $r \in \mathbb{N}$  et des réels  $c_j > 0$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) tels que l'on ait

$$\|\Phi(x)\|_j \leq c_j(1 + \|x\|_{j+r})$$

pour tout point  $x \in V$  et pour tout entier  $j \in \mathbb{N}$ . L'application  $\Phi$  est une *bonne application  $C^k$*  ( $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ) si  $\Phi$  est de classe  $C^k$  et si  $\Phi$  et toutes ses différentielles  $D^j \Phi : U \times E^j \rightarrow F$  d'ordre  $j \leq k$  sont bonnes. Elle est un *bon difféomorphisme  $C^k$*  si elle est inversible et si  $\Phi$  et  $\Phi^{-1}$  sont de bonnes applications  $C^k$ .

L'entier  $r$  dans la définition s'appelle la *perte de différentiabilité* de l'application  $\Phi$ , à cause du cas particulier où  $E$  et  $F$  sont des espaces fonctionnels échelonnés par les topologies  $C^k$ .

Les bonnes applications qui sont linéaires dans certaines de leurs variables, notamment les différentielles, admettent des estimations linéaires dans ces facteurs :

LEMME 10. Soit  $L : (U \subset E) \times F \rightarrow G$  une bonne application ( $U \times F$  étant muni de la structure naturelle d'espace de Fréchet échelonné produit), linéaire dans le second facteur. Pour tout  $x_0 \in U$  il existe un voisinage  $V$  de  $x_0$ , un entier  $r \in \mathbb{N}$

et des réels  $c_j > 0$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) tels que pour tout point  $x \in V$ , pour tout  $y \in F$  et pour tout entier  $j \in \mathbb{N}$  on ait

$$\|L(x) \cdot y\|_j \leq c_j(\|x\|_{j+r} \|y\|_r + \|y\|_{j+r}). \quad (3)$$

*Démonstration.* Il existe un réel  $\epsilon > 0$  et deux entiers  $r$  et  $k \in \mathbb{N}$  tels que pour tous  $x \in U$  et  $\hat{y} \in F$  tels que  $\|x - x_0\|_k \leq \epsilon$  et  $\|\hat{y}\|_k \leq \epsilon$  on a

$$\|L(x) \cdot \hat{y}\|_j \leq c_j(1 + \|x\|_{j+r} + \|\hat{y}\|_{j+r}).$$

Soit maintenant  $y \in F$  quelconque. Soient  $\theta = \|y\|_k / \epsilon$  le facteur qui empêche d'appliquer l'estimation précédente directement à  $y$ , et soit  $\hat{y}$  tel que  $y = \theta\hat{y}$ . On a

$$\begin{aligned} \|L(x) \cdot y\|_j &\leq c_j\theta(1 + \|x\|_{j+r} + \|\hat{y}\|_{j+r}) \\ &\leq \frac{c_j}{\epsilon} \|y\|_k + \frac{c_j}{\epsilon} \|x\|_{j+r} \|y\|_k + c_j \|y\|_{j+r} \\ &\leq \frac{c_j}{\epsilon} \|x\|_{j+r} \|y\|_k + c_j \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right) \|y\|_{\max(k, j+r)}, \end{aligned}$$

d'où l'estimation découle en modifiant la définition des constantes  $c_j$  et  $r$ .  $\square$

LEMME 11. Une bonne application  $f : (U \subset E) \rightarrow F$  de classe  $C^1$  est localement lipschitzienne : pour tout  $x_0 \in U$  il existe un voisinage  $V$  de  $x_0$ , deux entiers  $r$  et  $k$  et des réels  $c_j > 0$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) tels que l'on ait

$$\|f(y) - f(x)\|_j \leq c_j(\|x\|_{j+r} \|y - x\|_k + \|y - x\|_{j+r}) \quad (4)$$

pour tous points  $x$  et  $y$  de  $V$  et pour tout entier  $j \in \mathbb{N}$ .

*Démonstration.* On a

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 Df(x + t(y - x)) \cdot (y - x) dt$$

(la définition et les propriétés élémentaires des intégrales dans les espaces de Fréchet sont détaillées dans [Ham82, I.2]). Le résultat découle alors du Lemme 10.  $\square$

On déduit des deux lemmes précédents le résultat important suivant :

PROPOSITION 12. Soient  $k \geq 1$  un entier et  $f : (U \subset E) \rightarrow F$  et  $g : (V \subset F) \rightarrow G$  deux bonnes applications de classe  $C^k$  telles que  $f(U) \subset \text{Int } V$ . Alors  $g \circ f$  est une bonne application de classe  $C^k$ .

*Démonstration.* Soient  $j \geq 0$  un entier,  $\epsilon > 0$  un réel,  $x \in U$  un point et  $v \in E$  un vecteur tel que  $\|v\|_j \leq \epsilon$ . Pour tout réel  $t \in ]-1, 1[$  on a

$$g \circ f(x + tv) - g \circ f(x) = \int_0^1 Dg(f(x) + \theta(f(x + tv) - f(x))) \cdot (f(x + tv) - f(x)) d\theta.$$

La dérivabilité de  $f$  et la continuité de  $Dg$  montrent que

$$\lim_{t \rightarrow 0} Dg(f(x) + \theta(f(x + tv) - f(x))) \cdot \frac{1}{t}(f(x + tv) - f(x)) = Dg(f(x)) \cdot Df(x) \cdot v.$$

Or si  $j$  est assez grand et si  $\epsilon$  est assez petit les lemmes 10 et 11 montrent qu'il existe une constante  $c_j(x, v)$  telle que quand  $t$  tend vers 0 on a

$$\left\| Dg(f(x) + \theta(f(x + tv) - f(x))) \cdot \frac{1}{t}(f(x + tv) - f(x)) \right\|_j \leq c_j(x, v).$$

Donc d'après le théorème de convergence dominée on a

$$\left\| \frac{g \circ f(x + tv) - g \circ f(x)}{t} - Dg(f(x)) \cdot Df(x) \cdot v \right\|_j \rightarrow_{t \rightarrow 0} 0.$$

La dérivée (radiale) de  $g \circ f$  vaut donc  $Dg \circ f \cdot Df$ , qui est une bonne application de classe  $C^0$ . La proposition s'en déduit par récurrence sur  $k$ .  $\square$

**DÉFINITION 13.** Une *bonne variété fréchétiq*ue est une variété modelée sur la catégorie dont les objets sont les ouverts des bons espaces de Fréchet et dont les morphismes entre deux objets  $U$  et  $V$  sont les applications  $\Phi : U \rightarrow V$  qui sont de bons difféomorphismes  $C^k$  sur leur image. De même, un *bon groupe de Lie fréchétiq*ue est une bonne variété fréchétique et un groupe de Lie dont la loi et l'opération d'inversion sont de bonnes applications  $C^\infty$ .

**EXEMPLE 14.** Si  $M$  est une variété compacte et si  $E \rightarrow M$  est une fibration, l'espace  $\Gamma^\infty(E)$  des sections différentiables de la fibration est une bonne variété de Fréchet. En particulier, l'espace  $C^\infty(M, N)$  des applications différentiables de  $M$  dans une autre variété  $N$  est une bonne variété fréchétique ; et le groupe  $\text{Diff}^\infty(M)$  des difféomorphismes de  $M$ , ainsi que le groupe  $\text{Diff}_\omega^\infty(M)$  des difféomorphismes symplectiques si  $M$  est symplectique ou le groupe  $\text{Diff}_\lambda^\infty(M)$  des difféomorphismes symplectiques exacts si  $M$  est symplectique exacte, sont de bons groupes de Lie fréchétiques. Cf. [Ham82, II.2.3.1].

**EXEMPLE 15.** Soient  $M$  une variété compacte,  $V \rightarrow M$  et  $W \rightarrow M$  deux fibrations au-dessus de  $M$  et  $P : \Gamma^\infty(V) \rightarrow \Gamma^\infty(W)$  un opérateur différentiel de degré  $r$ . L'opérateur  $P$  est une bonne application de classe  $C^\infty$ , dont la perte de différentiabilité vaut  $r$ . Cf. [Ham82, II.2.2.7].

**EXEMPLE 16.** Soient  $M$ ,  $N$  et  $P$  trois variétés différentielles. L'application  $C^\infty(M, \text{Int}(N)) \times C^\infty(N, P) \rightarrow C^\infty(M, P)$ ,  $(f, g) \mapsto g \circ f$  est une bonne application de classe  $C^\infty$ . Cf. [Ser72, Hör76] ou [Ham82, II.2.3.3].

**EXEMPLE 17.** L'application  $\mathcal{J} : \text{Diff}^\infty(M) \rightarrow \text{Diff}^\infty(M)$ ,  $G \mapsto G^{-1}$ , est un bon difféomorphisme tel que

$$D\mathcal{J}(G) \cdot \Delta G = -((DG)^{-1} \cdot \Delta G) \circ G^{-1}.$$

On en déduit que l'application « dérivation cotangente »  $\mathcal{J} : \text{Diff}^\infty(M) \rightarrow \text{Diff}^\infty(T^*M)$ ,  $\varphi \mapsto {}^t(D\varphi)^{-1}$  est une bonne application  $C^\infty$  telle que

$$D\mathcal{J}(\varphi) \cdot \Delta\varphi = -{}^t((D\varphi)^{-1} \cdot D(\Delta\varphi) \cdot (D\varphi)^{-1}).$$

2.2. *Théorème d'inversion locale et théorème d'extension de Whitney* Le théorème suivant est la raison des définitions précédentes, et le résultat essentiel de ces rappels.

THÉORÈME 18 ([SER72, HAM74, HAM82]) *Soient  $E$  et  $F$  deux bons espaces de Fréchet,  $U$  un ouvert de  $E$ ,  $\Phi$  une bonne application  $C^k$  ( $2 \leq k \leq \infty$ ) de  $U$  dans  $F$ ,  $x_0$  un point de  $U$  et  $y_0 = \Phi(x_0)$ .*

*Supposons qu'il existe une bonne application  $L : U \times F \rightarrow E$  linéaire en la seconde variable, continue et telle que, si  $x \in U$ ,  $L(x)$  soit l'inverse de  $D\Phi(x)$ .*

*Alors il existe des voisinages ouverts  $U_0$  de  $x_0$  dans  $U$  et  $V_0$  de  $y_0$  dans  $F$  tels que la restriction  $\Phi : U_0 \rightarrow V_0$  soit un bon difféomorphisme  $C^k$ .*

Nous aurons besoin d'une version renforcée de ce théorème, qui répond aux deux questions suivantes :

— comment la taille de l'image locale de  $\Phi$  dépend-elle des bonnes estimations de  $\Phi$  et de l'inverse local  $L$  de sa différentielle ?

— quelle est la régularité de l'inverse local de  $\Phi$  comme fonction de paramètres variant dans un fermé d'un espace de dimension finie (pour ce qui nous occupe, ce fermé sera un ensemble transversalement cantorien de vecteurs diophantiens) ?

Sous les hypothèses du Théorème 18, quitte à restreindre l'ouvert  $U$  et en supposant pour simplifier que  $x_0 = 0$  et  $y_0 = 0$ , il existe des réels  $c_j$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) et des entiers  $r$  et  $l$  tels que pour tous  $x \in U$ ,  $\xi, \xi_1, \xi_2 \in E$  et  $\eta \in F$  on ait

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\Phi(x)\|_j \leq c_j \|x\|_{j+r} \\ \|D\Phi(x) \cdot \xi\|_j \leq c_j \left( \|x\|_{j+r} \|\xi\|_l + \|\xi\|_{j+r} \right) \\ \|D^2\Phi(x) \cdot (\xi_1 \xi_2)\|_j \leq c_j \left( \|x\|_{j+r} \|\xi_1\|_l \|\xi_2\|_l + \|\xi_1\|_{j+r} \|\xi_2\|_l + \|\xi_1\|_l \|\xi_2\|_{j+r} \right) \\ \|L(x) \cdot \eta\|_j \leq c_j \left( \|x\|_{j+r} \|\eta\|_l + \|\eta\|_{j+r} \right) ; \end{array} \right. \quad (5)$$

ces estimations résultent de la Définition 9 et des lemmes 10 et 11.

COROLLAIRE 19. *Soient  $E$  et  $F$  deux bons espaces de Fréchet,  $U$  un ouvert de  $E$  contenant l'origine,  $A$  un ouvert relativement compact de  $\mathbb{R}^p$ ,*

$$\Phi : U \times A \rightarrow F, \quad (x, a) \mapsto \Phi_a(x) = \Phi(x, a)$$

*une application telle que  $\Phi_a(0) = 0$  pour tout  $a \in A$ , et  $A_0$  un fermé de  $A$  tels que les propriétés suivantes soient vérifiées :*

— *pour tout  $a \in A_0$  l'application partielle  $\Phi_a$  est une bonne application de classe  $C^k$  ( $2 \leq k \leq \infty$ );*

— *pour tout  $a \in A_0$ , il existe une bonne application  $L_a : U \times F \rightarrow E$  linéaire en la seconde variable, continue et telle que, si  $x \in U$ ,  $L_a(x) : F \rightarrow E$  soit l'inverse de  $D\Phi_a(x)$  ;*

—  *$\Phi$  et  $L$  sont bonnes uniformément sur  $A_0$  : il existe des réels  $c_j$  et des entiers  $r$  et  $l$  tels que pour tout  $a \in A_0$  les applications  $\Phi_a$ ,  $D\Phi_a$ ,  $D^2\Phi_a$  et  $L_a$  satisfont aux estimations (5).*

Alors il existe des voisinages ouverts  $U_0$  de  $x_0 = 0$  dans  $U$  et  $V_0$  de  $y_0 = 0$  dans  $F$ , trois entiers naturels  $j_0 < j_1$  et  $n_0$  et un réel  $C > 0$  tels que pour tout  $a \in A_0$  :

- l'application  $\Phi_a : U_0 \rightarrow V_0$  est un bon  $C^k$ -difféomorphisme ;
- $V_0$  contient une  $j_1$ -semi-boule de rayon  $C(c_{j_0})^{-n_0}$  : pour tout  $y \in F$  tel que  $\|y\|_{j_1} \leq C(c_{j_0})^{-n_0}$ , quel que soit  $a \in A_0$  il existe un unique  $x \in U_0$  tel que  $y = \Phi_a(x)$ .

Les constantes  $C$ ,  $j_0$  et  $j_1$  ne dépendent que des ouverts  $U$  et  $V$ , des entiers  $r$  et  $l$  et des réels  $c_j$ .

Ce corollaire découle de la démonstration du Théorème 18, avec par exemple  $j_1 = 21r$  et  $n_0 = 3$ .

Pour répondre à la seconde question posée après l'énoncé du Théorème 18, il est commode d'avoir une version du théorème d'extension de Whitney pour les applications à valeurs dans un espace de Fréchet.  $A$  désigne toujours un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ ,  $A_0 \subset A$  un fermé et  $E$  un espace de Fréchet.

DÉFINITION 20. Une application  $\Psi : A_0 \rightarrow E$  est de classe  $C^m$  au sens de Whitney ( $m \in \mathbb{N}$ ) s'il existe des applications  $\Psi_0, \dots, \Psi_m$  avec  $\Psi_0 = \Psi$ ,  $\Psi_l : A_0 \rightarrow L_s^l(\mathbb{R}^p, E)$  (l'espace d'arrivée étant l'espace des applications  $l$ -linéaires symétriques sur  $\mathbb{R}^p$ ),  $l = 0, \dots, m$ , telles que la condition  $(W_l)$  suivante soit satisfaite pour tout  $l = 0, \dots, m$  :

$(W_l)$  Si  $R_l : A_0 \times A_0 \rightarrow L_s^l(\mathbb{R}^p, E)$  est définie par

$$\Psi_l(y) = \sum_{i \leq m-l} \frac{1}{i!} \Psi_{l+i}(x) \cdot (y - x)^i + R_l(x, y),$$

alors pour tout  $x_0 \in A_0$  on a

$$\lim_{x_1, x_2 \rightarrow x_0} \frac{R_l(x_1, x_2)}{\|x_1 - x_2\|^{m-l}} = 0.$$

Elle est de classe  $C^\infty$  au sens de Whitney si elle est de classe  $C^m$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $0 \leq m \leq \infty$ , on note  $C^k(A_0, E)$  l'espace des applications de classe  $C^m$  au sens de Whitney.

THÉORÈME 21 (WHITNEY) *Si l'application  $\Psi$  précédente est de classe  $C^m$  au sens de Whitney ( $m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ ), elle peut être prolongée en une fonction  $\widehat{\Psi} : \mathbb{R}^p \rightarrow E$  de classe  $C^m$ . De plus, si  $\Psi_0, \dots, \Psi_m$  sont des applications telles que dans la définition précédente, on peut choisir le prolongement  $\widehat{\Psi}$  de sorte que son jet d'ordre  $m$  le long de  $A_0$  coïncide avec  $(\Psi_0, \dots, \Psi_m)$ .*

*Dans le cas particulier où  $E = \mathbb{R}^p$ , on peut définir un opérateur linéaire d'extension  $C^m(A_0, \mathbb{R}^p) \rightarrow C^m(A, \mathbb{R}^p)$  qui soit continu.*

Dans le cas particulier où  $\Psi$  est à valeurs dans un espace de Banach, la démonstration de la première partie du théorème se trouve par exemple dans l'appendice de [AR67]. Pour en déduire le cas général, où  $\Psi$  est à valeurs dans un espace de Fréchet, il suffit d'établir les estimations utiles en remplaçant la

norme de l'espace de Banach successivement par chacune des semi-normes d'un échelonnement quelconque de  $E$ . Pour la seconde partie du théorème voir [Ste70] ou [Pös82].

**COROLLAIRE 22.** *Sous les hypothèses du corollaire 19 et si de plus l'application  $\Phi : U \times A \rightarrow F$  est de classe  $C^k$ , l'application  $(a, y) \in A_0 \times V_0 \mapsto \Phi_a^{-1}(y)$  se prolonge en une application de classe  $C^k$  sur l'ouvert  $A \times V_0$ .*

*Démonstration.* Quand  $a \in A_0$ , le Théorème 18 s'applique non seulement à l'équation initiale  $\Phi_a(x) = y$ , mais à l'ensemble des  $k + 1$  équations obtenues par dérivations successives de l'équation initiale par rapport à  $a$ . On obtient ainsi un  $k$ -jet de famille de solutions le long de  $A_0$ , qui dépend de  $a$  de façon  $C^k$  au sens de Whitney. Un point  $y \in V_0$  étant fixé, le Théorème 21 montre donc que l'on peut prolonger ce jet. La démonstration du Théorème 21 montre en fait que l'on peut prolonger l'application  $(a, y) \mapsto \Phi_a^{-1}(y)$  de façon  $C^k$  sur  $A \times V_0$ .  $\square$

(Notons que dans l'appendice de [AR67] l'espace source est un espace de Banach, tandis que pour nous l'espace source est le produit d'un espace de dimension finie et d'un espace de Fréchet. Si l'on voulait remplacer  $A$  par un ouvert d'un espace de Banach, il faudrait préciser si l'on considère la différentiabilité habituelle ou la différentiabilité radiale. Voir aussi [Kri99, Ch. 4].)

**2.3. Une propriété de compacité** La définition suivante est à rapprocher des estimations (3) satisfaites pour toutes les applications linéaires dans une variable et des estimations (4).

**DÉFINITION 23.** Soient  $E, F$  et  $G$  trois bons espaces de Fréchet,  $U$  un ouvert de  $E$ ,  $f : U \times F \rightarrow G$ ,  $(x, y) \mapsto f(x) \cdot y$ , un bon morphisme, linéaire dans le second facteur. Ce morphisme est une *perturbation compacte* s'il existe sur  $F$  une norme  $\|\cdot\|_0$ , un entier  $r$  et des réels  $c_j > 0$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) tels que pour tout  $(x, y) \in U \times F$  on ait

$$\left. \begin{aligned} \|f(x) \cdot y\|_j &\leq c_j(1 + \|x\|_{j+r}) \|y\|_0 \\ \|f(x) \cdot y - f(x') \cdot y\|_j &\leq c_j(\|x - x'\|_{j+r} + \|x\|_{j+r} \|x - x'\|_r) \|y\|_0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

(Dans la terminologie de Bost [Bos85], une perturbation compacte est une application *vérifiant la propriété P*.)

La première estimation de (6) est la condition pour que  $f(x)$  se prolonge en une application du complété  $\hat{F}$  de l'espace vectoriel normé  $(F, \|\cdot\|_0)$  à valeurs dans  $G$  et que son prolongement  $\hat{f}(x) \in \hat{F}_0$  soit une fonction continue. La seconde estimation assure que la famille de ces prolongements est lipschitzienne en  $x$ .

**EXEMPLE 24.** Si  $F$  est un espace de Banach ou si  $f$  est à valeurs dans un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $G$ , c'est une perturbation compacte (voir le Lemme 10).

Le fait que la différentielle  $D\Phi(0)$  d'une bonne application différentiable en 0 soit un bon isomorphisme n'implique pas que la différentielle  $D\Phi(x)$  en un point  $x$  voisin de 0 soit un isomorphisme ; comme nous le verrons au paragraphe 4.1 ceci aurait

eut pour conséquence absurde que la propriété d'avoir un tore invariant diophantien fût ouverte, ce qui montre au passage un contre-exemple au théorème d'inversion locale dans les espaces de Fréchet. Les perturbations compactes jouissent cependant de la propriété suivante, analogue à celle des perturbations linéaires d'applications linéaires dans les espaces de Banach.

LEMME 25 ([BOS85]) *Soient  $E, F$  et  $G$  trois espaces de Fréchet,  $U$  un ouvert de  $E$ ,  $x_0$  un point de  $U$  et  $L$  et  $l$  deux applications de  $U \times F$  dans  $G$ , linéaires dans leur seconde variable. Supposons satisfaites les conditions suivantes :*

— *pour tout  $x \in U$ ,  $L(x) : F \rightarrow G$  est inversible, et l'application  $L^{-1} : U \times G \rightarrow F$ ,  $(x, z) \mapsto L(x)^{-1} \cdot z$ , est une bonne application de classe  $C^1$  ;*

— *l'application  $l$  est une perturbation compacte ;*

— *l'application  $L(x_0) + l(x_0)$  est inversible et les applications  $L(x_0) : F \rightarrow G$  et  $(L(x_0) + l(x_0))^{-1} : G \rightarrow F$  sont bonnes.*

*Alors il existe un voisinage  $V \subset U$  de  $x_0$  dans  $E$  tel que pour tout  $x \in V$  l'application  $L(x) + l(x)$  soit inversible et l'application  $(L + l)^{-1} : V \times G \rightarrow F$ ,  $(x, z) \mapsto (L(x) + l(x))^{-1} \cdot z$  soit une bonne application de classe  $C^0$ .*

### 3. Équations linéaires de redressement infinitésimal

Les lemmes suivants serviront dans la démonstration du Théorème 38. Leur propre démonstration est élémentaire si l'on utilise le résultat classique suivant. Soient  $\mathbb{T}^p = \mathbb{R}^p/\mathbb{Z}^p$ ,  $p \in \mathbb{N}_*$ , le  $p$ -tore standard,  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^p, \mathbb{C}^q)$  l'espace des suites complexes indexées par  $\mathbb{Z}^p$  et à décroissance rapide, et

$$C^\infty(\mathbb{T}^p, \mathbb{C}^q) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{Z}^p, \mathbb{C}^q), \quad f \mapsto \left( \hat{f} : k \mapsto \hat{f}(k) = \int_{\mathbb{T}^p} f(\theta) e^{-i2\pi k\theta} d\theta \right)$$

la transformation de Fourier. Cette dernière est un isomorphisme et il existe des réels  $A_j, A'_j > 0$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) tels que pour toute fonction  $f \in C^\infty(\mathbb{T}^p, \mathbb{C}^q)$  et pour tout  $j \in \mathbb{N}$  on ait

$$\|f\|_{C^j} \leq A_j \|\hat{f}\|_{j+p+1} \quad \text{et} \quad \|\hat{f}\|_j \leq A'_j \|f\|_{C^j},$$

où  $\|f\|_{C^j}$  est une norme  $C^j$  de  $f$  et où  $\|\hat{f}\|_j$  est une norme  $l^j$  de  $\hat{f}$ , par exemple

$$\|\hat{f}\|_j = \sup_{k \in \mathbb{Z}^p} (1 + \|k\|)^j \|\hat{f}(k)\|, \quad \text{avec} \quad \|\hat{f}(k)\| = \sqrt{|\hat{f}(k)_1|^2 + \dots + |\hat{f}(k)_q|^2}.$$

Dans cette partie nous utilisons tacitement ces inégalités, et les constantes  $A_j$  et  $A'_j$  sont fixées une fois pour toutes.

3.1. *Redressement du flot d'un tore* Le résultat suivant permettra de résoudre les équations cohomologiques du redressement infinitésimal

- d'un champ de vecteurs sur le tore  $\mathbb{T}^p = \mathbb{R}^p/\mathbb{Z}^p$  (équation (20) à venir)
- et d'un tore lagrangien (équation (19) à venir).

Notons

$$C_0^\infty(\mathbb{T}^p, \mathbb{R}^q) = \{f \in C^\infty(\mathbb{T}^p, \mathbb{R}^q), f(0) = 0\}$$

et

$$C_*^\infty(\mathbb{T}^p, \mathbb{R}^q) = \{f \in C^\infty(\mathbb{T}^p, \mathbb{R}^q), \int_{\mathbb{T}^p} f \, d\theta = 0\}.$$

Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}^p$ , la dérivation de Lie par rapport au champ de vecteurs constant  $\alpha$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\alpha : C_0^\infty(\mathbb{T}^p, \mathbb{R}^q) &\rightarrow C_*^\infty(\mathbb{T}^p, \mathbb{R}^q) \\ f &\mapsto Df \cdot \alpha, \end{aligned}$$

est une bonne application entre bons espaces de Fréchet.

LEMME 26. *L'application  $\mathcal{L}_\alpha$  est un bon isomorphisme si et seulement si il existe deux réels  $\gamma > 0, \tau \geq 0$  tels que*

$$|k \cdot \alpha| \geq \frac{\gamma}{\|k\|^\tau} \quad (\forall k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}). \quad (7)$$

*De plus, pour tous  $\gamma > 0, \tau \geq 0$ , pour tout  $\alpha$  satisfaisant aux conditions (7) et pour toute fonction  $g \in C_*^\infty(\mathbb{T}^p, \mathbb{R}^q)$  l'inégalité suivante est vérifiée :*

$$\|\mathcal{L}_\alpha^{-1}g\|_{C^j} \leq (2\pi\gamma)^{-1} A_j A'_{j+p+\tau+1} \|g\|_{C^{j+p+\tau+1}} \quad (\forall j \in \mathbb{N}).$$

3.2. *Redressement normal d'un tore* Le Lemme 29 suivant permettra de résoudre l'équation cohomologique du redressement infinitésimal, dans les directions normales qui lui sont symplectiquement orthogonales, d'un tore isotrope de dimension non maximale (équation (21) à venir).

Commençons par une version scalaire et complexe de ce lemme. Pour tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$  et tout  $s \in \{1, i = \sqrt{-1}\}$  notons  $L_{\alpha, \beta, s}^1$  la bonne application

$$\begin{aligned} L_{\alpha, \beta, s}^1 : C^\infty(\mathbb{T}^p, \mathbb{C}) &\rightarrow C^\infty(\mathbb{T}^p, \mathbb{C}) \\ \zeta &\mapsto D\zeta \cdot \alpha + 2\pi s\beta\zeta. \end{aligned}$$

LEMME 27. —  *$L_{\alpha, \beta, i}^1$  est un bon isomorphisme si et seulement si il existe deux réels  $\gamma > 0, \tau \geq 0$  tels qu'on ait*

$$|k \cdot \alpha + \beta| \geq \frac{\gamma}{(\|k\| + 1)^\tau} \quad (\forall k \in \mathbb{Z}). \quad (8)$$

*De plus, pour tous  $\gamma > 0, \tau \geq 0$ , pour tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$  vérifiant (8) et pour toute fonction  $\xi \in C^\infty(\mathbb{T}^p, \mathbb{C})$  on a*

$$\|(L_{\alpha, \beta, i}^1)^{-1}\xi\|_{C^j} \leq (2\pi\gamma)^{-1} A_j A'_{j+p+\tau+1} \|\xi\|_{C^{j+p+\tau+1}} \quad (\forall j \in \mathbb{N}).$$

—  *$L_{\alpha, \beta, 1}^1$  est un bon isomorphisme si et seulement si  $\beta \neq 0$ . De plus, pour tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_*$  et pour toute fonction  $\xi \in C^\infty(\mathbb{T}^p, \mathbb{C})$  on a*

$$\|(L_{\alpha, \beta, 1}^1)^{-1}\xi\|_{C^j} \leq (2\pi\beta)^{-1} A_j A'_{j+p+1} \|\xi\|_{C^{j+p+1}} \quad (\forall j \in \mathbb{N}).$$

On peut faire remonter au Lemme 27 (et au Lemme 30) le fait que dans les systèmes conservatifs les fréquences des directions elliptiques ( $\beta''$ ) interfèrent avec les fréquences tangentielles ( $\alpha$ ), au contraire des fréquences des directions hyperboliques ( $\beta'$ ).

Pour  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ ,  $q' \in \{0, \dots, q\}$ ,  $B = \text{Diag}(\beta_1, \dots, \beta_{q'}, i\beta_{q'+1}, i\beta_q)$  (cette notation signifiant que  $B$  est la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les  $q$  nombres complexes énumérés) et  $P \in \text{GL}_q(\mathbb{C})$ , considérons la bonne application

$$L^2 = L_{\alpha, \beta, q'}^2 : C^\infty(\mathbb{T}^p, \mathbb{C}^q) \rightarrow C^\infty(\mathbb{T}^p, \mathbb{C}^q) \\ \zeta \mapsto D\zeta \cdot \alpha + 2\pi P^{-1} \cdot B \cdot P \cdot \zeta.$$

La version matricielle complexe suivante se déduit directement du lemme précédent en faisant le changement de variable  $\zeta' = P\zeta$ .

LEMME 28. *L'application  $L^2$  est un bon isomorphisme si et seulement s'il existe des réels  $\gamma > 0, \tau \geq 0$  tels que on ait*

$$\left. \begin{array}{l} |\beta_j| \geq \gamma \\ |k \cdot \alpha + \beta_j| \geq \frac{\gamma}{(\|k\| + 1)^\tau} \end{array} \quad (\forall k \in \mathbb{Z}^p) \quad \begin{array}{l} (j = 1, \dots, q') \\ (j = q' + 1, \dots, q). \end{array} \right\} \quad (9)$$

De plus, pour tous  $\gamma > 0, \tau \geq 0$ , pour tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$  satisfaisant aux conditions (9) et pour toute fonction  $\xi \in C^\infty(\mathbb{T}^p, \mathbb{C}^q)$  on a

$$\|(L^2)^{-1}\xi\|_{C^j} \leq (2\pi\gamma)^{-1} A_j A'_{j+p+\tau+1} \|P^{-1}\| \|P\| \|\xi\|_{C^{j+p+\tau+1}} \quad (\forall j \in \mathbb{N}).$$

Pour tout  $q' \in \{0, \dots, q\}$  et pour tout vecteur  $\beta \in \mathbb{R}^q$ , notons  $Q_\beta^{q'}$  ou  $Q_\beta \in \text{M}_{2q}(\mathbb{R}) \equiv (\mathbb{R}^{2q})^{\otimes 2}$  la matrice

$$Q_\beta = 2\pi \text{Diag}(\beta_1, \dots, \beta_q, -\beta_1, \dots, -\beta_{q'}, \beta_{q'+1}, \dots, \beta_q)$$

et  $J \in \text{M}_{2q}(\mathbb{R})$  la structure complexe standard de  $\mathbb{R}^{2q}$ ,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\text{id}_{\mathbb{R}^q} \\ \text{id}_{\mathbb{R}^q} & 0 \end{pmatrix}.$$

L'entier  $q'$  est l'indice de la forme quadratique  $Q_\beta^{q'}$ . Si de plus on a  $\alpha \in \mathbb{R}^p$ , considérons l'application

$$L^3 = L_{\alpha, \beta, q'}^3 : C^\infty(\mathbb{T}^p, \mathbb{R}^{2q}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{T}^p, \mathbb{R}^{2q}) \\ \zeta \mapsto D\zeta \cdot \alpha - J \cdot Q_\beta \cdot \zeta.$$

LEMME 29.  *$L^3$  est un bon isomorphisme si et seulement s'il existe des réels  $\gamma > 0, \tau \geq 0$  tels que les inégalités (9) soient satisfaites. De plus, pour tous  $\gamma > 0, \tau \geq 0$ , pour tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$  satisfaisant aux conditions (9) et pour toute fonction  $\xi \in C^\infty(\mathbb{T}^p, \mathbb{R}^{2q})$  on a*

$$\|(L^3)^{-1}\xi\|_{C^j} \leq (2\pi\gamma)^{-1} A_j A'_{j+p+\tau+1} \|\xi\|_{C^{j+p+\tau+1}} \quad (\forall j \in \mathbb{N}).$$

*Démonstration.* La matrice  $Q_\beta$  est conjuguée à une matrice de la forme de  $B$  dans le lemme précédent. En outre, la norme de la matrice de passage multipliée par la norme de la matrice inverse vaut 1. Donc la version matricielle complexe du lemme s'applique.

De plus, pour tout  $\eta \in C^\infty(\mathbb{T}^p, \mathbb{R}^{2q})$ , le lemme précédent montre qu'il existe une unique application  $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^p, \mathbb{C}^{2q})$  telle que  $L^3(\zeta) = \eta$ . Or la fonction complexe conjuguée  $\bar{\psi}$  est aussi solution, donc  $\psi = \bar{\psi}$ . Donc  $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^p, \mathbb{R}^{2q})$ .  $\square$

**3.3. Redressement de la dynamique normale le long d'un tore** Le Lemme 31 permettra de résoudre l'équation cohomologique du redressement infinitésimal de la dynamique normale au premier ordre le long d'un tore invariant (équation (22) à venir). Certaines notes d'Herman sur cette partie sont erronées, suite à une mauvaise caractérisation des matrices symplectiques.

Commençons par une version diagonale complexe. Notons  $C_*^\infty(\mathbb{T}^p, (\mathbb{C}^{2q})^{\otimes 2})$ , avec  $(\mathbb{C}^{2q})^{\otimes 2} = M_{2q}(\mathbb{C})$ , l'espace vectoriel complexe

$$C_*^\infty(\mathbb{T}^p, (\mathbb{C}^{2q})^{\otimes 2}) = \left\{ \psi \in C^\infty(\mathbb{T}^p, (\mathbb{C}^{2q})^{\otimes 2}), \int_{\mathbb{T}^p} \psi_{jj}(\theta) d\theta = 0, j = 1, \dots, 2q \right\}$$

Pour  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ ,  $q' \in \{0, \dots, q\}$  et

$$\Delta_\beta^{q'} = \Delta_\beta = 2\pi \text{Diag}(\beta_1, \dots, \beta_{q'}, i\beta_{q'+1}, \dots, i\beta_q, -\beta_1, \dots, -\beta_{q'}, \dots, -i\beta_{q'+1}, \dots, -i\beta_q),$$

soit  $L^4 = L_{\alpha, \beta, q'}^4$  la bonne application

$$\begin{aligned} L^4 : C_*^\infty(\mathbb{T}^p, (\mathbb{C}^{2q})^{\otimes 2}) &\rightarrow C_*^\infty(\mathbb{T}^p, (\mathbb{C}^{2q})^{\otimes 2}) \\ \psi &\mapsto D\psi \cdot \alpha + [\Delta_\beta, \psi] = D\psi \cdot \alpha + \Delta_\beta \cdot \psi - \psi \cdot \Delta_\beta. \end{aligned}$$

Nous noterons  $|l| = |l_1| + \dots + |l_q|$  la longueur d'un multi-indice  $l \in \mathbb{Z}^p$ .

**LEMME 30.** *L'application  $L^4$  est un bon isomorphisme si et seulement s'il existe des réels  $\gamma > 0, \tau \geq 0$  tels qu'on ait, pour tous multi-entiers  $k \in \mathbb{Z}^p$ ,  $l' \in \mathbb{Z}^{q'}$  et  $l'' \in \mathbb{Z}^{q''}$  tels que  $|l'| = 1$  ou  $2$  et  $|l''| = 2$ ,*

$$\begin{aligned} |k \cdot \alpha| &\geq \frac{\gamma}{\|k\|^\tau} && (\text{si } k \neq 0) \\ |k \cdot \alpha + l'' \cdot \beta| &\geq \frac{\gamma}{(\|k\| + 1)^\tau} \\ |l' \cdot \beta'| &\geq \gamma \end{aligned} \tag{10}$$

*De plus, pour tous  $\gamma > 0, \tau \geq 0$ , pour tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$  satisfaisant aux conditions (10) et pour toute fonction  $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^p, (\mathbb{C}^{2q})^{\otimes 2})$  on a*

$$\|(L^4)^{-1}(\psi)\|_{C^j} \leq (2\pi\gamma)^{-1} A_j A'_{j+p+\tau+1} \|\psi\|_{C^{j+p+\tau+1}} \quad (\forall j \in \mathbb{N}).$$

Soit  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ . Reprenons la notation  $Q_\beta^{q'}$  ou  $Q_\beta$  pour désigner la matrice  $2\pi \text{Diag}(\beta_1, \dots, \beta_q, \beta_1, \dots, \beta_{q'}, -\beta_{q'+1}, -\beta_q)$ , et  $J$  pour la structure complexe standard de  $\mathbb{R}^{2q}$ . Soit  $L^5 = L_{\alpha, \beta}^5$  la bonne application

$$\begin{aligned} L^5 : C_*^\infty(\mathbb{T}^p, (\mathbb{C}^{2q})^{\otimes 2}) &\rightarrow C_*^\infty(\mathbb{T}^p, (\mathbb{C}^{2q})^{\otimes 2}) \\ \psi &\mapsto D\psi \cdot \alpha + [J \cdot Q_\beta, \psi] = D\psi \cdot \alpha + J \cdot Q_\beta \cdot \psi - \psi \cdot J \cdot Q_\beta. \end{aligned}$$

En remarquant que  $J \cdot Q_\beta^{q'}$  est conjuguée à la matrice  $\Delta_\beta^{q'}$ , et en procédant comme avec  $L^2$ , on en déduit que  $L^5$  est un difféomorphisme si et seulement si  $(\alpha, \beta)$  satisfait aux conditions 10; alors son inverse vérifie des estimations analogues.

Si  $\mathbb{K}$  est le corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , notons

$$\mathrm{sp}_{2q}(\mathbb{K}) = \{ \psi \in (\mathbb{K}^{2q})^{\otimes 2}, {}^t\psi J + J\psi = 0 \}$$

l'algèbre de Lie symplectique sur  $\mathbb{K}$  et  $C_*^\infty(\mathbb{T}^p, \mathrm{sp}_{2q}(\mathbb{K}))$  le sous-espace

$$\left\{ \psi \in C^\infty(\mathbb{T}^p, \mathrm{sp}_{2q}(\mathbb{K})), {}^t\psi = \psi \text{ et } \int_{\mathbb{T}^p} \psi_{jj}(\theta) d\theta = 0, j = 1, \dots, 2q \right\}. \quad (11)$$

En montrant que  $C_*^\infty(\mathbb{T}^p, \mathrm{sp}_{2q}(\mathbb{C}))$  et  $C_*^\infty(\mathbb{T}^p, (\mathbb{R}^q)^{\otimes 2})$  sont invariants, on en déduit finalement la version symplectique réelle suivante. Soit  $L^6 = L_{\alpha, \beta, q'}^6$  la bonne application

$$\begin{aligned} L^6 : C_*^\infty(\mathbb{T}^p, \mathrm{sp}_{2q}(\mathbb{R})) &\rightarrow C_*^\infty(\mathbb{T}^p, \mathrm{sp}_{2q}(\mathbb{R})) \\ \psi &\mapsto D\psi \cdot \alpha + [J \cdot Q_\beta, \psi] = D\psi \cdot \alpha + J \cdot Q_\beta \cdot \psi - \psi \cdot J \cdot Q_\beta. \end{aligned}$$

LEMME 31. *L'application  $L^6$  est un bon isomorphisme si et seulement si  $(\alpha, \beta)$  satisfait aux conditions arithmétiques (10).*

De plus, pour tous  $\gamma > 0, \tau \geq 0$ , pour tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$  satisfaisant aux conditions (10) et pour toute fonction  $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^p, \mathrm{sp}_{2q}(\mathbb{R}))$  on a

$$\| (L^6)^{-1}(\psi) \|_{C^j} \leq (2\pi\gamma)^{-1} A_j A'_{j+p+\tau+1} \| \xi \|_{C^{j+p+\tau+1}} \quad (\forall j \in \mathbb{N}).$$

3.4. *Conditions diophantiennes* Soient  $p \geq 1$  et  $q \geq 0$  deux entiers,  $\gamma > 0, \tau \geq 0$  deux réels, et  $q', q'' \in \{0, \dots, q\}$  deux entiers tels que  $q' + q'' = q$ . Soit  $(\alpha, \beta)$  un vecteur de  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ . Notons  $\beta' = (\beta_1, \dots, \beta_{q'}) \in \mathbb{R}^{q'}$  et  $\beta'' = (\beta_{q'+1}, \dots, \beta_q) \in \mathbb{R}^{q''}$ .

DÉFINITION 32. Le vecteur  $(\alpha, \beta)$  sera qualifié de  $(\gamma, \tau, p, q', q'')$ -diophantien s'il satisfait aux conditions (7), (9) et (10) : pour tous multi-entiers  $k \in \mathbb{Z}^p, l' \in \mathbb{Z}^{q'}$  et  $l'' \in \mathbb{Z}^{q''}$  tels que  $|l'|, |l''| = 1$  ou  $2$ ,

$$\begin{cases} |k \cdot \alpha| \geq \frac{\gamma}{\|k\|^\tau} & (\text{si } k \neq 0) \\ |l' \cdot \beta'| \geq \gamma \\ |k \cdot \alpha + l'' \cdot \beta''| \geq \frac{\gamma}{(\|k\| + 1)^\tau} \end{cases} \quad (12)$$

où  $\|k\| = \sqrt{k_1^2 + \dots + k_p^2}$ ,  $k \cdot \alpha = k_1 \alpha_1 + \dots + k_p \alpha_p$ ,  $|l'| = |l'_1| + \dots + |l'_{q'}|$  et de même pour  $l''$ . Nous noterons  $\mathrm{DH}_{\gamma, \tau}(p, q', q'')$  l'ensemble des vecteurs  $(\alpha, \beta)$  satisfaisant aux conditions (12). Posons enfin

$$\begin{aligned} \mathrm{DH}_\tau(p, q', q'') &= \cup_{\gamma > 0} \mathrm{DH}_{\gamma, \tau}(p, q', q''), \quad \mathrm{DH}(p, q', q'') = \cup_{\tau > 0} \mathrm{DH}_\tau(p, q', q''), \\ \mathrm{DH}_{\gamma, \tau}(p) &= \mathrm{DH}_{\gamma, \tau}(p, q' = 0, q'' = 0), \text{ etc.} \end{aligned}$$

Par opposition aux conditions analogues pour une application, celles-ci, qui sont pertinentes pour un champ de vecteurs, sont parfois qualifiées d'*homogènes* ou de *faibles*.

Comme  $q' + q'' = q$ , une comparaison élémentaire montre qu'il existe un réel  $\rho > 0$  tel que

$$\text{DH}_{\rho\gamma,\tau}(p+q) \subset \text{DH}_{\gamma,\tau}(p,q',q''); \quad (13)$$

nous utiliserons systématiquement cette inclusion pour minorer la mesure de  $\text{DH}_{\gamma,\tau}(p,q',q'')$ . Si  $\tau > p - 1$  et si  $\gamma$  est assez petit, l'ensemble  $\text{DH}_{\gamma,\tau}(p)$  est de mesure strictement positive et le cône  $\text{DH}_\tau(p)$  est de mesure pleine dans  $\mathbb{R}^p$ . Mieux, Pyartli a montré (Théorème 58) que presque tout point d'une sous-variété paramétrée non dégénérée (précisément, une sous-variété paramétrée gauche) de  $\mathbb{R}^p$  est dans  $\text{DH}_\tau(p)$  si  $\tau > p^2 - 1$ . En revanche, topologiquement, ce cône est un ensemble maigre transversalement cantorien (sa trace sur la sphère unité d'équation  $\|\alpha\| = 1$  est un ensemble de cantor).

Mentionnons encore les deux faits suivants. La première inégalité de (12) implique que  $\alpha_i \neq 0$  ( $i \in \{1, \dots, p\}$ ). Cette condition sera violée par l'approximation képlérienne du système planétaire des  $1 + n$  corps. En effet, si chaque planète subit l'attraction du seul soleil, la première loi de Kepler affirme en particulier que seules  $n$  fréquences sont non nulles, dans un problème à  $3n$  degrés de liberté (après réduction par la symétrie de translation). Il faudra pour cette raison tenir compte de la dynamique séculaire, forme normale qui décrit en dehors des résonances képlériennes comment l'interaction mutuelle des planètes lève la dégénérescence képlérienne. Par ailleurs, la troisième inégalité de (12) sera violée par le système séculaire lui-même, qui possède deux résonances : une première due à la symétrie de rotation, et une seconde, découverte dans sa généralité par Herman, de nature plus mystérieuse [AA01] mais qui disparaît aux ordres de moyennisation plus élevés [MRL02]. Voir §7.4.

#### 4. Formes normales d'hamiltoniens

4.1. *Un espace de symplectomorphismes hamiltoniens* Deux entiers  $p \geq 1$  et  $q \geq 0$  et un réel  $\delta > 0$  étant fixés, considérons la variété compacte à bords

$$\mathbb{P}_\delta = \mathbb{T}^p \times \bar{\mathbb{B}}_\delta^{p+2q} \subset \mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^{p+2q},$$

où  $\bar{\mathbb{B}}_\delta^{p+2q}$  est la boule euclidienne fermée de rayon  $\delta$  et de centre l'origine dans  $\mathbb{R}^{p+2q}$ . Nous noterons

$$(\theta, r, x, y) \in \mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q \quad \text{ou} \quad (\theta, r, z) \in \mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{C}^q$$

les coordonnées naturelles sur  $\mathbb{P}_\delta$ . Munissons  $\mathbb{P}_\delta$  de la métrique euclidienne standard  $\sum_{j=1}^p (d\theta_j^2 + dr_j^2) + \sum_{j=1}^q (dx_j^2 + dy_j^2)$ , qui permet d'identifier  $T^*\mathbb{P}_\delta$  à  $T\mathbb{P}_\delta$ , de la 1-forme de Liouville standard  $\lambda = r \cdot d\theta + y \cdot dx = \sum_{j=1}^p r_j d\theta_j + \sum_{j=1}^q y_j dx_j$  et de la forme symplectique standard

$$\omega = -d\lambda = \sum_{j=1}^p d\theta_j \wedge dr_j + \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^q d\bar{z}_j \wedge dz_j.$$

Pour toute fonction  $H \in C^\infty(\mathbb{P}_\delta) = C^\infty(\mathbb{P}_\delta, \mathbb{R})$  on note

$$\vec{H} = \sum_{j=1}^p (\partial_{r_j} H \partial_{\theta_j} - \partial_{\theta_j} H \partial_{r_j}) + \sum_{j=1}^q (\partial_{y_j} H \partial_{x_j} - \partial_{x_j} H \partial_{y_j})$$

son champ hamiltonien, où  $((\partial_{\theta_j}, \partial_{r_j})_{j=1, \dots, q}, (\partial_{x_j}, \partial_{y_j})_{j=1, \dots, q})$  est la base naturelle de  $T\mathbb{P}_\delta$ .

Pour  $q' \in \{0, \dots, q\}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^p$  et  $\beta \in \mathbb{R}^q$ , notons encore  $Q_\beta$  la matrice

$$Q_\beta = 2\pi \text{Diag}(\beta_1, \dots, \beta_q, -\beta_1, \dots, -\beta_{q'}, \beta_{q'+1}, \dots, \beta_q) \in M_{2q}(\mathbb{R})$$

et  $N_{\alpha, \beta}$  l'hamiltonien défini sur  $\mathbb{P}_\delta$  par

$$N_{\alpha, \beta} = \alpha \cdot r + \frac{1}{2} Q_\beta \cdot z^2 = \sum_{j=1}^p \alpha_j r_j + \pi \sum_{j=1}^{q'} \beta_j (x_j^2 - y_j^2) + \pi \sum_{j=q'+1}^q \beta_j (x_j^2 + y_j^2),$$

où  $z^2 = z \otimes z$  et où les points désignent des contractions tensorielles simples ou doubles. Soit  $\Delta\mathcal{N}$  l'espace vectoriel des hamiltoniens dont la forme normale de Birkhoff au premier ordre le long du tore  $\mathbb{T}_0^p = \mathbb{T}^p \times \{r = 0\} \times \{z = 0\}$  est nulle : c'est l'idéal

$$\Delta\mathcal{N} = O(r^2, rz, 3), \quad (14)$$

dans l'anneau des fonctions de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{P}_\delta$ , engendré par les fonctions linéaires de  $r^2$ , de  $rz$  ou de monômes de degré total 3 en  $r$  et  $z$ . Soit  $\mathcal{N}_{\alpha, \beta} = N_{\alpha, \beta} + \Delta\mathcal{N}$  le sous-espace affine des hamiltoniens ayant  $N_{\alpha, \beta}$  pour forme normale au premier ordre. Munissons  $\mathcal{N}_{\alpha, \beta}$  de la topologie induite par la topologie  $C^\infty$  du bon espace de Fréchet (cf. l'exemple 7) sur lequel il est modelé.

Notons  $B_1^\infty(\mathbb{T}^p)$  le groupe des 1-formes différentielles exactes de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{T}^p$ ,  $\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{T}^p)$  le groupe des difféomorphismes du tore fixant l'origine,

$$\text{Sp}(2q) = \{ \psi \in M_{2q}(\mathbb{R}), {}^t \psi J \psi = J \}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -\text{id}_{\mathbb{R}^q} \\ \text{id}_{\mathbb{R}^q} & 0 \end{pmatrix},$$

le groupe symplectique et

$$C_*^\infty(\mathbb{T}^p, \text{Sp}(2q)) = \{ \exp \Delta\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^p, \text{Sp}(2q)), \Delta\psi \in C_*^\infty(\mathbb{T}^p, \text{sp}_{2q}) \}$$

l'image par l'exponentielle de l'espace défini en (11).

Notons enfin

$$\mathcal{G} = B_1^\infty(\mathbb{T}^p) \times C^\infty(\mathbb{T}^p, \mathbb{R}^{2q}) \times \text{Diff}_0^\infty(\mathbb{T}^p) \times C_*^\infty(\mathbb{T}^p, \text{Sp}(2q)).$$

On munit  $\mathcal{G}$  de la topologie produit des bons groupes de Lie fréchétiques qui le composent (cf. les exemples 7 et 14).

Pour tout petit réel  $\delta > 0$  notons  $\mathcal{G}_\delta$  un voisinage petit en topologie  $C^\infty$  de  $(0, 0, \text{id}, \text{id})$  dans  $\mathcal{G}$ , dont la taille précise sera fixée ultérieurement en fonction de  $\delta$ . Nous allons plonger  $\mathcal{G}_\delta$  dans le groupe des difféomorphismes symplectiques hamiltoniens de  $\mathbb{P}_\delta$ . (L'image du plongement ne sera pas un sous-groupe et le plongement ne sera pas un morphisme de groupes.)

Le sous-groupe  $B_1^\infty(\mathbb{T}^p) \times C^\infty(\mathbb{T}^p, \mathbb{R}^{2q})$  a pour fonction de redresser le tore perturbé en le trivialisant au-dessus du tore non perturbé. Les 1-cobords redressent le tore perturbé dans la direction des actions, et les éléments de  $C^\infty(\mathbb{T}^p, \mathbb{R}^{2q})$  dans les directions elliptiques et hyperboliques. Le fait de ne considérer que des cobords, et non pas des 1-formes quelconques, est justifié par le lemme suivant et la remarque qui le suit :

LEMME 33. Soit  $H$  un hamiltonien sur  $\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{2q}$ . Un tore invariant quasipériodique ergodique du flot hamiltonien de  $H$  est isotrope.

*Démonstration.* Soit  $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{2q}$ ,  $\theta \mapsto f(\theta)$  un paramétrage du tore invariant tel que la restriction du flot au tore s'écrive  $\phi_t(\theta) = \theta + t\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^n$ . Notons

$$\varpi = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \varpi_{ij}(\theta) d\theta_i \wedge d\theta_j$$

l'image réciproque de  $\omega$  par  $f$ . Comme  $d\phi_t$  est l'identité, on a

$$\phi_t^* \varpi = \sum_{i < j} \varpi_{ij}(\theta + t\alpha) d\theta_i \wedge d\theta_j.$$

Comme  $\phi_t$  préserve  $\varpi$  et est ergodique, les fonctions  $\varpi_{ij}$ ,  $i < j$ , sont constantes sur  $\mathbb{T}^n$ . Enfin, puisque  $\omega$  est exacte il en est de même de  $\varpi$  et l'intégration de  $\varpi$  sur les tores  $(\theta_i, \theta_j)$ ,  $i < j$ , montre que  $\varpi$  est identiquement nulle.  $\square$

Si de plus le tore invariant est inclus dans  $\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^p \times \{z = 0\}$  et est  $C^1$ -proche de  $\mathbb{T}^p \times \{r = 0\} \times \{z = 0\}$ , il est l'image d'une 1-forme fermée sur  $\mathbb{T}^p$  (en identifiant  $T^*\mathbb{T}^p$  à  $\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^p \times \{0\}$ ). Enfin, si le tore est l'image de  $\mathbb{T}^p \times \{r = 0\} \times \{z = 0\}$  par un flot hamiltonien cette forme fermée est exacte.

Le sous-groupe  $\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{T}^p) \times C_*^\infty(\mathbb{T}^p, \text{Sp}(2q))$  a pour fonction de conjuguer la dynamique locale du tore perturbé à la dynamique voulue : conjugaison à un flot quasipériodique sur le tore grâce à  $\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{T}^p)$ , conjugaison locale de la dynamique normale à sa forme normale de Birkhoff au premier ordre le long du tore grâce à  $C_*^\infty(\mathbb{T}^p, \text{Sp}(2q))$ ; la pertinence de ce groupe est justifiée par les Théorèmes 40 et 41.

Plongeons d'abord  $\mathcal{G}_\delta$  dans le groupe  $\text{Diff}_\lambda^\infty(\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^{p+2q})$  des difféomorphismes symplectiques exacts de  $\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^{p+2q}$ . Soient  $a = (\theta, r, z) = (\theta, r, x, y) \in \mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$  et  $G = (\rho, \zeta, \varphi, \psi) \in \mathcal{G}$ . Si  $\psi$  est assez proche de l'application constante  $\theta \mapsto \text{id}_{\mathbb{R}^{2q}}$  en topologie  $C^0$ , il existe un unique  $\dot{\psi} \in C_*^\infty(\mathbb{T}^p, \text{sp}(2q))$  tel que  $\psi = \exp \dot{\psi}$ . Posons :

$$\begin{aligned} \rho(a) &= (\theta, r + \rho, z) \\ \zeta(a) &= (\theta, r + R_\zeta, z + \zeta(\theta)) \\ \varphi(a) &= (\varphi(\theta), {}^t D\varphi(\theta)^{-1} \cdot r, z) \\ \psi(a) &= (\theta, r + S_\psi \cdot z^2, \psi(\theta) \cdot z), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} R_\zeta &= -J \cdot ((z + \zeta/2)D\zeta) \\ S_\psi \cdot z^2 &= \frac{1}{2} \int_0^1 (\exp(t\dot{\psi}) \cdot z)^2 \cdot (J \cdot D\dot{\psi}) dt, \end{cases} \quad (15)$$

puis

$$G(a) = \psi(\varphi(\zeta(\rho(a)))) \quad (16)$$

(dans cet ordre; les difféomorphismes  $\rho$  et  $\zeta$  commutent, mais en général pas les autres). Si  $\mathcal{G}_\delta$  est un voisinage assez  $C^0$ -petit de l'identité dans  $\mathcal{G}$ , cette formule définit une injection  $\iota : \mathcal{G}_\delta \rightarrow \text{Diff}^\infty(\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^{p+2q})$ .

Rappelons que  $\lambda$  est la 1-forme de Liouville standard sur  $\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^{p+2q}$  :  $\lambda = r \cdot d\theta + y \cdot dx$ . Notons  $\text{Diff}_\lambda^\infty(\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^{p+2q})$  le bon espace des difféomorphismes symplectiques exacts  $G$  de  $\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^{p+2q}$  (c'est-à-dire tels que la 1-forme  $G^*\lambda - \lambda$  soit exacte). La composante connexe de l'identité de ce groupe est le groupe des symplectomorphismes hamiltoniens.

LEMME 34. *L'injection  $\iota$  est un bon plongement de classe  $C^\infty$  dans  $\text{Diff}_\lambda^\infty(\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^{p+2q})$ .*

*Démonstration.* L'application  $\iota$  est la composée de bonnes immersions injectives propres. (Pour se convaincre que l'application  $\psi \mapsto S_\psi$  est bonne, une solution est d'utiliser une fonction génératrice.) Donc  $\iota$  est un bon plongement. Vérifions le caractère symplectique exact de  $\iota(G)$ .

Le difféomorphisme  $a \mapsto \rho(a)$  est symplectique exact parce que  $\rho$  est exacte.

Soit l'hamiltonien

$$H = J \cdot (z\zeta).$$

Le temps un du flot de son champ

$$\vec{H} = -J \cdot (zD\zeta) \cdot \partial_r + \zeta \cdot \partial_z$$

(où  $\partial_r = (\partial_{r_1}, \dots, \partial_{r_p})$ , etc.) est  $a \mapsto (\theta, r + R_\zeta, z + \zeta) = \zeta(a)$ , qui est donc symplectique exact.

Le difféomorphisme  $a \mapsto \varphi(a)$  est l'application cotangente de  $\varphi$ , donc préserve  $\lambda$ , donc est symplectique exact.

Soit enfin l'hamiltonien

$$H = \frac{1}{2}(J \cdot \dot{\psi}) \cdot z^2.$$

Comme  $\dot{\psi}$  est infinitésimalement symplectique, le champ hamiltonien de  $H$  vaut

$$\vec{H} = \frac{1}{2}(J \cdot D\dot{\psi}) \cdot (z^2\partial_r) + z \cdot \dot{\psi} \cdot \partial_z$$

et le temps un de son flot est le difféomorphisme

$$a \mapsto (\theta, r + S_\psi, \psi \cdot z) = \psi(a),$$

qui est donc symplectique exact. □

Nous allons maintenant définir une projection  $\text{pr} : \iota(\mathcal{G}_\delta) \rightarrow \text{Diff}_\lambda^\infty(\mathbb{P}_\delta)$ .

LEMME 35. *Il existe un voisinage  $U$  de l'identité dans  $\text{Diff}_\lambda^\infty(\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^{p+2q})$  et une bonne application  $\text{pr} : U \rightarrow \text{Diff}_\lambda^\infty(\mathbb{P}_\delta)$ ,  $\text{id} \mapsto \text{id}$ , de classe  $C^\infty$  telle que pour tout  $G \in U$  les conditions suivantes soient satisfaites : (1) les restrictions de  $G$  et  $\text{pr}(G)$  à  $\mathbb{P}_{\delta/3}$  coïncident et (2) le support de  $\text{pr}(G)$  est inclus dans  $\mathbb{P}_{2\delta/3}$ .*

*Démonstration.* Soient  $U_\epsilon$  une  $C^1$ -semi-boule de  $\text{Diff}_\omega^\infty(\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^{p+2q})$  centrée en l'identité et de rayon  $\epsilon > 0$  à déterminer. Soit  $G \in U_\epsilon$  et notons  $(\Theta, R, X, Y) = G(\theta, r, x, y)$ . Comme  $G$  est symplectique exact, il existe une fonction  $\hat{S}$  sur  $\mathbb{P}_\delta$  telle que  $d\hat{S} = G^*\lambda - \lambda$ . Alors la fonction

$$S = (\Theta - \theta)R + (X - x)Y - \hat{S}$$

est telle que

$$dS = (r - R) \cdot d\theta + (\Theta - \theta) \cdot dR + (y - Y) \cdot dx + (X - x) \cdot dY.$$

Si  $\epsilon$  est assez petit, on peut choisir  $(\theta, R, x, Y)$  comme coordonnées. Considérons la fonction génératrice modifiée

$$S_\delta = w(\|(R, x, Y)\|) S(\theta, R, x, Y),$$

où  $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction plateau de classe  $C^\infty$ , paire, décroissante sur  $\mathbb{R}^+$ , dont la restriction à  $[0, \delta_1]$  vaille 1 et dont la restriction à  $[\delta_2, +\infty[$  soit nulle, avec  $1/3 < \delta_1 < \delta_2 < 2/3$ . Si  $\epsilon$  est assez petit,  $S_\delta$  elle-même est proche de la fonction nulle et engendre un difféomorphisme symplectique exact  $\text{pr}(G) : (\theta, r, x, y) \mapsto (\Theta, R, X, Y)$  caractérisé par la formule

$$dS_\delta = (r - R) \cdot d\theta + (\Theta - \theta) \cdot dR + (y - Y) \cdot dx + (X - x) \cdot dY.$$

Ce difféomorphisme est proche de l'identité et satisfait aux propriétés prescrites.  $\square$

Comme  $\iota$  est continue, comme  $\iota(G)$  possède au plus un représentant dans chaque germe de difféomorphisme au voisinage de  $\mathbb{T}^p \times \{0\} \times \{0\}$ , et comme  $p$  est bonne (notamment, l'opération de multiplication de la fonction génératrice par une fonction plateau est un opérateur différentiel d'ordre 0, donc est bonne d'après l'exemple 15!) :

LEMME 36. *Si  $\mathcal{G}_\delta$  est un voisinage suffisamment petit de l'identité dans  $\mathcal{G}$ , on a  $\iota(\mathcal{G}_\delta) \subset U$  et l'application  $p \circ \iota$  est un bon plongement de classe  $C^\infty$ .*

Dans la suite nous noterons abusivement  $G$  au lieu de  $\text{pr}(\iota(G))$ .

Soit  $\tilde{\Phi}$  l'application

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \Delta \mathcal{N} \times \mathcal{G}_\delta \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q &\longrightarrow C_+^\infty(\mathbb{P}_\delta) \\ (\alpha, \beta, \Delta N, G, \hat{\alpha}, \hat{\beta}) &\mapsto (N_{\alpha, \beta} + \Delta N) \circ G + N_{\hat{\alpha}, \hat{\beta}}, \end{aligned}$$

où  $C_+^\infty(\mathbb{P}_\delta)$  désigne le quotient de l'espace  $C^\infty(\mathbb{P}_\delta)$  par la relation d'équivalence qui identifie deux fonctions dont la différence est constante. Le lemme suivant découle de l'exemple 16.

LEMME 37. *L'application  $\tilde{\Phi}$  est une bonne application de classe  $C^\infty$  entre bons espaces de Fréchet.*

4.2. *Théorème de conjugaison tordue* Quel que soit  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ , notons

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha, \beta} : \mathcal{N}_{\alpha, \beta} \times \mathcal{G}_\delta \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q &\longrightarrow C_+^\infty(\mathbb{P}_\delta) \\ (N, G, \hat{\alpha}, \hat{\beta}) &\longmapsto N \circ G + N_{\hat{\alpha}, \hat{\beta}} = \tilde{\Phi}(\alpha, \beta, N - N_{\alpha, \beta}, G, \hat{\alpha}, \hat{\beta}). \end{aligned}$$

Le lien entre cette application et l'existence de tores invariants est décrit dans le paragraphe 4.4. (Herman considère à la place l'application

$$\mathcal{N}_{\alpha, \beta} \times \mathcal{G}_\delta \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathcal{X}_H^\infty(\mathbb{P}_\delta), \quad (N, G, \hat{\alpha}, \hat{\beta}) \mapsto \overline{N \circ G^{-1} + N_{\hat{\alpha}, \hat{\beta}}}$$

où  $\mathcal{X}_H^\infty(\mathbb{P}_\delta)$  désigne l'espace des champs de vecteurs hamiltoniens de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{P}_\delta$ .)

THÉORÈME 38 (HERMAN) Si  $(\alpha, \beta) \in \text{DH}(p, q', q'')$ , quel que soit l'hamiltonien  $N \in \mathcal{N}_{\alpha, \beta}$  l'application  $\Phi_{\alpha, \beta}$  est un bon difféomorphisme local de classe  $C^\infty$  au voisinage de  $(N, \text{id}, 0, 0)$ .

Si  $H \in C_+^\infty(\mathbb{P}_\delta)$  est dans l'image locale de  $\Phi_{\alpha, \beta}$  et si  $\Phi_{\alpha, \beta}^{-1}(H) = (N, G, \hat{\alpha}, \hat{\beta})$ , on peut penser à  $G$  comme une conjugaison entre  $N$  et  $H$ , tordue par la correction en fréquence  $N_{\hat{\alpha}, \hat{\beta}}$ .

*Démonstration.* Le Théorème 18 d'inversion locale ramène la démonstration à la vérification du fait que si  $(G, \hat{\alpha}, \hat{\beta})$  est assez proche de  $(\text{id}, 0, 0)$  la différentielle

$$D\Phi_{\alpha, \beta}(N, G, \hat{\alpha}, \hat{\beta}) : T_N \mathcal{N}_{\alpha, \beta} \times T_G \mathcal{G} \times \mathbb{R}^{p+q} \rightarrow C_+^\infty(\mathbb{P}_\delta)$$

de  $\Phi_{\alpha, \beta}$  en  $(N, G, \hat{\alpha}, \hat{\beta})$  est inversible.

1° Soit donc  $\Delta H \in C_+^\infty(\mathbb{P}_\delta)$  une classe d'hamiltoniens modulo translation. Il s'agit de trouver une solution unique à l'équation

$$D\Phi_{\alpha, \beta}(N, G, \hat{\alpha}, \hat{\beta}) \cdot (\Delta N, \Delta G, \Delta \hat{\alpha}, \Delta \hat{\beta}) = \Delta H.$$

Les inconnues sont : l'hamiltonien  $\Delta N$ , qui appartient à l'espace vectoriel  $\Delta \mathcal{N}$  sur lequel l'espace affine  $\mathcal{N}_{\alpha, \beta}$  est modelé ; le champ de vecteurs  $\Delta G \in T_G \mathcal{G}_\delta$  au-dessus de  $G$  ; enfin la correction de la fréquence  $(\Delta \hat{\alpha}, \Delta \hat{\beta}) \in \mathbb{R}^{p+q}$ .

L'équation s'écrit

$$\Delta N \circ G + (DN \circ G) \cdot \Delta G + N_{\Delta \hat{\alpha}, \Delta \hat{\beta}} = \Delta H.$$

Posons  $\dot{G} = \Delta G \circ G^{-1}$  ( $\dot{G}$  est donc un champ de vecteurs tangents sur  $\mathbb{P}_\delta$ ) et  $\Delta \hat{H} = \Delta H \circ G^{-1}$  et composons l'équation à droite par  $G^{-1}$  :

$$\Delta N + DN \cdot \dot{G} + N_{\Delta \hat{\alpha}, \Delta \hat{\beta}} \circ G^{-1} = \Delta \hat{H}.$$

2° En notant  $C$  l'application

$$\begin{aligned} C : \mathcal{G}_\delta \times \mathbb{R}^{p+q} &\rightarrow C^\infty(\mathbb{P}_\delta) \\ (G, \Delta \hat{\alpha}, \Delta \hat{\beta}) &\mapsto C(G) \cdot (\Delta \hat{\alpha}, \Delta \hat{\beta}) = (N_{\Delta \hat{\alpha}, \Delta \hat{\beta}}) \circ G^{-1}, \end{aligned}$$

on obtient

$$\Delta N + DN \cdot \dot{G} + C(G) \cdot (\Delta \hat{\alpha}, \Delta \hat{\beta}) = \Delta \hat{H}. \quad (17)$$

Or, l'application

$$l : \mathcal{G}_\delta \times \mathbb{R}^{p+q} \rightarrow C^\infty(\mathbb{P}_\delta), \quad (G, \Delta \hat{\alpha}, \Delta \hat{\beta}) \mapsto C(G) \cdot (\Delta \hat{\alpha}, \Delta \hat{\beta}) - C(\text{id}) \cdot (\Delta \hat{\alpha}, \Delta \hat{\beta})$$

est une perturbation compacte (parce que toutes les normes sur  $\mathbb{R}^{p+q}$  sont équivalentes, cf. la Définition 23). Donc d'après le Lemme 25 il suffit de résoudre l'équation obtenue en remplaçant  $C(G)$  par  $C(\text{id})$  dans (17), c'est-à-dire l'équation simplifiée suivante :

$$\Delta N + DN \cdot \dot{G} + N_{\Delta \hat{\alpha}, \Delta \hat{\beta}} = \Delta \hat{H}. \quad (18)$$

Nous allons montrer qu'il existe d'unique valeurs de  $\dot{G}$ ,  $\Delta \hat{\alpha}$  et  $\Delta \hat{\beta}$  qui rendent égaux les jets du premier ordre des deux membres de l'équation (18) le long du tore  $\mathbb{T}_0^p$ , ainsi que leur partie quadratique en  $z$ . Ensuite l'identification des restes déterminera  $\Delta N \in \Delta \mathcal{N}$ .

3<sup>o</sup> Par souci de clarté, dans ce paragraphe et le suivant nous désignerons chaque contraction tensorielle simple par un point (en gardant la convention d'ordre donnée en appendice) et nous noterons explicitement les produits tensoriels. Notons  $(\Delta\rho, \Delta\zeta, \Delta\varphi, \Delta\psi) \in \mathbb{B}_1^\infty(\mathbb{T}^p) \times C^\infty(\mathbb{T}^p, \mathbb{R}^{2q}) \times \mathcal{X}_0^\infty(\mathbb{T}^p) \times C_*^\infty(\mathbb{T}^p, \text{sp}(2q))$  les composantes de  $\dot{G}$  dans  $T_{\text{id}}\mathcal{G}$ , où  $\mathcal{X}_0^\infty(\mathbb{T}^p)$  est l'espace des champs de vecteurs sur  $\mathbb{T}^p$  qui s'annulent à l'origine. Les composantes du champ de vecteurs (image directe par  $\text{pr} \circ \iota$  de)  $\dot{G}$  dans l'espace

$$\mathcal{X}_\omega^\infty(\mathbb{P}_\delta) \subset C^\infty(\mathbb{P}_\delta, \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{2q})$$

des champs de vecteurs symplectiques sur  $\mathbb{P}_\delta$  valent, dans le voisinage  $\mathbb{P}_{\delta/3}$  de  $\mathbb{T}_0^p = \mathbb{T}^p \times \{r = 0\} \times \{z = 0\}$  (cf. le lemme 35),

$$\dot{G} = \begin{pmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\rho - r \cdot D(\Delta\varphi) + DR(0) \cdot \Delta\zeta + (DS(\text{id}) \cdot \Delta\psi) : z^{\otimes 2} \\ \Delta\zeta + \Delta\psi \cdot z \end{pmatrix},$$

où les formules (15) définissant les fonctionnelles  $R$  et  $S$  montrent qu'on a

$$\begin{cases} DR(0) \cdot \Delta\zeta & = -J : z \otimes D\Delta\zeta \\ (DS(\text{id}) \cdot \Delta\psi) \cdot z^{\otimes 2} & = \frac{1}{2} z^{\otimes 2} : (J \cdot D\Delta\psi). \end{cases}$$

4<sup>o</sup> Notons  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$  les fonctions à valeurs dans les tenseurs, telles que

$$\begin{aligned} N &= N_{\alpha, \beta} + A_1(\theta) : r^{\otimes 2} + A_2(\theta) : r \otimes z + A_3(\theta) : r \otimes z \otimes z \\ &\quad + A_4(\theta) : z^{\otimes 3} + O(r \otimes r \otimes z, r^{\otimes 3}, 4) \end{aligned}$$

où l'on supposera que  $A_1, A_3$  et  $A_4$  sont symétriques dans leurs variables répétées, et où  $O(r \otimes r \otimes z, r^{\otimes 3}, 4)$  désigne l'idéal engendré par les fonctions  $C^\infty$  linéaires en  $r \otimes r \otimes z$ , les fonctions trilineaires en  $r$  et les fonctions quadrilineaires en  $r$  et  $z$ , Modulo le sous-espace  $\Delta \cdot \mathcal{N}$  de  $C_+^\infty(\mathbb{P}_\delta)$ , l'équation (18) devient

$$\begin{aligned} &\alpha \cdot \Delta\rho + (-D(\Delta\varphi) \cdot \alpha + \Delta\hat{\alpha} + 2A_1 \cdot \Delta\rho + A_2 \cdot \Delta\zeta) \cdot r \\ &+ (-J \cdot D(\Delta\zeta) \cdot \alpha + Q_\beta \cdot \Delta\zeta + \Delta\rho \cdot A_2) \cdot z \\ &+ \left( \begin{array}{l} \frac{1}{2} J \cdot D(\Delta\psi) \cdot \alpha + Q_\beta \cdot \Delta\psi + \frac{1}{2} Q_{\Delta\beta} \\ + J \cdot D(\Delta\zeta) \cdot A_2 + \Delta\rho \cdot A_3 + 3\Delta\zeta \cdot A_4 \end{array} \right) : z^{\otimes 2} = \Delta\hat{H}. \end{aligned}$$

Le jet de l'équation au premier ordre le long de  $\mathbb{T}_0^p$  donne

$$\alpha \cdot \Delta\rho = \Delta\hat{H}|_{\mathbb{T}_0^p} (+\text{constante}) \quad (19)$$

$$D(\Delta\varphi) \cdot \alpha - \Delta\hat{\alpha} = - \left. \frac{\partial(\Delta\hat{H})}{\partial r} \right|_{\mathbb{T}_0^p} + 2A_1 \cdot \Delta\rho + A_2 \cdot \Delta\zeta \quad (20)$$

$$D(\Delta\zeta) \cdot \alpha + JQ_\beta \cdot \Delta\zeta = J \left. \frac{\partial(\Delta\hat{H})}{\partial z} \right|_{\mathbb{T}_0^p} + \Delta\rho \cdot A_2 \cdot J; \quad (21)$$

et le terme quadratique en  $z$  de la même équation donne (après symétrisation ! et en utilisant le fait que  $J \cdot \Delta\psi$  est symétrique),

$$D(\Delta\psi) \cdot \alpha - JQ_{\Delta\hat{\beta}} + [J \cdot Q_{\beta}, \Delta\psi] = -\frac{1}{2}J \cdot \frac{\partial^2(\Delta\hat{H})}{\partial z^2} \Big|_{\mathbb{T}_0^p} \quad (22)$$

$$+ 2D(\Delta\zeta) \cdot A_2 - 2J \cdot {}^t A_2 \cdot {}^t D(\Delta\zeta) \cdot J + 2\Delta\rho \cdot A_3 + 6A_4 \cdot \Delta\zeta.$$

5 ° Ces quatre équations se résolvent triangulairement de façon unique :

— l'équation (19) détermine  $\Delta\rho$  : d'abord, le Lemme 26 affirme l'existence d'une unique solution  $\hat{\rho} \in C_0^\infty(\mathbb{T}^p, \mathbb{R})$  de l'équation  $D\hat{\rho} \cdot \alpha = \Delta H \circ G^{-1}|_{\mathbb{T}_0^p} + c$  si le réel  $c$  est choisi de façon à ce que la moyenne du membre de droite soit nulle, après quoi on pose  $\Delta\rho = D\hat{\rho} \in B_1^\infty(\mathbb{T}^p)$  ;

— puis l'équation (21) détermine  $\Delta\zeta$  (Lemme 29),

— puis l'équation (20) détermine  $\Delta\varphi$  et  $\Delta\hat{\alpha}$  : moyenner sur  $\mathbb{T}_0^p$  pour trouver  $\Delta\hat{\alpha}$  puis appliquer le Lemme 26 pour trouver  $\Delta\varphi$  ;

— enfin l'équation (22) détermine  $\Delta\psi$  et  $\Delta\hat{\beta}$  : moyenner sur  $\mathbb{T}_0^p$  pour trouver  $\Delta\hat{\beta}$ , puis appliquer le Lemme 31 à l'équation non moyennée pour trouver  $\Delta\psi$ .

Ainsi, la forme normale le long de  $\mathbb{T}_0^p$  du champ hamiltonien de la différence des deux membres de l'équation (18) est nulle au premier ordre.

6 ° Définissons  $\Delta\hat{N}$  par la formule

$$\Delta\hat{N} = \Delta\hat{H} - DN \cdot \dot{G} - N_{\Delta\hat{\alpha}, \Delta\hat{\beta}},$$

puis  $\Delta N$  par

$$\Delta N = \Delta\hat{N}(\theta, r, z) - \Delta\hat{N}|_{(\theta, 0, 0)}.$$

Alors on a  $\Delta N \in \Delta\mathcal{N}$  et l'équation (18) est vérifiée.  $\square$

**COROLLAIRE 39.** *Quel que soit le réel  $\tau > p - 1$ , il existe deux entiers  $k, n_0 \geq 0$  et un réel  $C > 0$  tels que quels que soient le réel  $\gamma > 0$  assez petit et le vecteur  $(\alpha, \beta) \in \text{DH}_{\gamma, \tau}(p, q', q'')$ , l'image locale de  $\Phi_{\alpha, \beta}$  au voisinage de  $(N = N_{\alpha, \beta} + \Delta N, \text{id}, 0, 0)$  contient une  $C^k$ -semi-boule de rayon  $C\gamma^{n_0}$  ; la constante  $C$  dépend continûment de  $\Delta N \in \Delta\mathcal{N}$ .*

*Démonstration.* L'estimation quantitative de la taille de l'image locale de  $\Phi_{\alpha, \beta}$  découle du corollaire 19 et des estimations des lemmes 26, 29 et 31.  $\square$

**4.3. Deux cas particuliers** Mentionnons les deux théorèmes suivants, qui sont à la fois des cas particuliers du Théorème 38, et les versions locales intégrées des lemmes 26 et 31. Ils sont des théorèmes de formes normales tordues, respectivement :

— de champs de vecteurs du tore localement au voisinage d'un champ de vecteurs constant diophantien

— et de champs de vecteurs, produits gauches de matrices infinitésimalement symplectiques au-dessus d'un champ de vecteurs constant et diophantien du tore, localement au voisinage d'un produit direct.

Soient  $\mathcal{X}^\infty(\mathbb{T}^p)$  l'espace des champs de vecteurs de classe  $C^\infty$  du tore et  $\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{T}^p)$  l'espace des difféomorphismes de classe  $C^\infty$  du tore  $\mathbb{T}^p$  qui fixent l'origine.

Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}^p$ , notons  $\Phi_\alpha^1$  la bonne application

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha^1 : \text{Diff}_0^\infty(\mathbb{T}^p) \times \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathcal{X}^\infty(\mathbb{T}^p) \\ (\varphi, \hat{\alpha}) &\mapsto \varphi_*\alpha + \hat{\alpha}. \end{aligned}$$

**THÉORÈME 40 (ARNOLD, MOSER)** *Si  $\alpha \in DH(p)$ ,  $\Phi_\alpha^1$  est un bon difféomorphisme local de classe  $C^\infty$  au voisinage de  $(\text{id}, 0)$ .*

*Démonstration.* On peut démontrer ce théorème directement avec le Théorème 18 (voir [HS71, Bos85]). On peut aussi le déduire du Théorème 38. En effet, considérons un champ de vecteurs  $X \in \mathcal{X}^\infty(\mathbb{T}^p)$  suffisamment  $C^\infty$ -proche du champ constant  $\alpha$ . Le Théorème 38 montre que l'hamiltonien

$$H^X(\theta, r) = i_{X(\theta)}\lambda = X(\theta) \cdot r \in C^\infty(\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^p)$$

s'écrit de façon unique

$$H^X = N_\alpha \circ G + \hat{\alpha} \cdot r$$

(à une constante additive près), où  $G$  est un difféomorphisme symplectique exact et où  $\hat{\alpha} \in \mathbb{R}^p$ . Or

— la section nulle  $\mathbb{T}^p \times \{0\}$  de  $\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^p$  est un tore invariant de l'hamiltonien  $H^X$ , donc de l'hamiltonien  $N_\alpha \circ G = H^X - \hat{\alpha} \cdot r$

— et l'hamiltonien  $N_\alpha \circ G$  laisse aussi invariant le tore  $G^{-1}(\mathbb{T}^p \times \{0\})$ .

Or puisque le difféomorphisme symplectique  $G$  est exact les tores lagrangiens  $\mathbb{T}^p \times \{0\}$  et  $G^{-1}(\mathbb{T}^p \times \{0\})$  ont une intersection non vide; donc ces deux tores sont confondus. Donc la restriction de  $G^{-1}$  à la section nulle induit le difféomorphisme  $\varphi : \mathbb{T}^p \times \{0\} \rightarrow \mathbb{T}^p \times \{0\}$  recherché.  $\square$

Maintenant, soient  $\alpha \in \mathbb{R}^p$  et  $\dot{\psi} \in C^\infty(\mathbb{T}^p, \text{sp}(2q))$ . Le champ de vecteurs linéaire qui leur est associé dans  $\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^{2q}$  :

$$(\theta, z) \mapsto (\alpha, \dot{\psi}(\theta) \cdot z),$$

définit un flot  $(t\alpha, \psi_t)$  dans  $\mathbb{T}^p \times C^\infty(\mathbb{T}^p \times \text{Sp}(2q))$ , caractérisé par les équations

$$\frac{d\psi_t(\theta)}{dt} = \dot{\psi}(\theta + t\alpha) \cdot \psi_t(\theta) \quad \text{et} \quad \psi_0(\theta) = \text{id}_{\mathbb{R}^q}.$$

L'action adjointe de  $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^p, \text{Sp}(2q))$  sur  $C^\infty(\mathbb{T}^p, \text{sp}(2q))$ , dérivée de l'action naturelle par conjugaison (au-dessus des rotations de fréquence  $\alpha$ ) sur  $C^\infty(\mathbb{T}^p, \text{Sp}(2q))$ , s'écrit, si  $\dot{\psi} = d/dt|_{t=0}\psi_t$ ,

$$\phi(\dot{\psi})(\theta) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\phi(\theta + t\alpha) \cdot \psi_t(\theta + t\alpha) \cdot \phi(\theta + t\alpha)^{-1}) = (\mathcal{L}_\alpha\phi) \cdot \phi^{-1} + \phi \cdot \dot{\psi} \cdot \phi^{-1}.$$

Soit  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{p+q}$ . Notons  $\Phi_{\alpha, \beta}^2$  la bonne application

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha, \beta}^2 : C_*^\infty(\mathbb{T}^p, \text{Sp}(2q)) \times \mathbb{R}^q &\mapsto C^\infty(\mathbb{T}^p, \text{sp}(2q)) \\ (\phi, \hat{\beta}) &\mapsto (\mathcal{L}_\alpha\phi) \cdot \phi^{-1} + \phi \cdot (J \cdot Q_\beta) \cdot \phi^{-1} - J \cdot Q_{\hat{\beta}}. \end{aligned}$$

THÉORÈME 41 (HERMAN) Si  $(\alpha, \beta) \in DH(p, q', q'')$  l'application  $\Phi_{\alpha, \beta}^2$  est un bon difféomorphisme local au voisinage de  $(\text{id}, 0)$ .

Une démonstration consiste à utiliser le Théorème 18 directement ; une autre, à plonger le produit gauche  $(\alpha, \psi)$  et sa perturbation dans un flot hamiltonien qui est linéaire dans les directions normales à un tore invariant. Elles sont laissées au lecteur.

4.4. *Théorème de conjugaison hypothétique* L'argument qui permet de déduire du Théorème 38 l'existence de tores invariants a été présenté par Herman dans une conférence à Lyon en 1990 pour les tores lagrangiens (voir aussi [Yoc92]) ; puis Sevryuk [Sev95, BHS96] l'a retrouvé indépendamment et a remarqué qu'il se généralisait aux tores de dimension inférieure (y compris pour certains systèmes non hamiltoniens), et résolvait ainsi le problème posé par le manque de paramètres pour contrôler la fréquence de ces tores. Il relègue à plus tard l'étude de la non-dégénérescence de l'application fréquence en ajoutant des paramètres de contrôle *ad hoc* et trouvant un tore invariant dans un espace de fréquences abstrait ; après seulement se pose la question de réaliser ces fréquences dans l'espace des actions.

Notons  $\mathcal{N}$  l'union disjointe

$$\mathcal{N} = \coprod_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} \mathcal{N}_{(\alpha, \beta)} \approx \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathcal{N}_{(0,0)}.$$

THÉORÈME 42. Quel que soit  $N^\circ \in \mathcal{N}$  il existe un germe (non unique) d'application

$$\begin{aligned} \Theta : (\mathbb{C}_+^\infty(\mathbb{P}_\delta), N^\circ) &\rightarrow (\mathcal{N} \times \mathcal{G}, (N^\circ, \text{id})) \\ H &\mapsto (N, G), \quad N = N_{\alpha, \beta} + \Delta N, \end{aligned}$$

tel que quel que soit  $H \in \mathbb{C}_+^\infty(X)$  assez proche de  $N^\circ$  tel que  $(\alpha, \beta) \in DH_{\gamma, \tau}$ , le symplectomorphisme  $G$  conjugue  $N$  à  $H$  (c'est-à-dire  $H = N \circ G$ ).

La démonstration ci-dessous est d'une telle importance qu'elle mérite peut-être une introduction heuristique. Soit  $H \in \mathbb{C}_+^\infty(X)$  assez proche de  $N^\circ$ . Pour démontrer que  $H$  possède un tore invariant proche de  $\mathbb{T}_0^p$ , la stratégie est de conjuguer  $H$  à un hamiltonien  $N$  laissant  $\mathbb{T}_0^p$  invariant. On ne peut pas espérer en général que  $N$  soit dans  $\mathcal{N}_{\alpha^\circ, \beta^\circ}$  parce que la fréquence  $(\alpha^\circ, \beta^\circ)$  est un invariant de conjugaison. On peut donc plutôt chercher à conjuguer  $H$  à un hamiltonien

$$N = N_{\alpha, \beta} + \Delta N \in \mathcal{N}_{\alpha, \beta}, \quad (\alpha, \beta) \in DH(p, q', q''),$$

obtenu à partir de  $N^\circ = N_{\alpha^\circ, \beta^\circ} + \Delta N^\circ$  en apportant à la fréquence une correction a priori, encore inconnue mais petite,  $(\Delta\alpha, \Delta\beta) = (\alpha - \alpha^\circ, \beta - \beta^\circ)$  et en modifiant de façon adéquate le reste  $\Delta N^\circ$  de la forme normale de Birkhoff de  $N^\circ$ . À supposer que  $(\alpha, \beta)$  est diophantien :  $(\alpha, \beta) \in DH(p, q', q'')$ , le Théorème 38 affirme l'ouverture locale de l'application  $\Phi_{\alpha, \beta}$ . Si  $H$  et  $N^\circ$  (et donc  $H$  et  $N_{\alpha, \beta} + \Delta N^\circ$ ) sont suffisamment proches en topologie  $C^\infty$ ,  $H$  est donc dans l'image locale de  $\Phi_{\alpha, \beta}$  au voisinage de  $N^\circ + N_{\Delta\alpha, \Delta\beta} = N_{\alpha, \beta} + \Delta N^\circ$ . À une constante additive près il s'écrit

$$H = N \circ G + N_{\hat{\alpha}, \hat{\beta}},$$

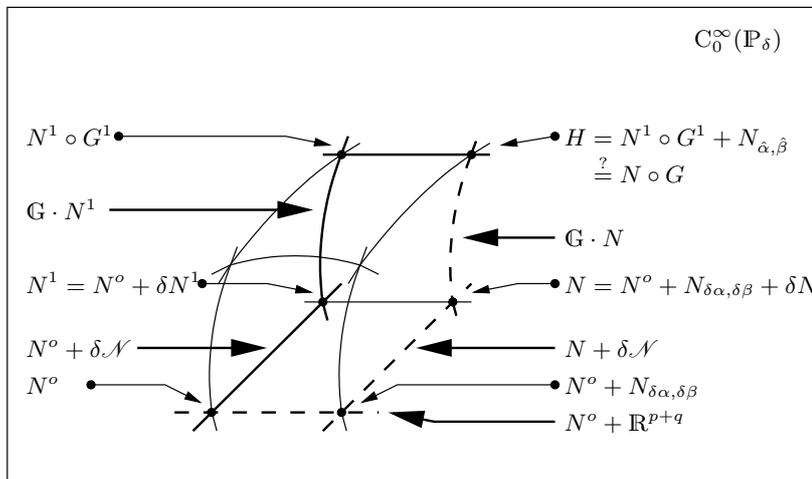


FIGURE 1. Diagramme commutatif des hamiltoniens possédant un tore perturbé.

où  $N \in \mathcal{N}_{\alpha, \beta}$  possède un tore invariant,  $G \in \mathcal{G}_\delta$  est symplectique et  $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \in \mathbb{R}^{p+q}$ . Autrement dit, il existe une conjugaison  $G$  entre  $H$  et  $N$ , tordue par la correction en fréquence  $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ . La fréquence étant corrigée *a posteriori*, c'est-à-dire après avoir composé  $N$  à droite par  $G$ , cette correction casse l'isomorphisme dynamique entre  $H$  et  $N$  et empêche donc de conclure directement à l'existence d'un tore invariant pour  $H$ . La question est :

Est-il possible d'ajuster la correction *a priori*  $(\Delta\alpha, \Delta\beta)$ , de façon à annuler la correction *a posteriori*  $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$  (figure 1) ?

Quand c'est possible, on peut conjuguer  $H$  et  $N$ . Mais la réponse ne peut pas être toujours positive, auquel cas la propriété de posséder un tore invariant serait une propriété ouverte dans l'espace des hamiltoniens ! Techniquement, il est cependant commode de prolonger la conjugaison  $G$  à tous les cas en utilisant le théorème d'extension de Whitney, au prix d'une perte de la signification dynamique de cette conjugaison quand la condition arithmétique spécifiée dans l'énoncé du théorème n'est pas satisfaite.

J'appelle  $G$  une *conjugaison hypothétique* parce que l'égalité  $H = N \circ G$  est subordonnée à une condition arithmétique sur un vecteur  $(\alpha, \beta)$  a priori inconnu : connaître  $(\alpha, \beta)$  supposerait de savoir à l'avance qu'il y a un tore invariant. En revanche, supposons que l'hamiltonien non perturbé dépende différemment d'un paramètre  $t \in \mathbb{B}^s$ . En mécanique céleste, ce paramètre peut être une famille de masses, de demi grands axes, etc ; plus généralement, si l'hamiltonien non perturbé est complètement intégrable, ce paramètre peut être la coordonnée d'action (voir ci-dessous le Théorème 43). Alors en particulier la fréquence perturbée dépend différemment de ce paramètre (corollaire 19) ; notons-la  $(\alpha_t, \beta_t)$ . Il s'agit de mesurer l'ensemble des  $t \in \mathbb{B}^s$  en lesquels l'extension whitnésienne  $t \mapsto (\alpha_t, \beta_t)$  du

vecteur fréquence perturbé est diophantienne. Or cette extension est  $C^\infty$ -proche de l'application fréquence non perturbée  $t \mapsto (\alpha_t^o, \beta_t^o)$ . Donc si cette dernière vérifie une certaine propriété topologique ouverte qui force l'ensemble des valeurs de  $t$ , image réciproque de  $DH(p, q', q'')$ , à être de mesure strictement positive, cette même propriété sera vérifiée par sa déformation  $t \mapsto (\alpha_t, \beta_t)$ .

*Démonstration.* D'après le Théorème 38, il existe un germe d'application

$$\begin{aligned} \hat{\Theta} : (C_+^\infty(\mathbb{P}_\delta) \times DH_{\gamma, \tau}, (N^o, (\alpha^o, \beta^o))) &\rightarrow (\mathcal{N} \times \mathcal{G} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, (N^o, \text{id}_{\mathbb{P}_\delta})) \\ (H, (\alpha, \beta)) &\mapsto (N, G, \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \Phi_{\alpha, \beta}^{-1}(H), \end{aligned}$$

et ce germe est de classe  $C^\infty$  au sens de Whitney. Il en existe un prolongement

$$\hat{\Theta} : C_+^\infty(\mathbb{P}_\delta) \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathcal{N} \times \mathcal{G} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q.$$

Maintenant, l'équation  $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = 0$  définit-elle implicitement  $(\alpha, \beta)$ ? En écrivant artificiellement  $N^o$  comme

$$N^o = (N_{\alpha, \beta} + \Delta N^o) \circ \text{id}_{\mathbb{P}_\delta} + N_{\alpha^o - \alpha, \beta^o - \beta},$$

par unicité locale de la conjugaison tordue on voit que

$$\hat{\Theta}(N^o, \alpha, \beta) = (N_{\alpha, \beta} + \Delta N^o, \text{id}_{\mathbb{P}_\delta}, \alpha^o - \alpha, \beta^o - \beta).$$

En particulier, en restriction à la sous-variété d'équation  $G = \text{id}_{\mathbb{P}_\delta}$ , on a

$$\left. \frac{\partial(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}{\partial(\alpha, \beta)} \right|_{\{G=\text{id}\}} = -\text{id}_{\mathbb{P}_\delta}.$$

Donc, d'après le théorème des fonctions implicites (en dimension finie) il existe un germe d'application  $\nu : H \mapsto (\alpha, \beta)$  localement unique tel que  $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})(H, \nu(H)) \equiv 0$ . Il ne reste qu'à poser

$$\Theta(H) = \hat{\Theta}(H, \nu(H)).$$

□

## 5. Existence de tores invariants

5.1. *Théorème de Kolmogorov-Arnold* Dans le cas où l'hamiltonien non perturbé est un hamiltonien  $N^o = N^o(r)$  complètement intégrable en coordonnées angles-action, la variable d'action  $r$  peut être prise comme paramètre. Une condition suffisante de non-dégénérescence est alors que l'application fréquence  $r \in \mathbb{B}_\delta^p \mapsto (\alpha_r^o, \beta_r^o) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$  soit un difféomorphisme local, ce qui ne peut se produire que pour des tores lagrangien ( $q = 0$ ). Commençons par cet exemple, qui sera ensuite généralisé.

Considérons la boule euclidienne fermée  $\bar{\mathbb{B}}_{\delta_0}^p(r_0)$  de  $\mathbb{R}^p$  de rayon  $\delta_0 > 0$  et centrée en  $r_0 \in \mathbb{R}^p$ , l'espace des phases  $\mathbb{P}_{\delta_0} = \mathbb{T}^p \times \bar{\mathbb{B}}_{\delta_0}^p(r_0)$ , les coordonnées naturelles  $(\theta, r)$ , la 1-forme de Liouville standard  $\lambda = r \cdot d\theta$  et la forme symplectique standard  $\omega = d\theta \wedge dr$ . Notons  $t_s$  la translation  $t_s : (\theta, r) \mapsto (\theta, s + r)$ . Soit  $N^o \in C^\infty(\mathbb{P}_{\delta_0})$ . Quel que soit  $s \in \bar{\mathbb{B}}_{\delta_0}^p(r_0)$ , le tore

$$\mathbb{T}_s^p = \mathbb{T}^p \times \{s\}$$

est  $N^\circ$ -invariant et la forme normale de  $N^\circ$  le long de  $\mathbb{T}_s^p$  est (à une constante additive près)

$$N^\circ \circ t_s = \alpha_s^\circ \cdot r + O(r^2), \quad \alpha_s^\circ = \frac{\partial N^\circ}{\partial r}(s).$$

Pour  $k \geq 1$  et  $\epsilon, \delta > 0$ ,  $\delta \leq \delta_0$ , une norme  $C^k$  étant choisie sur  $C^\infty(\mathbb{P}_\delta)$ , notons  $\mathbb{B}_{\epsilon, \delta}^{C^k}(N^\circ)$  la  $C^k$ -semi-boule définie par

$$\mathbb{B}_{\epsilon, \delta}^{C^k}(N^\circ) = \{F \in C^\infty(\mathbb{P}_\delta), \|F - N^\circ\|_{C^k(\mathbb{P}_\delta)} < \epsilon\}.$$

Rappelons du paragraphe 4.1 que  $\Delta \mathcal{N} = O(r^2) \subset C^\infty(\mathbb{P}_\delta)$  et que  $\text{Diff}_\lambda^\infty(\mathbb{P}_\delta)$  est l'espace des difféomorphismes symplectiques exacts de  $\mathbb{P}_\delta$ .

**THÉORÈME 43 (KOLMOGOROV-ARNOLD)** *Si l'application fréquence  $r \mapsto \alpha_r^\circ$  est un difféomorphisme local en  $r_0$ , il existe un entier  $k \geq 1$ , des réels  $\epsilon, \delta, \gamma, \tau > 0$  et deux applications  $C^\infty$*

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathbb{B}_{\epsilon, \delta}^{C^k}(N^\circ) \times \mathbb{B}_\delta^p(r_0) &\longrightarrow \mathbb{R}^p \times \Delta \mathcal{N} \\ (F, s) &\longmapsto (\alpha_s(F), \Delta N_s(F)) \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{G} : \mathbb{B}_{\epsilon, \delta}^{C^k}(N^\circ) \rightarrow \text{Diff}_\lambda^\infty(\mathbb{P}_{2\delta}), \quad F \mapsto \mathcal{G}(F),$$

tels que :

1°  $\mathcal{G}(N^\circ) = \text{id}_{\mathbb{P}_\delta}$  et, quel que soit  $s \in \mathbb{B}_\delta^p(r_0)$ ,  $\alpha_s(N^\circ) = \alpha_s^\circ$  ;

2° quels que soient  $F \in \mathbb{B}_{\epsilon, \delta}^{C^k}(N^\circ)$  et  $s \in \mathbb{B}_\delta^p(r_0)$  tels que  $\alpha_s(F) \in \text{DH}_{\gamma, \tau}(p)$ , le tore plongé  $\mathcal{G}(\mathbb{T}_s^p)$  est  $F$ -invariant et la forme normale de  $F$  le long de ce tore est (à une constante additive près)

$$F \circ \mathcal{G} \circ t_s = \alpha_s(F) \cdot r + \Delta N_s(F)(\theta, r) ;$$

3° quel que soit  $F \in \mathbb{B}_{\epsilon, \delta}^{C^k}(N^\circ)$  fixé, la mesure de Lebesgue de la réunion des tores invariants ainsi trouvés dans  $\mathbb{T}^p \times \mathbb{B}_\delta^p(r_0)$  est strictement positive.

*Démonstration.*

1° *Détermination de  $k, \delta, \gamma$  et  $\tau$ .* Il existe un réel  $0 < \delta < \delta_0/2$  tel que la restriction de l'application  $\alpha^\circ$  à  $\mathbb{B}_{2\delta}^p(r_0)$  soit un difféomorphisme sur son image. Il existe un réel  $\eta > 0$  tel que l'image de la restriction de  $\alpha^\circ$  à  $\mathbb{B}_\delta^p(r_0)$  contienne la boule  $\mathbb{B}_{2\eta}^p(\alpha^\circ(r_0))$ . Une estimation classique montre que si  $\gamma > 0$  est assez petit et  $\tau$  assez grand la mesure de Lebesgue de

$$\mathbb{B}_\eta^p(\alpha^\circ(r_0)) \cap \text{DH}_{\gamma, \tau}(p)$$

est strictement positive.

Notons  $\Delta N_s^\circ = N^\circ \circ t_s - \alpha_s^\circ \cdot r \in \Delta \mathcal{N}$ ,  $s \in \mathbb{B}_\delta^p(r_0)$ . Quel que soit  $s \in \mathbb{B}_\delta^p(r_0)$ , d'après le corollaire 39 il existe un entier  $k \geq 1$  et un réel  $\epsilon_0 > 0$  tels que quel que soit  $\alpha \in \text{DH}_{\gamma, \tau}(p)$  l'image locale de l'application

$$\begin{aligned} \phi_\alpha : \Delta \mathcal{N} \times \mathcal{G}_\delta \times \mathbb{R}^p &\rightarrow C_+^\infty(\mathbb{P}_\delta) \\ (\Delta N, G, \hat{\alpha}) &\mapsto (N_\alpha + \Delta N) \circ G + N_{\hat{\alpha}} = (\alpha \cdot r + \Delta N) \circ G + \hat{\alpha} \cdot r \end{aligned}$$

au voisinage de  $(\Delta N^o, \text{id}, 0)$  contient la  $C^k$ -semi-boule

$$\mathbb{B}_{\epsilon_0, \delta}^{C^k}(N_\alpha + \Delta N_s^o) = \{F \in C^\infty(\mathbb{P}_\delta), \|F - N_\alpha - \Delta N_s^o\|_{C^k(\mathbb{P}_\delta)} < \epsilon_0\}.$$

Par compacité relative, on peut choisir  $\epsilon_0$  et  $k$  indépendants de  $s \in \mathbb{B}_\delta^p(r_0)$ .

Par ailleurs, quel que soit  $F \in C^\infty(\mathbb{P}_\delta)$  il existe un prolongement  $\tilde{F}$  de  $F$  de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{P}_{2\delta}$  tel que l'on ait

$$\left\| \tilde{F} - N^o \right\|_{C^k(\mathbb{P}_{2\delta})} \leq C \|F - N^o\|_{C^k(\mathbb{P}_\delta)} ;$$

ceci résulte par exemple de l'application du Théorème 21 à la fonction  $F - N^o$  sur  $\mathbb{P}_\delta$ . Par abus, nous noterons simplement  $F$  au lieu de  $\tilde{F}$  et nous pourrions ainsi considérer que si un hamiltonien  $F$  est initialement défini sur  $\mathbb{P}_\delta$  l'hamiltonien  $F \circ t_s$ ,  $s \in \mathbb{B}_\delta^p(r_0)$ , est lui aussi bien défini sur l'espace fixe  $\mathbb{P}_\delta$ . En outre, comme la composition à droite par les translations  $t_s$  est continue, il existe  $\epsilon_1 > 0$  tel que quels que soient  $F \in \mathbb{B}_{\epsilon_1, \delta}^{C^k}(N^o)$  et  $s \in \mathbb{B}_\delta^p(r_0)$  l'hamiltonien translaté  $F \circ t_s$  est dans  $\mathbb{B}_{\epsilon_0, \delta}^{C^k}(N_{\alpha_s} + \Delta N_s^o)$ .

2<sup>o</sup> *Construction de  $\mathcal{F}$  et détermination de  $\epsilon$ .* Comme dans l'argument heuristique ci-dessus, l'application du Théorème 38, du corollaire 22 et du théorème d'inversion locale en dimension finie montre qu'il existe un réel  $\epsilon > 0$  assez petit en fonction de  $\epsilon_0$  et une application

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}} : \mathbb{B}_{\epsilon, \delta}^{C^k}(N^o) \times \mathbb{B}_\delta^p(r_0) &\rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathcal{G}_\delta \times \Delta \mathcal{N} \\ (F, s) &\mapsto (\alpha_s, G_s, \Delta N_s) = (\alpha_s(F), G_s(F), \Delta N_s(F)) \end{aligned}$$

de classe  $C^\infty$  telle que pour tout

$$s \in \text{dh}_{\delta, \gamma, \tau} = \{r \in \mathbb{B}_\delta^p(r_0), \alpha_r \in \text{DH}_{\gamma, \tau}(p)\}$$

on ait, à une constante additive près,

$$F \circ t_s = (\alpha_s \cdot r + \Delta N_s) \circ G_s.$$

En particulier, le tore  $G_s^{-1}(\mathbb{T}_0^p)$  est  $(F \circ t_s)$ -invariant et l'application  $\mathcal{F} : (F, s) \mapsto (\alpha_s(F), \Delta N_s(F))$  est de classe  $C^\infty$ .

3<sup>o</sup> *Construction de  $\mathcal{G}$ .* Quel que soit  $s \in \text{dh}_{\delta, \gamma, \tau}$ , le difféomorphisme

$$g_s = t_s \circ G_s^{-1} \circ t_{-s}$$

envoie le tore  $\mathbb{T}_s^p$  sur le tore  $F$ -invariant  $g_s(\mathbb{T}_s^p) = t_s \circ G_s^{-1}(\mathbb{T}_0^p)$ . On aimerait regrouper la collection de jets  $\left\{ j_{\mathbb{T}_s^p}^\infty g_s, s \in \text{dh}_{\delta, \gamma, \tau} \right\}$  pour en faire un difféomorphisme symplectique qui redresse simultanément tous les tores invariants trouvés. Fixons provisoirement le paramètre  $s$ . Le difféomorphisme  $G_s$  est symplectique exact, donc il en est de même de  $g_s$ . Soit  $\tilde{S}_s$  une fonction telle que  $g_s^* \lambda - \lambda = d(\tilde{S}_s)$ . Notons  $S_s = (\Theta - \theta) \cdot R - \tilde{S}_s$  et  $(\Theta, R) = g_s(\theta, r)$ , de sorte que

$$d(S_s) = (r - R) \cdot d\theta + (\Theta - \theta) \cdot dR.$$

Soit  $\mathcal{S}^\infty$  la section de l'espace des jets infinis de fonctions au-dessus de  $\mathbb{T}^p \times \text{dh}_{\delta,\gamma,\tau}$ , définie par

$$\mathcal{S}^\infty(\eta, s) = j_{(\eta,s)}^\infty((\theta, r) \mapsto S_s(\theta, r)), \quad (\eta, s) \in \mathbb{T}^p \times \text{dh}_{\delta,\gamma,\tau}.$$

L'application  $s \mapsto S_s$  est de classe  $C^\infty$  au sens de Whitney, donc la section  $\mathcal{S}^\infty$  satisfait les hypothèses du Théorème 21. Donc elle est le jet le long de  $\mathbb{T}^p \times \text{dh}_{\delta,\gamma,\tau}$  d'une fonction  $\mathcal{S}$  définie sur  $\mathbb{T}^p \times \mathbb{B}_\delta^p$ . La fonction  $\mathcal{S}$  est  $\epsilon$ -proche de la fonction nulle. Si  $\epsilon$  est assez petit, elle engendre donc un difféomorphisme symplectique exact  $(\theta, r) \mapsto (\Theta, R)$  de  $\mathbb{P}_\delta$  sur un fermé de  $\mathbb{P}_{2\delta}$ , caractérisé par l'égalité

$$d\mathcal{S} = (r - R) \cdot d\theta + (\Theta - \theta) \cdot dR.$$

En multipliant  $\mathcal{S}$  par une fonction plateau comme dans la démonstration du Lemme 35, sans la modifier sur  $\mathbb{P}_\delta$  on obtient la fonction génératrice d'un difféomorphisme  $\mathcal{G}$  disons, de  $\mathbb{P}_{2\delta}$  (à support strictement inclus dans  $\mathbb{P}_{2\delta}$ ), de classe  $C^\infty$ . Pour tout  $s \in \text{dh}_{\delta,\gamma,\tau}$ , comme le jet du premier ordre (et même le jet infini) de  $\mathcal{G}$  coïncide avec celui de  $g_s$  le long du tore  $\mathbb{T}_s^p$ , on a

$$F \circ g_s \circ t_s = F \circ \mathcal{G} \circ t_s = \alpha_s \cdot r + \Delta N_s.$$

4° *Estimation.* Un hamiltonien  $F \in \mathbb{B}_{\epsilon,\delta}^{C^k}(N^o)$  étant fixé, l'application  $s \mapsto \alpha_s = \alpha_s(F)$  est  $\epsilon$ -proche de  $\alpha^o$ . Donc, d'après la façon dont  $\delta$  et  $\eta$  ont été initialement choisis, quitte à diminuer  $\epsilon$  l'image de  $s \in \mathbb{B}_\delta^p(r_0) \mapsto \alpha_s$  contient  $\mathbb{B}_\eta^p(\alpha^o(r_0))$ . Donc l'ensemble  $\text{dh}_{\delta,\gamma,\tau} \subset \mathbb{B}_\delta^p(r_0)$  est de mesure de Lebesgue strictement positive d'après notre choix initial de  $\tau$  et de  $\gamma$ ; il en va de même de  $\mathbb{T}^p \times \text{dh}_{\delta,\gamma,\tau} \subset \mathbb{P}_\delta$  d'après le théorème de Fubini; il en va enfin de même de la réunion

$$\mathcal{G}(\mathbb{T}^p \times \text{dh}_{\delta,\gamma,\tau})$$

des tores invariants trouvés parce que  $\mathcal{G}$  est un difféomorphisme. □

5.2. *Condition d'Arnold-Pyartli* Arnold a remarqué que lorsqu'un système traverse des résonances l'estimation donnée sur son évolution par sa moyennisation est pertinente sous l'hypothèse d'une condition de non-dégénérescence considérablement plus faible que la condition utilisée dans le Théorème 43 [Arn65]. Cette condition affaiblie revient à supposer que l'image locale de la fréquence, vue comme fonction de l'une des variables d'action, ne soit nulle part localement contenue dans un hyperplan vectoriel. Pyartli a démontré qu'alors il existe un ensemble de mesure de Lebesgue strictement positive dans l'espace des actions correspondant à des fréquences diophantiennes [Pya69] (Théorème 50 ci-dessous). La théorie des approximations diophantiennes sur les sous-variétés a été utilisée en théorie des systèmes dynamiques, notamment par Parasyuk [Par83, Par84], Bakhtin [Bak86, Arn88] et Rüssmann [Rüs90, Rüs94].

Le lemme suivant justifie la définition qui sera donnée d'une courbe et d'une application gauches.

LEMME 44. Soient  $I$  un intervalle ouvert non vide de  $\mathbb{R}$  et  $\nu : I \rightarrow \mathbb{R}^p$  une courbe paramétrée de classe  $C^{p-1}$ . Si l'image de  $\nu$  est contenue dans un hyperplan vectoriel, la fonction  $\nu \wedge \nu' \wedge \dots \wedge \nu^{(p-1)}$  est nulle sur  $I$ . Réciproquement, si la fonction  $\nu \wedge \nu' \wedge \dots \wedge \nu^{(p-1)}$  est nulle sur  $I$  il existe un ouvert  $J \subset I$  tel que l'image de  $\nu|_J$  soit contenue dans un hyperplan vectoriel.

*Démonstration.* La première implication est élémentaire. Montrons la seconde. Soit  $j \in \{0, \dots, p-1\}$  le plus petit entier tel qu'il existe un ouvert  $I_1$  de  $I$  tel que la fonction  $\nu \wedge \nu' \wedge \dots \wedge \nu^{(j)}$  soit nulle sur  $I_1$ . Si  $j = 0$ ,  $J = I_1$  convient et la preuve est terminée. Sinon, il existe  $t_1 \in I_1$  tel que  $\nu(t_1) \wedge \nu'(t_1) \wedge \dots \wedge \nu^{(j-1)}(t_1) \neq 0$  et, par continuité, il existe un voisinage ouvert  $J$  de  $t_1$  dans  $I_1$  sur lequel la fonction  $\nu \wedge \nu' \wedge \dots \wedge \nu^{(j-1)}$  ne s'annule pas. Alors il existe des fonctions  $a_0, \dots, a_{j-1}$  continues sur  $J$  telles que

$$\nu^{(j)} = a_0 \nu + \dots + a_{j-1} \nu^{(j-1)} \quad \text{sur } J.$$

Donc  $\nu$  satisfait à une équation différentielle linéaire d'ordre  $j$  sur  $J$ . Soit  $v$  un vecteur orthogonal à l'espace engendré par les vecteurs  $\nu(0), \dots, \nu^{(j-1)}(0)$ . La fonction  $t \mapsto v \cdot \nu(t)$  satisfait la même équation différentielle que  $\nu$ , avec de plus comme conditions initiales :  $v \cdot \nu(0) = \dots = v \cdot \nu^{(j-1)}(0) = 0$ . Elle est donc identiquement nulle sur  $J$ . Le lemme en découle.  $\square$

DÉFINITION 45. Soit  $\nu : I \rightarrow \mathbb{R}^p$  une courbe de classe  $C^{p-1}$  définie sur un intervalle compact  $I$  de  $\mathbb{R}$  de longueur non nulle. La courbe  $\nu$  est *gauche en un point*  $t \in I$  si

$$\nu(t) \wedge \nu'(t) \wedge \dots \wedge \nu^{(p-1)}(t) \neq 0.$$

Elle est *gauche* si elle est gauche en tout point de  $I$ .

(Nous dirions que  $\nu$  est *fortement gauche* si son image locale n'était nulle part contenue dans un hyperplan affine; dans ce cas, Pyartli [Pya69] dit *essentially nonplanar* et Herman [Her98] dit *non planaire*. Herman [Her98] dit *H non planaire* (H pour homogène) au lieu de (faiblement) gauche. D'autres auteurs diraient de  $\nu$  qu'elle est *de torsion totale*, mais cette terminologie est ambiguë dans le contexte de la dynamique hamiltonienne.)

Notons  $A_\nu : I \rightarrow M_p(\mathbb{R})$  la fonction à valeurs dans les matrices carrées, définie par

$$A_\nu = {}^t(\nu, \nu', \dots, \nu^{(p-1)}) = (\nu_j^{(i-1)})_{1 \leq i, j \leq p},$$

et

$$\|A_\nu(t)\| = \max_{x \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}} \frac{\|A_\nu(t) \cdot x\|}{\|x\|}, \quad (23)$$

où  $\|\cdot\|$  désigne, dans le membre de droite, la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^p$ . La courbe  $\nu$  est gauche sur  $I$  si et seulement si  $\text{Det } A_\nu(t) \neq 0$ . Si c'est la cas, comme  $I$  est compact, il existe deux réels  $0 < a\sqrt{p} \leq b$  tels que

$$\begin{cases} \max_{t \in I} \|A_\nu(t)^{-1}\| \leq \frac{1}{a\sqrt{p}} \\ \max_{t \in I} \|A_\nu(t)\| \leq b. \end{cases} \quad (24)$$

DÉFINITION 46. La courbe  $\nu$  est  $(a, b)$ -gauche si les conditions (24) sont satisfaites.

EXEMPLE 47. La courbe monomiale

$$\nu : t \in [0, 1] \mapsto (1, t, \dots, t^{p-1}) \in \mathbb{R}^p$$

est  $(1/\sqrt{p}, (p-1)!)$ -gauche. En effet, avec la convention de noter  $1/n! = 0$  si  $n \in \mathbb{Z}^-$  on a

$$A_\nu(t) = \left( \frac{(j-1)!}{(j-i)!} t^{j-i} \right)_{1 \leq i, j \leq p}.$$

EXEMPLE 48 (L. CHIERCHIA) L'hamiltonien complètement intégrable défini sur  $\mathbb{T}^4 \times \mathbb{R}^4$  par

$$H = \frac{1}{4}r_1^4 + \frac{1}{2}r_1^2r_2 + r_1r_3 + r_4$$

est isochroniquement et isoénergétiquement dégénéré; mais son application fréquence est une fonction gauche de  $r_1$  en  $(r_1, 0, 0, 0)$ ,  $r_1 \neq 0$ .

LEMME 49. Si une courbe  $\nu = (\alpha, \beta) : I \mapsto \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ ,  $t \mapsto (\alpha(t), \beta(t))$  est  $(a, b)$ -gauche au point  $t_0 \in I$ , alors quels que soient les réels  $\epsilon, \delta \in ]0, 1]$  la courbe  $\nu_{\epsilon, \delta} : t \mapsto (\alpha(t_0 + \delta t), \epsilon\beta(t_0 + \delta t))$  est  $(\epsilon\delta^{p+q-1}a, b)$ -gauche en 0.

Démonstration. Ceci découle du fait que  $A_{\nu_{\epsilon, \delta}} = D'_\delta \cdot A_\nu \cdot D_\epsilon$ , où  $D_\epsilon$  et  $D'_\delta$  sont les matrices de dilatation

$$D_\epsilon = \begin{pmatrix} \text{id}_{\mathbb{R}^p} & 0 \\ 0 & \epsilon \text{id}_{\mathbb{R}^q} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D'_\delta = \text{Diag} (1, \delta, \dots, \delta^{p+q-1}).$$

□

THÉORÈME 50 (PYARTLI) Soit  $\tau > p^2 - 1$  un réel. Il existe une constante  $C_{\tau, p}$  telle que si  $\nu \in C^\infty(I, \mathbb{R}^p)$  est  $(a, b)$ -gauche et si  $\gamma > 0$  est assez petit on a

$$\left| \left\{ t \in I \mid \nu(t) \notin \text{DH}_{\gamma, \tau}(p) \right\} \right| \leq C_{\tau, p} \left( \frac{b}{a} |I| + 1 \right) \left( \frac{\gamma}{a} \right)^{1/p},$$

où  $|\cdot|$  désigne la mesure de Lebesgue d'un ensemble mesurable. En particulier on a  $\nu(t) \in \text{DH}_\tau(p)$   $dt$ -presque partout.

La démonstration qui suit est une adaptation de celle de Pyartli [Pya69] au cas homogène. Elle est faite des propriétés 51 à 55. Herman ne fait pas cette adaptation et utilise l'estimation de Pyartli indirectement dans le projectif  $\mathbb{R}P^{p-1}$ . Le corollaire 55 sera aussi utilisé pour démontrer le raffinement que constitue le corollaire 56.

Soit  $v \in \mathbb{S}^{p-1} \subset \mathbb{R}^p$ . Notons  $\nu_v$  la fonction

$$\nu_v : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto v \cdot \nu(t) = v_1\nu_1(t) + \dots + v_p\nu_p(t).$$

LEMME 51 (MARGULIS) La fonction  $\nu_v$  satisfait, pour tout  $t \in I$ ,

$$a \leq \max_{0 \leq j \leq p-1} |\nu_v^{(j)}(t)| \leq b.$$

*Démonstration du lemme.* On a

$$\max_{0 \leq j \leq p-1} |\nu_v^{(j)}(t)| \leq \|A_\nu(t) \cdot v\| \leq \|A_\nu(t)\| \leq b$$

et

$$\sqrt{p} \max_{0 \leq j \leq p-1} |\nu_v^{(j)}(t)| \geq \|A_\nu(t) \cdot v\| \geq \frac{1}{\|A_\nu(t)^{-1}\|} \geq \sqrt{p} a.$$

□

La difficulté pour utiliser cette estimation est qu'a priori la valeur de  $j$  qui réalise le maximum dépend de la valeur de  $t$ .

LEMME 52. *Si  $J$  est un sous-intervalle de  $I$  de longueur majorée par  $a/(2b)$ , il existe un entier  $j \in \{0, \dots, p-1\}$  tel que pour tout  $t \in J$  on a  $|\nu_v^{(j)}(t)| \geq a/2$ .*

*Démonstration du lemme.* Si pour tout  $j \in \{0, \dots, p-2\}$  et pour tout  $t \in J$  on a  $|\nu_v^{(j)}(t)| < a$ , d'après le Lemme 51 pour tout  $t \in J$  on a  $|\nu_v^{(p-1)}(t)| \geq a \geq a/2$ , donc  $j = p-1$  convient. Sinon il existe  $j \in \{0, \dots, p-2\}$  et  $t_0 \in J$  tels que  $|\nu_v^{(j)}(t_0)| \geq a$ ; alors pour tout  $t \in J$  on a, d'après le Lemme 51,

$$|\nu_v^{(j)}(t)| \geq |\nu_v^{(j)}(t_0)| - \int_{t_0}^t |\nu_v^{(j+1)}(\tau)| d\tau \geq a - b \frac{a}{2b} \geq \frac{a}{2}.$$

□

LEMME 53. *Si  $J$  est un sous-intervalle compact de  $I$  de longueur majorée par  $a/(2b)$  et si  $j$  est un entier comme dans le Lemme 52, pour tout  $k \in \{0, \dots, j\}$  il existe un sous-intervalle compact  $J_k$  de  $J$  tel que*

$$|J_k| = 3^{-k}|J| \quad \text{et} \quad |\nu_v^{(j-k)}(t)| \geq 3^{-k(k+3)/2} \frac{a}{2} |J|^k \quad (\forall t \in J_k).$$

*Démonstration du lemme.* La conclusion est vérifiée pour  $k = 0$ . Supposons-la vérifiée à un rang  $k-1 \in \{0, \dots, j-1\}$ . Notons  $c_{k-1} = 3^{-(k-1)(k+2)/2} \frac{a}{2} |J|^{k-1}$  et  $J_{k-1} = [\alpha, \alpha + 3\delta]$ . Soient  $I_1 = [\alpha, \alpha + \delta]$ ,  $I_2 = [\alpha + \delta, \alpha + 2\delta]$  et  $I_3 = [\alpha + 2\delta, \alpha + 3\delta]$ . Si pour tout  $t \in I_1$  on a  $|\nu_v^{(j-k)}(t)| \geq c_{k-1}|J_{k-1}|/9$  et on peut poser  $J_k = I_1$  et  $c_k = c_{k-1}|J_{k-1}|/9$ . Sinon il existe  $t_1 \in I_1$  tel que

$$|\nu_v^{(j-k)}(t_1)| < c_{k-1}|J_{k-1}|/9;$$

alors pour tout  $t_3 \in I_3$  on a

$$\begin{aligned} |\nu_v^{(j-k)}(t_3)| &\geq -|\nu_v^{(j-k)}(t_1)| + \int_{t_1}^{t_3} |\nu_v^{(j-k+1)}(t)| dt \\ &\geq -\frac{1}{9}c_{k-1}|J_{k-1}| + \frac{1}{3}|J_{k-1}|c_{k-1} = \frac{2}{9}c_{k-1}|J_{k-1}| \\ &\geq c_k = \frac{1}{9}c_{k-1}|J_{k-1}| = 3^{-k(k+3)/2} \frac{a}{2} |J|^k. \end{aligned}$$

Donc  $J_k = I_3$  convient. Ceci démontre par récurrence le résultat voulu. □

COROLLAIRE 54. *Si  $J$  est un sous-intervalle compact de  $I$  de longueur majorée par  $a/(2b)$ , pour tout  $\epsilon > 0$  assez petit on a*

$$\left| (\nu_v|_J)^{-1}([-\epsilon, \epsilon]) \right| \leq \min \left( p 3^{p+2} \left( \frac{4\epsilon}{a} \right)^{1/p}, |J| \right).$$

*Démonstration du corollaire.* Soit  $j$  un entier tel que dans le Lemme 52. Si  $j = 0$ , pour tout  $t \in J$  on a  $|\nu_v(t)| \geq a/2$  donc si  $\epsilon < a/2$  l'image réciproque de l'intervalle  $[-\epsilon, \epsilon]$  par  $\nu_v|_J$  est vide. Sinon, d'après le Lemme 52 et le théorème de Rolle  $\nu_v|_J$  a au plus  $j$  zéros. Comme  $J$  est compact, pour tout  $\epsilon$  assez petit il existe un entier  $k \leq j$  et des intervalles compacts  $I_1, \dots, I_k$  tels que

$$\nu_v|_J^{-1}([-\epsilon, \epsilon]) = I_1 \cup \dots \cup I_k.$$

Le Lemme 53 appliqué au sous-intervalle  $I_l$  ( $l \in \{1, \dots, k\}$ ) montre qu'il existe en particulier un sous-intervalle compact  $J_{j-1} = [\alpha, \beta]$  de  $I_l$  tel que  $\beta - \alpha = 3^{1-j}|I_j|$  et

$$|\nu_v'|_{J_{j-1}}| \geq 3^{-(j-1)(j+2)/2} \frac{a}{2} |I_l|^{j-1}.$$

Alors

$$\begin{aligned} 2\epsilon &\geq |\nu_v(\beta) - \nu_v(\alpha)| = \int_{\alpha}^{\beta} |\nu_v'(t)| dt \\ &\geq 3^{-(j-1)(j+2)/2} \frac{a}{2} |I_l|^j, \end{aligned}$$

donc

$$|I_l| \leq 3^{(j-1)(j+4)/(2j)} \left(\frac{4\epsilon}{a}\right)^{1/j} \leq 3^{j+2} \left(\frac{4\epsilon}{a}\right)^{1/j}.$$

La majoration à montrer en découle.  $\square$

**COROLLAIRE 55.** *Pour tout  $\epsilon > 0$  suffisamment petit on a*

$$\nu_v^{-1}([-\epsilon, \epsilon]) \leq \left(2\frac{b}{a}|I| + 1\right) p 3^{p+2} \left(\frac{4\epsilon}{a}\right)^{1/p}.$$

*Démonstration du corollaire.* Subdivisons l'intervalle  $I$  en  $[2b/a|I|] + 1$  intervalles  $J$  compacts de même longueur, inférieure à  $a/(2b)$ . Il suffit alors d'appliquer le corollaire 54 à  $\nu_v$  sur chacun de ces sous-intervalles  $J$ .  $\square$

*Fin de la démonstration du Théorème 50.* Par la Définition (12) on a

$$\text{DH}_{\gamma, \tau}(p) = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^p ; \forall k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\} |k \cdot \alpha| \geq \frac{\gamma}{\|k\|^\tau} \right\},$$

donc

$$\{t \in I ; \nu(t) \notin \text{DH}_{\gamma, \tau}(p)\} \subset \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^p \setminus 0} a_k, \quad a_k = \left\{ t \in I ; \left| \frac{k}{\|k\|} \cdot \nu(t) \right| < \frac{\gamma}{\|k\|^{\tau+1}} \right\}.$$

Or, le corollaire 55 appliqué avec  $\epsilon = \gamma \|k\|^{-\tau-1}$  montre que si  $\gamma$  est assez petit on a

$$|a_k| \leq \left(2\frac{b}{a}|I| + 1\right) p 3^{p+2} \left(\frac{4\gamma}{a\|k\|^{\tau+1}}\right)^{1/p}.$$

Donc

$$|\cup_{k \in \mathbb{Z}^p \setminus 0} a_k| \leq C_{\tau, p} \left(\frac{b}{a}|I| + 1\right) \left(\frac{\gamma}{a}\right)^{1/p},$$

où la constante

$$C_{\tau,p} = 2p4^{1/p} 3^{p+2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^p \setminus 0} \|k\|^{-(\tau+1)/p}$$

est finie à condition que  $(\tau + 1)/p > p$ , soit  $\tau > p^2 - 1$ .  $\square$

L'estimation du corollaire 55, et donc celle du Théorème 50, ont l'inconvénient de se détériorer quand la taille  $|I|$  du domaine de définition de l'application fréquence tend vers 0. Cette insuffisance peut cependant être contournée lorsqu'on se localise au voisinage d'une fréquence diophantienne. L'estimation suivante améliore celle du Théorème 50 au voisinage d'un vecteur diophantien.

**COROLLAIRE 56.** *Sous les hypothèses du Théorème 50, supposons de plus que  $t_0 \in \text{Int } I$  est tel que  $\nu(t_0) \in \text{DH}_{\gamma_0, \tau_0}(p)$ . Alors pour tout entier  $n$  il existe deux réels  $0 < \gamma \leq \gamma_0/2$  et  $\tau \geq \tau_0$  tels que quand  $\epsilon$  tend vers  $0^+$  on ait*

$$|\{t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \nu(t) \notin \text{DH}_{\gamma, \tau}(p)\}| = O(\epsilon^n).$$

*Démonstration.* Pour tout  $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$ , notons

$$\mathfrak{a}_k = \left\{ t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], |k \cdot \nu(t)| < \frac{\gamma}{\|k\|^\tau} \right\},$$

de sorte que l'on a

$$\{t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \nu(t) \notin \text{DH}_{\gamma, \tau}(p)\} = \cup_{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}} \mathfrak{a}_k.$$

Soit d'abord  $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$  tel que  $\frac{\gamma}{\|k\|^{\tau_0+1}} \geq \epsilon$ . Comme  $\nu$  est  $(a, b)$ -gauche, pour tout  $t \in I$  on a

$$\|\nu'(t)\| \leq \frac{1}{\sqrt{p}} \|A_\nu\| \leq \frac{b}{\sqrt{p}}.$$

Donc pour tout  $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$  on a  $|\nu(t) - \nu(t_0)| \leq b\epsilon$  et

$$|k \cdot \nu(t)| \geq |k \cdot \nu(t_0)| - |k \cdot (\nu(t) - \nu(t_0))| \geq \frac{\gamma_0}{\|k\|^{\tau_0}} - \frac{b\gamma}{\|k\|^{\tau_0}};$$

si

$$\gamma = \min\left(\frac{1}{b}, 1\right) \frac{\gamma_0}{2} \quad \text{et} \quad \tau \geq \tau_0,$$

on obtient  $t \notin \mathfrak{a}_k$ . Donc pour que  $\mathfrak{a}_k$  soit non vide il faut que le multi-indice  $k$  vérifie

$$\|k\| \geq \left(\frac{\gamma}{\epsilon}\right)^{1/(\tau_0+1)}. \quad (25)$$

Maintenant, quel que soit  $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$ , le corollaire 55 donne l'estimation suivante de  $|\mathfrak{a}_k|$  :

$$|\mathfrak{a}_k| \leq C_{p,I,a,b} \left(\frac{\gamma}{\|k\|^{\tau+1}}\right)^{1/p},$$

où  $C_{p,I,a,b}$  est un réel indépendant de  $\gamma, \tau$  et  $k$ . (Notons que dans l'espace des paramètres on perd un facteur  $\epsilon^{p-1}$  par rapport à une estimation dans l'espace des

fréquences, parce que l'estimation du corollaire 55 est mauvaise quand la taille de l'intervalle  $|I|$  est petite. Cette détérioration des estimations n'empêchera pas de conclure, parce qu'elle sera absorbée par un  $\tau$  plus grand.) Or, pour tout entier  $K \geq 1$ , le cardinal de l'ensemble

$$\{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}, K \leq \|k\| < K + 1\}$$

est (grossièrement) majoré par  $C'_p K^p$ , où  $C'_p$  est un réel ne dépendant que de la dimension. Donc il existe un réel  $C'' = C_{p,I,a,b} C'_p$  ne dépendant ni de  $\epsilon$  ni de  $\tau$  tel que

$$|\cup_{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}} A_k| \leq C'' \gamma^{1/p} \sum_{K > (\gamma/\epsilon)^{1/(\tau_0+1)}} K^{(-\tau+p^2-1)/p},$$

d'où la conclusion.  $\square$

Considérons maintenant une application  $\nu : \bar{\mathbb{B}} \rightarrow \mathbb{R}^p$ , de classe  $C^{p-1}$ , où  $\bar{\mathbb{B}}$  est une boule fermée de  $\mathbb{R}^r$ .

**DÉFINITION 57.** L'application  $\nu$  est *gauche* (resp. *(a, b)-gauche*) en un point  $t \in \bar{\mathbb{B}}$  s'il existe un germe d'immersion  $c : (I, s) \rightarrow (\bar{\mathbb{B}}, t)$ , où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , telle que la courbe  $\nu \circ c$  soit gauche (resp. *(a, b)-gauche*) en  $s$ . Elle est *gauche* (resp. *(a, b)-gauche*) si elle l'est en tout point  $t \in \bar{\mathbb{B}}$ .

(Pyartli [Pya69] définit la notion de sous-variété paramétrée non dégénérée, qui est un cas particulier d'application gauche.)

**THÉORÈME 58 (PYARTLI)** *Soit  $\tau > p^2 - 1$ . Il existe un réel  $C = C_{\tau,p,r,\bar{B}}$  tel que si une application  $\nu : \bar{B} \subset \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^p$  est *(a, b)-gauche* et si  $\gamma > 0$  est un réel assez petit, on a*

$$|\{t \in \bar{B}, \nu(t) \notin \text{DH}_{\gamma,\tau}(p)\}| \leq C \left(\frac{b}{a} + 1\right) \left(\frac{\gamma}{a}\right)^{1/p};$$

*En particulier on a  $\nu(t) \in \text{DH}_{\tau}(p)$  dt-presque partout.*

*Démonstration.* Soit  $t \in \bar{B}$ . Soient  $I$  un voisinage connexe fermé de 0 assez petit et  $c : I \rightarrow \bar{B}$ ,  $s \mapsto c(s)$ , une immersion passant par  $t$  en  $s = 0$  telle que  $\nu \circ c$  soit gauche. D'après le théorème d'immersion il existe un difféomorphisme local  $\phi : (\bar{B}, t) \rightarrow (\bar{B}, t)$  tel que  $\phi \circ c$  soit la courbe

$$\hat{c}_t : s \mapsto (t_1 + s, t_2, \dots, t_r).$$

Comme  $\nu \circ c$  est *(a, b)-gauche*, il existe un voisinage  $J$  de 0 dans  $I$  et un voisinage  $V$  de  $t$  dans  $\bar{B}$  tels que pour tout  $\hat{t} \in V$  la courbe

$$\hat{\nu} \circ \hat{c}_{\hat{t}} : J \rightarrow \nu(V), \quad s \mapsto \hat{\nu}(\hat{t}_1 + s, \hat{t}_2, \dots, \hat{t}_r),$$

où  $\hat{\nu} = \nu \circ \phi^{-1}$  et  $\hat{c}_{\hat{t}} : s \mapsto (\hat{t}_1 + s, \hat{t}_2, \dots, \hat{t}_r)$ , soit *(a/2, 2b)-gauche* sur  $J$ . D'après le Théorème 50 et le théorème de Pyartli, si  $\gamma$  est assez petit il existe un réel  $C > 0$  tel que

$$|\{s \in J, \hat{\nu} \circ \hat{c}_{\hat{t}}(s) \notin \text{DH}_{\gamma,\tau}(p)\}| \leq C \left(\frac{a}{b} + 1\right) \left(\frac{\gamma}{a}\right)^{1/p}.$$

Donc, pour tout  $\hat{t} \in V$  la mesure de Lebesgue 1-dimensionnelle de

$$\{t' = (\hat{t}_1 + s, \hat{t}_2, \dots, \hat{t}_r) \in V, \hat{\nu}(t') \in \text{DH}_{\gamma, \tau}(p)\}$$

possède le même majorant. D'après le théorème de Fubini, la mesure de Lebesgue  $p$ -dimensionnelle de

$$\{\hat{t} \in V, \hat{\nu}(\hat{t}) \in \text{DH}_{\gamma, \tau}(p)\}$$

satisfait une estimation analogue, et de même en remplaçant  $\hat{\nu}$  par  $\nu = \hat{\nu} \circ \phi$ . En prenant enfin un sous-recouvrement fini de  $\bar{B}$  par des ouverts du type de  $\phi^{-1}(V)$  on en déduit l'estimation voulue.  $\square$

**5.3. Théorème de tores invariants isotropes** Dans cette partie nous généralisons le Théorème 43 d'une part en affaiblissant la condition requise de non-dégénérescence de l'application fréquence et d'autre part en trouvant des tores invariants isotropes qui ne sont pas forcément lagrangiens.

Considérons l'espace des phases

$$\mathbb{P}_{\delta_0} = \mathbb{T}^p \times \bar{\mathbb{B}}_{\delta_0}^{p+2q}(r_0, 0)$$

(où  $\bar{\mathbb{B}}_{\delta_0}^{p+2q}(r_0, 0)$  désigne la boule euclidienne fermée de  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{2q}$  de rayon  $\delta_0$  et centrée en  $(r_0, 0)$ ), les coordonnées naturelles  $(\theta, r, z)$ , la 1-forme de Liouville standard  $\lambda = r \cdot dr + y \cdot dx$ , la forme symplectique standard  $\omega = d\theta \wedge dr + 1/(2i)d\bar{z} \wedge dz$  et un hamiltonien de classe  $C^\infty$  de la forme

$$F^o = f^o(r) + \frac{1}{2}Q_{\beta_r^o} \cdot z^2 + O(z^3; \theta, r)$$

où (cf. le paragraphe 4.1)

$$\frac{1}{2}Q_{\beta_r^o} \cdot z^2 = \pi \sum_{j=1}^{q'} \beta_j^o(r)(x_j^2 - y_j^2) + \pi \sum_{j=q'+1}^q \beta_j^o(r)(x_j^2 + y_j^2)$$

et où  $O(z^3; \theta, r)$  désigne des termes d'ordre 3 ou plus en  $z$ , dépendant éventuellement de  $\theta$  et de  $r$ . Notons  $t_s$  la translation définie sur  $\mathbb{P}_{\delta_0}$  par  $t_s(\theta, r, z) = (\theta, s + r, z)$ . Quel que soit  $s \in \mathbb{B}_{\delta_0}^p(r_0)$ , le tore

$$\mathbb{T}_s^p = \mathbb{T}^p \times \{s\} \times \{z = 0\}$$

est  $F^o$ -invariant et la forme normale de  $F^o$  le long de  $\mathbb{T}_s^p$  est (à une constante additive près)

$$F^o \circ t_s = \alpha_s^o \cdot r + \frac{1}{2}Q_{\beta_s^o} \cdot z^2 \pmod{\Delta \mathcal{N}}, \quad \alpha_s^o = \frac{\partial f^o}{\partial r}(s);$$

en particulier, le vecteur des fréquences tangentielles et normales de  $\mathbb{T}_s^p$  est  $(\alpha_s^o, \beta_s^o)$ . Rappelons du paragraphe 4.1 que  $\Delta \mathcal{N} = O(r^2, rz, 3)$  et que  $\text{Diff}_\lambda^\infty(\mathbb{P}_{\delta_0})$  est le groupe des difféomorphismes symplectiques exacts de  $\mathbb{P}_{\delta_0}$ . Pour  $\epsilon, \delta > 0$  avec  $\delta \leq \delta_0$ , notons  $\mathbb{B}_{\epsilon, \delta}^{C^k}(F^o)$  la  $C^k$ -semi-boule de centre  $F^o|_{\mathbb{P}_\delta}$  et de rayon  $\epsilon$  dans  $C^\infty(\mathbb{P}_\delta)$ .

THÉORÈME 59 (RÜSSMANN) *Si l'application fréquence  $r \mapsto (\alpha_r^o, \beta_r^o)$  est gauche en  $r_0$ , il existe un entier  $k \geq 1$ , des réels  $\epsilon, \delta, \gamma, \tau > 0$  et deux applications  $C^\infty$*

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathbb{B}_{\epsilon, \delta}^{C^k}(F^o) \times \mathbb{B}_\delta^p(r_0) &\longrightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \Delta \mathcal{N} \\ (F, s) &\longmapsto (\alpha_s(F), \beta_s(F), \Delta N_s(F)) \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{G} : \mathbb{B}_{\epsilon, \delta}^{C^k}(F^o) \rightarrow \text{Diff}_\lambda^\infty(\mathbb{P}_{2\delta}), \quad F \mapsto \mathcal{G}(F),$$

tels que :

1°  $\mathcal{G}(F^o) = \text{id}_{\mathbb{P}_s}$  et, quel que soit  $s \in \mathbb{B}_\delta^p(r_0)$ ,  $(\alpha_s(F^o), \beta_s(F^o)) = (\alpha_s^o, \beta_s^o)$  ;

2° quels que soient  $F \in \mathbb{B}_{\epsilon, \delta}^{C^k}(F^o)$  et  $s \in \mathbb{B}_\delta^p(r_0)$  tels que  $(\alpha_s(F), \beta_s(F)) \in \text{DH}_{\gamma, \tau}(p, q)$ , le tore plongé  $\mathcal{G}(\mathbb{T}_s^p)$  est  $F$ -invariant et la forme normale de  $F$  le long de ce tore est (à une constante additive près)

$$F \circ \mathcal{G} \circ t_s = \alpha_s(F) \cdot r + \frac{1}{2} Q_{\beta_s} \cdot z^2 + \Delta N_s(F)(\theta, r, z) ;$$

3° quel que soit  $F \in \mathbb{B}_{\epsilon, \delta}^{C^k}(F^o)$ , la mesure de surface  $2p$ -dimensionnelle de la réunion des tores invariants  $\mathcal{G}(\mathbb{T}_s^p) \subset \mathcal{G}(\mathbb{T}^p \times \mathbb{B}_\delta^p(r_0) \times \{0\})$ , avec  $s \in \mathbb{B}_\delta^p(r_0)$  et  $(\alpha_s(F), \beta_s(F)) \in \text{DH}_{\gamma, \tau}(p, q)$ , est strictement positive.

Enfin, il existe un réel  $C > 0$  et un entier  $n_1 \geq 0$  tels que si l'application fréquence  $r \mapsto (\alpha_r^o, \beta_r^o)$  est  $(a, b)$ -gauche en  $r_0$ , on peut choisir  $\epsilon = C(a/b)^{n_1}$ .

*Démonstration.*

1° *Détermination de  $k, \delta, \gamma$  et  $\tau$ .* Il existe  $\delta < \delta_0/2$  et  $a, b > 0$  tels que l'application  $r \mapsto (\alpha_r^o, \beta_r^o)$  soit  $(2a, b/2)$ -gauche sur  $\bar{\mathbb{B}}_{2\delta}^p(r_0)$ . Soit  $\tau$  un réel  $> (p+q)^2 - 1$ . D'après le Théorème 58 et l'inclusion (13), il existe un réel  $C > 0$  tel que pour toute courbe  $\nu$  qui est  $(a, b)$ -gauche sur  $\bar{\mathbb{B}}_\delta^p(r_0)$  la mesure de

$$\{r \in \bar{\mathbb{B}}_\delta^p(r_0), \nu(r) \in \text{DH}_{\gamma, \tau}(p, q', q'')\}, \quad \gamma = C(a/b)^{p+1},$$

soit strictement positive (l'exposant n'est pas optimal). Quitte à diminuer  $C$ , le corollaire 39 implique qu'il existe  $k, n_0, C_1 > 0$  tels que pour tout vecteur  $(\alpha, \beta) \in \text{DH}_{\gamma, \tau}(p, q', q'')$  l'image locale de l'application  $\Phi_{\alpha, \beta}$  contient une  $C^k$ -semi-boule de rayon  $C_1(a/b)^{n_0}$ . Comme dans la démonstration du Théorème 43, on voit qu'il existe  $\epsilon_1 > 0$  tel que quels que soient  $F \in \mathbb{B}_{\epsilon_1, \delta}^{C^k}(F^o)$  et  $s \in \mathbb{B}_\delta^p(r_0)$  l'hamiltonien  $F \circ t_s$  est dans l'image locale de  $\Phi_{\alpha_s^o, \beta_s^o}$  en  $(F^o \circ t_s, \text{id}, 0, 0)$ .

2° *Construction de  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  et détermination de  $\epsilon$ .* Le même raisonnement que dans la démonstration du Théorème 43 montre qu'il existe un réel  $\epsilon > 0$  et une application

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{F}} : \mathbb{B}_{\epsilon, \delta}^{C^k}(N^o) \times \mathbb{B}_\delta^p(r_0) &\rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathcal{G}_\delta \times \Delta \mathcal{N} \\ (F, s) &\mapsto (\alpha_s, \beta_s, G_s, \Delta N_s) = (\alpha_s(F), \beta_s(F), G_s(F), \Delta N_s(F)) \end{aligned}$$

de classe  $C^\infty$  telle que pour tout

$$s \in \text{dh}_{\delta, \gamma, \tau} = \{r \in \mathbb{B}_\delta^p(r_0), (\alpha_r, \beta_r) \in \text{DH}_{\gamma, \tau}(p, q)\}$$

on ait, à une constante additive près,

$$F \circ t_s = \left( \alpha_s \cdot r + \frac{1}{2} Q_{\beta_s} \cdot z^2 + \Delta N_s \right) \circ G_s.$$

En particulier, le tore  $G_s^{-1}(\mathbb{T}_0^p)$  est  $(F \circ t_s)$ -invariant et l'application  $\mathcal{F} : (F, s) \mapsto (\alpha_s(F), \beta_s(F), \Delta N_s(F))$  est de classe  $C^\infty$ . La construction du difféomorphisme symplectique  $\mathcal{G}$  est analogue à celle de la démonstration du Théorème 43.

3° *Estimation.* De même que dans la démonstration du Théorème 43, l'ensemble  $\text{dh}_{\delta, \gamma, \tau} \subset \mathbb{B}_\delta^p(r_0)$  est de mesure de Lebesgue strictement positive d'après nos choix initiaux de constantes; il en va de même de  $\mathbb{T}^p \times \text{dh}_{\delta, \gamma, \tau} \subset \mathbb{T}^p \times \mathbb{B}_\delta^p$  d'après le théorème de Fubini; comme de plus  $\mathcal{G}$  est un difféomorphisme, la mesure  $2p$ -dimensionnelle de la réunion

$$\mathcal{G}(\mathbb{T}^p \times \text{dh}_{\delta, \gamma, \tau} \times \{0\})$$

des tores invariants trouvés dans la variété plongée  $\mathcal{G}(\mathbb{T}^p \times \mathbb{B}_\delta^p \times \{0\})$  est strictement positive. □

5.4. *Théorème de stabilité d'Herman* Dans cette partie nous utilisons le Théorème 59 pour démontrer le théorème que nous appliquerons au système planétaire.

Considérons, sur le même espace des phases  $\mathbb{P}_{\delta_0}$ , un hamiltonien de classe  $C^\infty$  de la forme

$$H_\epsilon = H^0(r) + \epsilon H_\epsilon^1(r, z) + \epsilon H_\epsilon^2(\theta, r, z), \quad (26)$$

où  $H^1$  et  $H^2$  sont deux hamiltoniens de classe  $C^\infty$  dépendant continûment du paramètre  $\epsilon \geq 0$ , tels que

$$\begin{cases} H_\epsilon^1 = h^0(r) + \frac{1}{2} Q_{\beta^0(r)} \cdot z^2 + O(z^3; r, \epsilon) \\ \frac{1}{2} Q_{\beta^0(r)} \cdot z^2 = \pi \sum_{j=1}^q \beta_j^0(r) (x_j^2 + y_j^2) + O(z^3; r, \epsilon) \\ \int_{\mathbb{T}^p \times \{r\} \times \{z\}} H_\epsilon^2(\theta, r, z) d\theta = 0 \quad (\forall (r, z) \in \mathbb{B}_{\delta_0}^{p+2q}(r_0, 0)). \end{cases} \quad (27)$$

Par rapport au Théorème 59, nous avons supposé que les tores  $\mathbb{T}_r^p$  sont elliptiques ( $q' = 0$ ). (L'hamiltonien moyenné du système planétaire possède aussi des tores hyperboliques [JM66, F  j02a], que nous n'utiliserons pas).

Pour tous  $s \in \mathbb{B}_{\delta_0}^p(r_0)$  et  $w \in ]0, \delta_0^2[q$ , notons

$$\mathbb{T}_{s,w}^{p+q} = \mathbb{T}^p \times \{s\} \times \{z \in \mathbb{B}_{\delta_0}^{2q}(0), |z_1|^2 = w_1, \dots, |z_q|^2 = w_q\}$$

et  $t_{s,w}$  l'application

$$\begin{aligned} t_{s,w} : \mathbb{P}_{\delta_0} \setminus (\mathbb{T}^p \times \mathbb{B}_{\delta_0}^p(r_0) \times \{0\}) &\rightarrow \mathbb{P}_{2\delta_0} \setminus (\mathbb{T}^p \times \mathbb{B}_{\delta_0}^p(r_0) \times \{0\}) \\ (\theta, r, z) &\mapsto (\theta, s + r, z') \end{aligned}$$

avec

$$z' = (z'_1, \dots, z'_q), \quad z'_j = \sqrt{|z_j|^2 + w_j} \exp(i \text{Arg } z_j).$$

Quel que soit  $s \in \mathbb{B}_{\delta_0}^p(r_0)$ , le tore isotrope  $\mathbb{T}_s^p$  est invariant pour l'hamiltonien  $H^o + \epsilon H_\epsilon^1$ , qui a pour forme normale le long de ce tore (à une constante additive près)

$$(H^o + \epsilon H_\epsilon^1) \circ t_{r,0} = \left( \alpha_s^o + \epsilon \frac{\partial h^o}{\partial r}(s) \right) \cdot r + \frac{\epsilon}{2} Q_{\beta_s^o} \cdot z^2 \pmod{\Delta \mathcal{N}},$$

où l'on a posé  $\alpha_s^o = \frac{\partial H^o}{\partial r}(s)$ . En se décalant de l'âme de la singularité elliptique dans chaque plan symplectique  $(x_j, y_j)$  (c'est-à-dire en prenant  $w_j > 0$ ), on peut trouver des tores lagrangiens invariants; on reporte à la démonstration du théorème ci-dessous l'écriture de leur forme normale.

**THÉORÈME 60 (HERMAN)** *Si l'application fréquence  $r \mapsto (\alpha_r^o, \beta_r^o)$  est gauche en  $r_0$ , il existe des réels  $\epsilon_0, \gamma, \tau > 0$  et deux applications  $C^\infty$*

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : ]0, \epsilon_0] \times \mathbb{B}_\delta^p(r_0) \times ]1, 2]^q &\longrightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \Delta \mathcal{N} \\ (\epsilon, s, w) &\longmapsto (\alpha, \beta, \Delta N) \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{G} : ]0, \epsilon_0] \rightarrow \text{Diff}_\lambda^\infty(\mathbb{P}_\delta), \quad \epsilon \mapsto \mathcal{G}_\epsilon,$$

tels que :

1°  $\alpha$  est  $\epsilon$  proche de  $\alpha^o$ ,  $\beta$  de 0 et  $\mathcal{G}$  de l'identité;

2° quel que soit  $(\epsilon, s, w) \in ]0, \epsilon_0] \times \mathbb{B}_\delta^p(r_0) \times ]1, 2]^q$  tel que  $(\alpha, \beta) \in \text{DH}_{\gamma, \tau}(p, q)$  le tore plongé  $\mathcal{G}_\epsilon(\mathbb{T}_{s, \epsilon w}^{p+q})$  est  $H_\epsilon$ -invariant et la forme normale de  $H_\epsilon$  le long de ce tore est

$$H_\epsilon \circ \mathcal{G}_\epsilon \circ t_{s, \epsilon w} = \alpha \cdot r + \pi \beta \cdot |z|^2 + \Delta N$$

(où  $\beta \cdot |z|^2 = \beta_1 |z_1|^2 + \dots + \beta_q |z_q|^2$ );

3° quel que soit  $\epsilon \in ]0, \epsilon_0]$ , la mesure de Lebesgue de la réunion des tores invariants dans  $\mathbb{P}_\delta$  obtenus en faisant varier  $s$  et  $w$  est strictement positive.

Il ressortira de la démonstration que, sous les hypothèses du théorème, quels que soient  $l \in \{0, \dots, q\}$  et un sous-ensemble  $J = \{j_1 < \dots < j_{q-l}\} \subset \{1, \dots, q\}$  à  $q-l$  éléments, le flot de  $H_\epsilon$  possède un ensemble des tores invariants difféomorphes à  $\mathbb{T}^{p+l}$  et homotopes à  $\mathbb{T}^p \times \{r = 0\} \times \{z_{j_1} = \dots = z_{j_{q-l}} = 0\}$ , pour lesquels il existe des formes normales analogues à celles que le théorème décrit pour les tores lagrangiens.

La démonstration montrera aussi que la localisation de la recherche des tores lagrangiens entre les distances  $\epsilon$  et  $2\epsilon$  de la singularité elliptique de  $H_\epsilon$  n'a rien d'optimal.

*Démonstration.* L'objectif est d'appliquer le Théorème 59, dans lequel les rôles de  $p$ ,  $q'$  et  $q$  sont désormais joués respectivement par les dimensions  $p+q$ , 0 et 0.

1° *Élimination des angles rapides* à l'ordre  $N_1$  sur  $A_1$ . Soient  $\gamma > 0$  et  $\tau > (p+q)^2 - 1$ . Soit  $L = L_\epsilon^{N_1}$  un difféomorphisme symplectique ( $L$  pour Lindstedt)  $\epsilon$ -proche de l'identité, qui élimine les angles rapides  $\theta$  de  $H_\epsilon$  à un ordre  $N_1$  assez grand sur l'ensemble transversalement cantorien

$$A_1 = A_1(\gamma, \tau) = \{(\theta, r, z), \alpha^o(r) \in \text{DH}_{\gamma, \tau}(p)\} :$$

il existe un hamiltonien  $R_1 = R_{1,\epsilon}^{N_1}$  dont le jet d'ordre infini s'annule sur l'ensemble  $A_1$  et tel que

$$H_\epsilon \circ L = H^o(r) + \epsilon(H_\epsilon^1(r, z) + O(\epsilon; r, z)) + \epsilon R_1 + O(\epsilon^{N_1}; \theta, r, z).$$

2° *Mise sous forme normale de Birkhoff à l'ordre  $N_2$  sur  $A_2 \subset A_1$ .* Soit  $B = B_\epsilon^{N_2}$  un difféomorphisme symplectique de mise sous forme normale de Birkhoff de  $H_\epsilon$  le long des tores  $\mathbb{T}^p \times \{r\} \times \{0\} \subset A_2$ , avec

$$A_2 = A_2(\gamma, \tau) = \{(\theta, r, z), (\alpha^o(r), \beta^o(r)) \in \text{DH}_{\gamma, \tau}(p) \times \text{DH}_{\gamma, \tau}(q)\}$$

(si  $\gamma$  est assez petit, d'après (13) et d'après le Théorème 50,  $A_2$  est de mesure strictement positive) : il existe un hamiltonien  $R_2 = R_{2,\epsilon}^{N_1, N_2}$  dont le jet d'ordre infini s'annule sur  $A_2$  et un polynôme  $Q_{r,\epsilon}$  de  $q$  variables de valuation  $\geq 2$ , de degré  $N_2 - 1$  et dépendant de  $r$  et de  $\epsilon$ , tels que

$$H_\epsilon \circ L \circ B = H^o(r) + \epsilon \tilde{H}_\epsilon^1 + \epsilon R_2 + O(\epsilon^{N_1}; \theta, r, z),$$

avec

$$\tilde{H}_\epsilon^1 = h^o(r) + \pi \sum_{j=1}^q \beta_j^o(r) |z_j|^2 + Q_{\epsilon, r}(\pi |z|^2) + O(z^{2N_2}; r, \epsilon),$$

où l'on a noté  $\pi |z|^2 = (\pi |z_1|^2, \dots, \pi |z_q|^2)$ .

3° *Passage en coordonnées polaires symplectiques.* Soit  $r^o \in A_2$ , de sorte que le jet d'ordre infini de  $R_2$  le long de  $\mathbb{T}^p \times \{r^o\} \times \{0\}$  soit nul. Soit aussi  $\rho^o \in (\mathbb{R}_*^+)^q$  un point à choisir ultérieurement. Soit enfin  $P = P_{r^o, \rho^o}$  l'application symplectique

$$\begin{aligned} P : \mathbb{T}^p \times \mathbb{T}^q \times \mathbb{R}^p \times \prod_{1 \leq j \leq q} ] - \rho_j^o, +\infty[ &\rightarrow \mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{C}^q \\ (\theta, \zeta, r, \rho) &\mapsto (\theta, r^o + r, z) \end{aligned}$$

définie par

$$z_j = \sqrt{\frac{\rho_j^o + \rho_j}{\pi}} \exp(-i2\pi\zeta_j) \quad (j = 1, \dots, q).$$

Restreinte à un voisinage suffisamment petit de  $\mathbb{T}^p \times \mathbb{T}^q \times \{0\} \times \{0\}$ , elle induit un hamiltonien de classe  $C^\infty$

$$H_\epsilon \circ L \circ B \circ P = H^o(r^o + r) + \epsilon \tilde{H}_\epsilon^1 \circ P + \epsilon R_2 \circ P + O(\epsilon^{N_1}; \theta, r, z),$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{H}_\epsilon^1 \circ P &= h^o(r^o + r) + \beta^o(r^o + r) \cdot (\rho^o + \rho) \\ &\quad + Q_{\epsilon, r}(\rho^o + \rho) + O(\|\rho^o\|^{N_2}; r, \epsilon). \end{aligned}$$

(Pour trouver des tores de dimension  $p + l$ , nous resterions en coordonnées cartésiennes dans les plans de coordonnées  $z_j$ ,  $j \in \{j_1, \dots, j_{q-l}\}$ .)

4° *Première localisation, dans un domaine de l'espace des actions sur lequel l'application fréquence est uniformément gauche.* Les termes

$$H^o(r^o + r) + \epsilon (h^o(r^o + r) + \beta^o(r^o + r) \cdot (\rho^o + \rho) + Q_{\epsilon, r}(\rho^o + \rho))$$

forment un hamiltonien complètement intégrable, qui induit sur le tore

$$\mathbb{T}_{(r,\rho)}^{p+q} = \mathbb{T}^p \times \mathbb{T}^q \times \{r\} \times \{\rho\},$$

une dynamique quasipériodique de fréquence

$$\nu_1(r, \rho) = (\alpha^\circ(r^\circ + r) + O(\epsilon), \epsilon(\beta^\circ(r^\circ + r) + O(\epsilon) + O(\rho^\circ + \rho))).$$

Par hypothèse, il existe deux réels  $a$  et  $b$  strictement positifs tels que l'application  $r \mapsto (\alpha^\circ(r), \beta^\circ(r))$  soit  $(2a, b/2)$ -gauche en  $r_0$ . Donc d'après le Lemme 49, si  $\gamma$  est assez petit et si  $r^\circ$  est assez proche de  $r_0$ , il existe un voisinage  $V = V_1 \times V_2$  de  $(0, 0)$  dans  $\mathbb{R}^p \times (\mathbb{R}_*^+)^q$  tel que pour tout  $(r, \rho) \in V$  l'application  $\hat{r} \mapsto \nu_1(\hat{r}, \rho)$  soit  $(\epsilon a, b)$ -gauche en  $\hat{r} = r$ .

5° *Seconde localisation, dans une boule centrée en  $\rho^\circ$  et de rayon  $\delta = \|\rho^\circ\|/2$ .* Supposons donc  $\rho^\circ \in V_2$  et notons  $\delta = \|\rho^\circ\|/2$ . Nous allons nous localiser dans une boule de  $\mathbb{R}^q$  de rayon  $\delta$ . L'hamiltonien  $H_\epsilon \circ L \circ B \circ P$  est dynamiquement conjugué à l'image réciproque de  $H_\epsilon \circ L \circ B \circ P/\delta$  par l'homothétie (conformément symplectique)

$$\begin{aligned} D = D_\delta : \mathbb{T}^p \times \mathbb{T}^q \times \mathbb{R}^p \times (\mathbb{R}_*^+)^q &\rightarrow \mathbb{T}^p \times \mathbb{T}^q \times \mathbb{R}^p \times (\mathbb{R}_*^+)^q, \\ (\theta, \zeta, r, \rho) &\mapsto (\theta, \zeta, \delta r, \delta \rho), \end{aligned}$$

soit à l'hamiltonien

$$F_{\epsilon,\delta} = \frac{1}{\delta} H^\circ(r^\circ + \delta r) + \frac{\epsilon}{\delta} F_{\epsilon,\delta}^1 + R_3 + O(\delta^{-1} \epsilon^{N_1}; \theta, r, z),$$

avec

$$\begin{aligned} F_{\epsilon,\delta}^1 &= h^\circ(r^\circ + \delta r) + \beta^\circ(r^\circ + \delta r) \cdot (\rho^\circ + \delta \rho) \\ &\quad + Q_{\epsilon, r^\circ + \delta r}(\rho^\circ + \delta \rho) + O(\delta^{N_2}; r, z, \epsilon, \delta) \end{aligned}$$

et

$$R_3 = \frac{\epsilon}{\delta} R_2 \circ P \circ D.$$

6° *Application du théorème de Rüssmann.* Le vecteur fréquence du tore  $\mathbb{T}_{(r,\rho)}^{p+q}$  de la partie intégrable

$$f_{\epsilon,\delta}^\circ = \frac{1}{\delta} H^\circ(r^\circ + \delta r) + \frac{\epsilon}{\delta} \begin{pmatrix} h^\circ(r^\circ + \delta r) + \beta^\circ(r^\circ + \delta r) \cdot (\rho^\circ + \delta \rho) \\ + Q_{\epsilon, r^\circ + \delta r}(\rho^\circ + \delta \rho) \end{pmatrix}$$

de  $F_{\epsilon,\delta}$  est

$$\nu_2(r, \rho) = (\alpha^\circ(r^\circ + \delta r) + O(\epsilon, \epsilon\delta, \delta^2), \epsilon(\beta^\circ(r^\circ + \delta r) + O(\epsilon, \delta^2))).$$

(Pour des tores de dimension de  $p+l$ , le vecteur fréquence du tore invariant

$$\mathbb{T}^p \times \{r\} \times \left( \bigcap_{j=j_1, \dots, j_{q-l}} \{z_j = 0\} \right) \cap \left( \bigcap_{j \neq j_1, \dots, j_{q-l}} \{\rho_j = \rho_j^\circ\} \right),$$

la  $(p+j)$ -ième composante de  $\nu_2$  serait, pour  $j \in \{j_1, \dots, j_{q-l}\}$ ,

$$\epsilon(\beta_j^\circ(r^\circ + \delta r) + O(\epsilon)).$$

D'après le Lemme 49, l'application fréquence  $r \mapsto \nu_2(r, \rho)$  est  $(a\epsilon\delta^{p+q-1}, b)$ -gauche en  $(r, \rho)$  si  $\epsilon$  et  $\delta$  sont assez petits. Posons par exemple

$$\delta = \epsilon \quad \text{et} \quad \hat{\gamma} = (\epsilon\delta^{p+q-1})^{p+q+1} ;$$

les exposants sont choisis pour que l'estimation du Théorème 58, en dimension  $p+q$ , donne une mesure strictement positive de tores. Soit  $n_1 > 1$  le réel du Théorème 59. Soient  $N_1$  et  $N_2$  tels que

$$\delta^{-1}\epsilon^{N_1} \ll (\epsilon\delta^{p+q-1})^{n_1} \quad \text{et} \quad \epsilon\delta^{N_2-1} \ll (\epsilon\delta^{p+q-1})^{n_1}$$

quand  $\epsilon$  tend vers 0. Comme le jet d'ordre infini de  $R_3$  est nul le long des tores  $\mathbb{T}_{(r^o, \rho)}^{p+q}$ , la restriction de  $R_3$  à un petit voisinage de ce tore est exponentiellement petite en fonction de la taille du voisinage. La conclusion découle donc du Théorème 59 appliqué à l'hamiltonien intégrable  $f^o$  et à la perturbation  $F_{\epsilon, \delta} - f_{\epsilon, \delta}^o$  avec  $\epsilon = \delta$  assez petits.  $\square$

Nous aurons besoin de l'extension suivante pour le système planétaire. Attention, le paramètre  $\delta$  ne joue plus le même rôle que dans la démonstration précédente.

**COROLLAIRE 61.** *Supposons que l'hamiltonien  $H_\epsilon = H_{\epsilon, \delta}$  de (26) dépend d'un paramètre supplémentaire  $\delta \in \mathbb{R}$ . Si l'application fréquence  $(r, \delta) \mapsto (\alpha_{r, \delta}^o, \beta_{r, \delta}^o)$  est gauche en  $(r_0, \delta_0)$ , il existe un réel  $\epsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $\epsilon \in ]0, \epsilon_0[$  il existe un sous-ensemble  $\Delta \subset \mathbb{R}$  de mesure de Lebesgue strictement positive tel que quel que soit  $\delta \in \Delta$  la réunion dans l'espace des phases des tores invariants lagrangiens de  $H_{\epsilon, \delta}$  est de mesure de Lebesgue strictement positive.*

*Démonstration.* Reprenons le sixième point de la démonstration du Théorème 60. Sous les nouvelles hypothèses, l'application fréquence  $\tilde{\alpha}$  obtenue est gauche sur  $\mathbb{B}_\delta^p(r_0) \times I$ , où  $I$  est un intervalle ouvert contenant  $\delta_0$ . L'ensemble

$$\{(s, \delta) \in \mathbb{B}_\delta^p(r_0) \times I, \tilde{\alpha}_{s, \delta} \in \text{DH}_{\gamma, \tau}(p+q)\}$$

est de mesure strictement positive dans  $\mathbb{B}_\delta^p(r_0) \times I$ . D'après le théorème de Fubini, il existe donc une partie  $\Delta$  de  $I$  de mesure strictement positive telle que quel que soit  $\delta \in \Delta$  la mesure de Lebesgue de

$$\{s \in \mathbb{B}_\delta^p(r_0), \tilde{\alpha}_{s, \delta} \in \text{DH}_{\gamma, \tau}(p+q)\}$$

soit strictement positive. Le passage de l'estimation de la mesure des tores invariants dans l'espace des paramètres à l'estimation de la mesure des tores invariants dans l'espace des phases se démontre de la même façon que pour le Théorème 60.  $\square$

## 6. Le système planétaire

6.1. *Notations et énoncé du théorème d'Arnold* Considérons, pour  $n \geq 2$ ,  $1+n$  points matériels se mouvant dans l'espace et soumis à l'attraction universelle. Notons leurs masses  $m_0, \epsilon m_1, \epsilon m_2, \dots, \epsilon m_n$ , où  $\epsilon > 0$  est un paramètre réel. Le choix d'un référentiel galiléen permet d'identifier l'espace physique à l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ .

Les coordonnées d'un vecteur  $x \in \mathbb{R}^3$  seront notées  $x^1, x^2, x^3$ . Notons  $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}^3$  les positions des points et  $y_0, \epsilon y_1, \epsilon y_2, \dots, \epsilon y_n \in \mathbb{R}^3$  leurs quantités de mouvement. Si l'on exclut les collisions, l'espace des phases s'identifie à l'espace

$$\{(x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n) \in (\mathbb{R}^3)^{1+n} \times (\mathbb{R}^3)^{1+n}, \forall j \neq k \quad x_j \neq x_k\}.$$

Munissons-le des structures euclidienne

$$\sum_{1 \leq k \leq 3} (dx_0^k)^2 + (dy_0^k)^2 + \sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{1 \leq k \leq 3} (dx_j^k)^2 + \epsilon^2 (dy_j^k)^2$$

et symplectique

$$\sum_{1 \leq k \leq 3} dx_0^k \wedge dy_0^k + \epsilon \sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{1 \leq k \leq 3} dx_j^k \wedge dy_j^k.$$

Les courbes intégrales des équations de Newton (1) sont les projections, sur l'espace des positions, des courbes intégrales du champ de l'hamiltonien

$$\frac{1}{2} \frac{\|y_0\|^2}{m_0} + \epsilon \left( \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\|y_j\|^2}{m_j} - \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{m_0 m_j}{\|x_j - x_0\|} \right) - \epsilon^2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{m_j m_k}{\|x_j - x_k\|},$$

où  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne.

Notons  $(X_0, \dots, X_n, Y_0, \epsilon Y_1, \epsilon Y_2, \dots, \epsilon Y_n)$  les coordonnées héliocentriques symplectiques (voir le chap. II des *Leçons* [Poin05], et notamment le paragraphe 26), définies par :

$$\begin{cases} X_0 = x_0 \\ X_j = x_j - x_0 \quad (j = 1, \dots, n) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} Y_0 = y_0 + \epsilon y_1 + \epsilon y_2 + \dots + \epsilon y_n \\ Y_j = y_j \quad (j = 1, \dots, n). \end{cases}$$

Ces coordonnées redressent l'action diagonale de  $\mathbb{R}^3$  par translations sur les positions. Exprimé dans ces coordonnées, l'hamiltonien devient

$$\frac{1}{2} \frac{\|Y_0 - \epsilon(Y_1 + \dots + Y_n)\|^2}{m_0} + \epsilon \left( \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\|Y_j\|^2}{2m_j} - \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{m_0 m_j}{\|X_j\|} \right) - \epsilon^2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{m_j m_k}{\|X_j - X_k\|}.$$

La conservation de la quantité de mouvement totale  $Y_0$  et l'invariance par translation des équations de Newton permettent de se restreindre sans perte de généralité à la sous-variété d'équation  $Y_0 = 0$ . Notons  $\epsilon\omega$  la forme symplectique et  $\epsilon F$  l'hamiltonien induits sur le quotient de la sous-variété  $Y_0 = 0$  par l'action de  $\mathbb{R}^3$  par translations. Le champ hamiltonien de  $\epsilon F$  relativement à la forme  $\epsilon\omega$  égale celui de  $F$  relativement à  $\omega$ . En outre on a

$$\omega = \sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{1 \leq k \leq 3} dX_j^k \wedge dY_j^k$$

et

$$F = \sum_{1 \leq j \leq n} \left( \frac{\|Y_j\|^2}{2\mu_j} - \frac{\mu_j M_j}{\|X_j\|} \right) + \epsilon \sum_{1 \leq j < k \leq n} \left( -\frac{m_j m_k}{\|X_j - X_k\|} + \frac{Y_j \cdot Y_k}{m_0} \right), \quad (28)$$

où les masses  $\mu_j$  et  $M_j$  sont définies comme fonctions de  $m_0, \dots, m_n$  et  $\epsilon$  par

$$\frac{1}{\epsilon\mu_j} = \frac{1}{m_0} + \frac{1}{\epsilon m_j} \quad \text{et} \quad M_j = m_0 + \epsilon m_j \quad \text{pour } j = 1, \dots, n.$$

Quand  $\epsilon = 0$ , l'hamiltonien  $F$  se réduit à l'hamiltonien képlérien

$$F_{\text{Kep}} = \sum_{1 \leq j \leq n} \left( \frac{\|Y_j\|^2}{2\mu_j} - \frac{\mu_j M_j}{\|X_j\|} \right), \quad (29)$$

tandis que le premier ordre de  $F$  en  $\epsilon$  est la fonction perturbatrice

$$F_{\text{per}} = \sum_{1 \leq j < k \leq n} \left( -\frac{m_j m_k}{\|X_j - X_k\|} + \frac{Y_j \cdot Y_k}{m_0} \right). \quad (30)$$

La fonction perturbatrice elle-même se décompose en la somme d'un hamiltonien principal

$$F_{\text{princ}} = - \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{m_j m_k}{\|X_j - X_k\|}$$

et d'un hamiltonien complémentaire

$$F_{\text{comp}} = \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{Y_j \cdot Y_k}{m_0}.$$

L'hamiltonien  $F_{\text{Kep}}$  est l'hamiltonien de  $n$  problèmes de Kepler découplés. Il détermine donc, aux orbites de collision près, une action képlérienne du tore  $\mathbb{T}^n$  sur l'espace des phases. Dans cette partie, contrairement à la convention des parties précédentes, nous noterons  $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / 2\pi\mathbb{Z}^n$  (attention donc au facteur  $2\pi$ , introduit à ce stade pour faciliter la comparaison avec les ouvrages de mécanique céleste). Notons

$$(\lambda_j, \Lambda_j, \xi_j, \eta_j, p_j, q_j)_{j=1, \dots, n} \in (\mathbb{T}^1 \times ]0, +\infty[ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})^n$$

les coordonnées de Poincaré, liées aux éléments elliptiques par les formules suivantes (voir les figures 2 et 3) :

$$\begin{cases} \lambda_j = l_j + g_j + \theta_j \\ \Lambda_j = \mu_j \sqrt{M_j a_j} \\ G_j = \Lambda_j \sqrt{1 - \epsilon_j^2} = \|\vec{C}_j\| \\ r_j = \xi_j + i\eta_j = \sqrt{2\Lambda_j} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \epsilon_j^2}} e^{i(g_j + \theta_j)} \\ z_j = p_j + iq_j = \sqrt{2G_j} \sqrt{1 - \cos \iota_j} e^{i\theta_j}, \end{cases} \quad (31)$$

où

- $i$  est le nombre complexe  $\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ ,
- $l_j$  l'anomalie moyenne,
- $g_j$  l'argument du périhélie,
- $\theta_j$  la longitude du noeud,

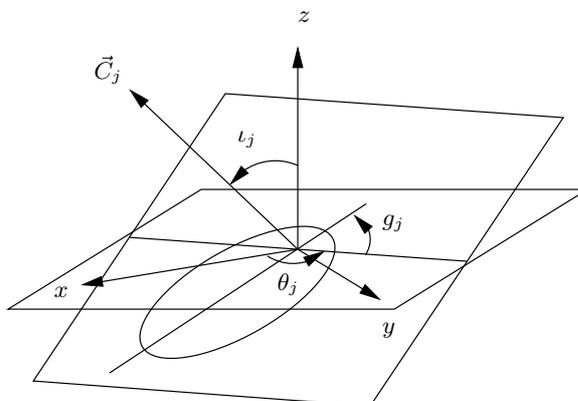


FIGURE 2. Éléments elliptiques

- $a_j$  le demi grand axe,
- $\varepsilon_j$  l'excentricité,
- $\iota_j$  l'inclinaison,
- $\lambda_j$  la longitude moyenne,
- $\vec{C}_j$  le vecteur moment cinétique,
- $\Lambda_j$  le moment circulaire,
- et  $g_j + \theta_j$  la longitude du périhélie.

En particulier, dans la limite qui nous intéresse où  $\varepsilon_j$  et  $\iota_j$  tendent vers 0 on a

$$|r_j| = \sqrt{\Lambda_j/2} \varepsilon_j (1 + O(\varepsilon_j^2)) \quad \text{et} \quad |z_j| = \sqrt{\Lambda_j/2} \iota_j (1 + O(\varepsilon_j^2) + O(\iota_j^2))$$

**THÉOREME 62 (POINCARÉ)** *Les coordonnées de Poincaré sont analytiques et symplectiques ( $\omega = \sum_{1 \leq j \leq n} d\lambda_j \wedge d\Lambda_j + d\xi_j \wedge d\eta_j + dp_j \wedge dq_j$ ) sur un voisinage, diffeomorphe à  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^{5n}$ , de l'union des orbites képlériennes circulaires, directes et coplanaires. En outre elles sont des coordonnées angles-actions de l'hamiltonien képlérien, qui vaut*

$$F_{\text{Kep}} = \sum_{1 \leq j \leq n} -\frac{\mu_j^3 M_j^2}{2\Lambda_j^2}. \quad (32)$$

Voir [Poin05, Chap. III], ou [Che88, Appendice] pour une démonstration complète.

Nous noterons

$$\nu_j = \frac{\partial F_{\text{Kep}}}{\partial \Lambda_j} = \frac{\mu_j^3 M_j^2}{\Lambda_j^3} = \frac{\sqrt{M_j}}{a_j^{3/2}} \quad (33)$$

les *moyens mouvements*, dont l'expression implique la troisième loi de Kepler : le carré de la période de révolution képlérienne d'une planète est proportionnel au cube de son demi grand axe.

Nous pouvons maintenant énoncer précisément le théorème qui donne son titre à cet article.

**THÉORÈME 63.** *Pour toute valeur des masses  $m_0, m_1, \dots, m_n > 0$  et des demi grands axes  $a_1 > \dots > a_n > 0$ , il existe un réel  $\epsilon_0 > 0$  tel que, pour tout  $\epsilon$  tel que  $0 < \epsilon < \epsilon_0$ , le flot de l'hamiltonien  $F$  (défini en (28)) possède un ensemble de mesure de Lebesgue strictement positive de tores invariants de dimension  $3n - 1$ , de classe  $C^\infty$ , quasipériodiques et  $\epsilon$ -proches en topologie  $C^0$  des tores képlériens de demi grands axes  $(a_1, \dots, a_n)$  et d'excentricités et d'inclinaisons relatives nulles; de plus, quand  $\epsilon$  tend vers zéro la densité des tores invariants au voisinage de ces tores képlériens tend vers un.*

6.2. *L'hamiltonien séculaire et sa singularité elliptique* L'objectif est d'appliquer le Théorème 60 avec  $H^0 = F_{\text{Kep}}$ ,

$$H^1 = \langle F_{\text{per}} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} F_{\text{per}} d\lambda$$

(où  $d\lambda$  dénote la mesure de Haar  $d\lambda_1 \otimes \dots \otimes d\lambda_n$ ) et  $H^2 = F_{\text{per}} - \langle F_{\text{per}} \rangle$ . Ce qui suit est consacré à vérifier que l'on peut se ramener aux hypothèses du théorème avec  $p = n$  et  $q = 2n$ .

Jusqu'à maintenant, nous n'avons exclu que les collisions  $X_j = X_k$ ,  $j \neq k$ ; restreignons-nous dorénavant à l'ouvert difféomorphe à  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^{5n}$  sur lequel les ellipses képlériennes ne se coupent pas (autrement dit, nous excluons l'ensemble des collisions saturé par l'action képlérienne du tore  $\mathbb{T}^n$ ). L'hamiltonien moyenné  $\langle F_{\text{per}} \rangle$  est alors bien défini. Quitte à renuméroter les planètes, on peut alors supposer que les demi grands axes appartiennent à l'ouvert

$$\mathcal{A} = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n ; \quad 0 < a_n < a_{n-1} < \dots < a_1\} \quad (34)$$

(Herman numérote les planètes en sens inverse, mais notre choix simplifiera les notations dans les récurrences : quand  $a_n \rightarrow 0$ , nous obtenons asymptotiquement un problème à  $n - 1$  corps de demi grands axes  $a_1, \dots, a_{n-1}$ .) Le champ hamiltonien de  $\langle F_{\text{per}} \rangle$  a en particulier pour intégrales premières les moments  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$  (c'est le premier théorème de stabilité de Laplace). Il passe au quotient par l'action képlérienne du tore  $\mathbb{T}^n$  et induit un système hamiltonien paramétré par  $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$  sur l'espace, difféomorphe à  $\mathbb{R}^{4n}$  (coordonnées  $(\xi_j, \eta_j, p_j, q_j)_{j \in \{1, \dots, n\}}$ ), des tores képlériens de demi grands axes fixés. L'hamiltonien induit, encore noté  $\langle F_{\text{per}} \rangle$ , est l'*hamiltonien séculaire* (du premier ordre) du système planétaire et l'espace de ces  $n$ -uplets d'ellipses est l'*espace séculaire*; ce système décrit donc les lentes variations des ellipses képlériennes sous l'effet des perturbations des autres planètes, au second ordre près en  $\epsilon$ . Contrairement à son analogue dans le problème de la lune (voir [LZ76], ou [Féj03] pour le problème en dimension quelconque), il n'est pas, que l'on sache, complètement intégrable.

**LEMME 64.** *Chaque terme de la partie complémentaire de la fonction perturbatrice*

est de moyenne nulle le long des tores képlériens :

$$\int_{\mathbb{T}^n} Y_j \cdot Y_k d\lambda = 0 \quad (1 \leq j < k \leq n).$$

La contribution de l'hamiltonien complémentaire à la dynamique séculaire est donc nulle.

*Démonstration.* Les expressions (29) et (32) de l'hamiltonien képlérien montrent que le long d'une trajectoire képlérienne on a

$$Y_j = \mu_j \frac{dX_j}{dt} = \frac{\mu_j^3 M_j^2}{\Lambda_j^3} \frac{\partial X_j}{\partial \lambda_j}.$$

Comme la fonction  $X_k$  ne dépend pas de  $\lambda_j$ , le théorème de Fubini permet de conclure.  $\square$

L'hamiltonien  $\langle F_{\text{per}} \rangle = \langle F_{\text{princ}} \rangle$  est une fonction paire des coordonnées séculaires de Poincaré  $(r_1, \dots, r_n, z_1, \dots, z_n)$ . En conséquence, l'origine du système séculaire est un point critique de  $\langle F_{\text{per}} \rangle$ ; elle correspond à des mouvements circulaires coplanaires directs. Au niveau dynamique, on obtient le lemme important suivant.

LEMME 65. *Le tore képlérien d'excentricité et d'inclinaison nulles ( $r_1 = \dots = r_n = z_1 = \dots = z_n = 0$ ) est un point fixe du système séculaire  $\langle F_{\text{per}} \rangle$ .*

Nous allons étudier la forme normale de Birkhoff de  $\langle F_{\text{per}} \rangle$  en ce point, au premier ordre (partie quadratique en les coordonnées de Poincaré  $(r_j, z_j)_{1 \leq j \leq n}$ ).

La définition des coefficients de Laplace diffère d'un facteur deux d'un auteur à l'autre (comparer par exemple [Poin05, § 248] et [LR95, p. 200].) Nous choisissons la normalisation de Poincaré.

DÉFINITION 66. Les *coefficients de Laplace*  $b_s^{(k)}(\alpha)$  seront les coefficients de Fourier de la fonction

$$\frac{1}{(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \vartheta)^s} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_s^{(k)}(\alpha) \exp(ik\vartheta) \quad (\alpha \in [0, 1[, \vartheta \in \mathbb{R}, s > 0).$$

Lagrange et Laplace ont démontré que la partie quadratique de  $\langle F_{\text{per}} \rangle$  peut se décomposer d'une façon remarquable, qui peut être anticipée en partie grâce à des considérations de symétrie [Poin05]. Le calcul complet est un peu long – c'est l'un de ceux qui faisaient dire à Michael Herman : « BLC » (pour Bonjour Les Calculs)! Il est détaillé par exemple dans [LR95].

FORMULE 67. Notons  $m = (m_1, \dots, m_n)$ ,  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ,  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ ,  $p = (p_1, \dots, p_n)$  et  $q = (q_1, \dots, q_n)$ . Il existe deux formes bilinéaires symétriques  $\mathcal{Q}_h = \mathcal{Q}_h(m, a)$  et  $\mathcal{Q}_v = \mathcal{Q}_v(m, a)$  sur l'espace tangent en l'origine à l'espace séculaire, qualifiées respectivement d'*horizontale* et de *verticale*, dépendant analytiquement des masses et des demi grands axes et telles que

$$\langle F_{\text{per}} \rangle = C_0(m, a) + \mathcal{Q}_h \cdot (\xi^2 + \eta^2) + \mathcal{Q}_v \cdot (p^2 + q^2) + O(4), \quad (35)$$

avec

$$\begin{cases} \mathcal{Q}_h \cdot \xi^2 &= \sum_{1 \leq j < k \leq n} m_j m_k \left( C_1(a_j, a_k) \left( \frac{\xi_j^2}{\Lambda_j} + \frac{\xi_k^2}{\Lambda_k} \right) + 2C_2(a_j, a_k) \frac{\xi_j \xi_k}{\sqrt{\Lambda_j \Lambda_k}} \right) \\ \mathcal{Q}_v \cdot p^2 &= \sum_{1 \leq j < k \leq n} -m_j m_k C_1(a_j, a_k) \left( \frac{p_j}{\sqrt{\Lambda_j}} - \frac{p_k}{\sqrt{\Lambda_k}} \right)^2 \end{cases} \quad (36)$$

et

$$\begin{cases} C_0(m, a) &= - \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{m_j m_k}{a_j} b_{1/2}^{(0)}(a_k/a_j) \\ C_1(a_j, a_k) &= - \frac{a_k}{2a_j^2} b_{3/2}^{(1)}(a_k/a_j) \\ C_2(a_j, a_k) &= \frac{a_k}{2a_j^2} b_{3/2}^{(2)}(a_k/a_j). \end{cases} \quad (37)$$

Nous identifierons les formes bilinéaires  $\mathcal{Q}_h$  et  $\mathcal{Q}_v$  à leur matrice dans les bases canoniques respectives  $(d\xi_1, \dots, d\xi_n)$  et  $(dp_1, \dots, dp_n)$ .

Les masses et les demi grands axes étant fixés, soient  $\rho_h, \rho_v \in \text{SO}(n)$  des transformations diagonalisantes respectivement de  $\mathcal{Q}_h$  et  $\mathcal{Q}_v$  :

$$\rho_h^* \mathcal{Q}_h = \sum_{1 \leq j \leq n} \sigma_j d\xi_j^2 \quad \text{et} \quad \rho_v^* \mathcal{Q}_v = \sum_{1 \leq j \leq n} \varsigma_j dp_j^2, \quad \sigma_1, \dots, \sigma_n, \varsigma_1, \dots, \varsigma_n \in \mathbb{R}.$$

L'application

$$\rho : (\xi, \eta, p, q) \mapsto (\rho_h \cdot \xi, \rho_h \cdot \eta, \rho_v \cdot p, \rho_v \cdot q)$$

est symplectique et l'on a

$$\langle F_{\text{per}} \rangle \circ \rho = C_0 + \sum_{1 \leq j \leq n} \sigma_j (\xi_j^2 + \eta_j^2) + \sum_{1 \leq j \leq n} \varsigma_j (p_j^2 + q_j^2).$$

DÉFINITION 68. Nous appellerons *application fréquence* l'application multivaluée

$$\alpha : a \in \mathcal{A} \mapsto \{\nu_1, \dots, \nu_n, \sigma_1, \dots, \sigma_n, \varsigma_1, \dots, \varsigma_n\} \subset \mathbb{R},$$

où  $\nu_1, \dots, \nu_n$  sont les moyens mouvements képlériens,  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  les valeurs propres de la matrice  $\mathcal{Q}_h$  et  $\varsigma_1, \dots, \varsigma_n$  celles de la matrice  $\mathcal{Q}_v$ .

Nous allons montrer que

— pour toutes valeurs des masses et au voisinage simplement connexe de presque toutes valeurs des demi grands axes il existe une détermination analytique de l'application fréquence, qu'abusivement nous noterons

$$\alpha : a \mapsto (\nu_1, \dots, \nu_n, \sigma_1, \dots, \sigma_n, \varsigma_1, \dots, \varsigma_n) \in \mathbb{R}^{3n},$$

— cette application viole les hypothèses du Théorème de stabilité 60,  
— et l'on peut néanmoins indirectement appliquer le corollaire 61 à un hamiltonien auxiliaire.

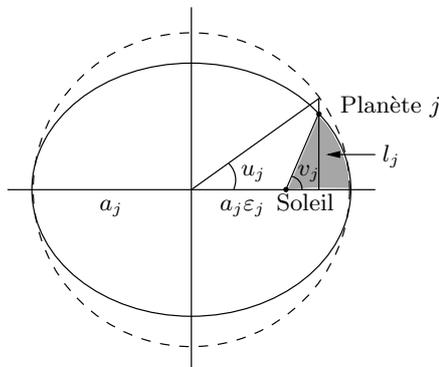


FIGURE 3. Anomalies d'une ellipse

6.3. *Développement en les rapports des demi grands axes* Nous utiliserons de façon cruciale le développement de l'hamiltonien séculaire dans les puissances des rapports des demi grands axes; l'analyticité permettra d'étendre les propriétés obtenues pour de petits rapports de demi grands axes à des rapports de demi grands axes non petits.

Ici aussi le calcul est un peu long. Mais en paramétrant l'ellipse extérieure par son anomalie vraie  $v_j$  et l'ellipse intérieure par son anomalie excentrique  $u_k$ , il se réduit à la quadrature de polynômes trigonométriques (appendice C de [Féj02]). Le résultat est dans [Las91].

$$\left\{ \begin{array}{ll} \|X_j\| = a_j(1 + \varepsilon_j \cos v_j)^{-1}(1 - \varepsilon_j^2) & \text{(définition de } v_j) \\ \|X_k\| = a_k(1 - \varepsilon_k \cos u_k) & \text{(définition de } u_k) \\ d\lambda_j = (1 + \varepsilon_j \cos v_j)^{-1}(1 - \varepsilon_j^2)^{3/2} dv_j & \text{(seconde loi de Kepler)} \\ d\lambda_k = (1 - \varepsilon_k \cos u_k) du_k & \text{(équation de Kepler)} \\ \|X_k\| \cos v_k = a_k(\cos u_k - \varepsilon_k) & \text{(cf. la figure 3)} \\ \|X_k\| \sin v_k = a_k \sqrt{1 - \varepsilon_k^2} \sin u_k & \text{(cf. la figure 3)}. \end{array} \right. \quad (38)$$

FORMULE 69. Quand le rapport  $a_k/a_j$  des demi grands axes tend vers 0 on a

$$\left\{ \begin{array}{l} C_0(m, a) = \sum_{1 \leq j < k \leq n} -\frac{m_j m_k}{a_j} \left( 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{a_k}{a_j} \right)^2 + O \left( \frac{a_k}{a_j} \right)^4 \right) \\ C_1(a_j, a_k) = -\frac{1}{a_j} \left( \frac{3}{4} \left( \frac{a_k}{a_j} \right)^2 + O \left( \frac{a_k}{a_j} \right)^4 \right) \\ C_2(a_j, a_k) = \frac{1}{a_j} O \left( \frac{a_k}{a_j} \right)^3. \end{array} \right. \quad (39)$$

## 7. Vérification de la condition d'Arnold-Pyartli

### 7.1. Lemmes sur les valeurs propres

LEMME 70. Soient  $\delta_1, \dots, \delta_n \in \mathbb{R}$ ,  $D = \text{Diag}(\delta_1, \dots, \delta_n)$  et  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Si  $\sigma$  est une valeur propre de  $D + A$ ,

$$\min_{1 \leq j \leq n} |\sigma - \delta_j| \leq \|A\|$$

(même définition de la norme d'opérateur  $\|\cdot\|$  qu'en (23)).

*Démonstration.* Soit  $\sigma$  une valeur propre de  $D + A$  telle que  $\sigma \neq \delta_j$  pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ . La matrice  $D + A - \sigma I$  n'est pas inversible, donc

$$\begin{aligned} 1 &\leq \|(D - \sigma I)^{-1}A\| \\ &\leq \|(D - \sigma I)^{-1}\| \|A\| = \max_{1 \leq j \leq n} \frac{1}{|\sigma - \delta_j|} \|A\|, \end{aligned}$$

d'où l'estimation découle.  $\square$

Si les valeurs propres de  $D$  sont distinctes et si les termes diagonaux de  $A$  sont nuls, l'estimation précédente peut être améliorée.

LEMME 71. Soient  $\delta_1 < \dots < \delta_n \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma = \min_{1 \leq j \neq k \leq n} |\delta_j - \delta_k| \neq 0$  et  $A \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice symétrique telle que sa diagonale  $\text{Diag } A = (A_{11}, \dots, A_{nn})$  soit nulle. Alors, si  $\epsilon$  est assez petit, les valeurs propres  $\delta'_1 < \dots < \delta'_n$  de  $D + \epsilon A$  satisfont

$$|\delta'_j - \delta_j| \leq \frac{3}{\sigma} \|A\|^2 \left(1 + \frac{\|D\|}{\sigma}\right) \epsilon^2.$$

*Démonstration.* En développant en puissances de  $\epsilon$ , on voit qu'il existe une unique matrice  $U \in M_n(\mathbb{R})$  telle que

$$e^{-\epsilon U} (D + \epsilon A) e^{\epsilon U} = D + O(\epsilon^2).$$

Alors  $\|U\| \leq \|A\|/\sigma$  et l'on a

$$e^{-\epsilon U} (D + \epsilon A) e^{\epsilon U} = D + \epsilon^2 A_1 + O(\epsilon^3),$$

où  $A_1$  est la matrice symétrique

$$A_1 = \frac{1}{2}(U^2 D + D U^2) + A U - U A - U D U.$$

On peut alors appliquer le Lemme 70 à  $D$  et à  $\epsilon^2 A_1 + O(\epsilon^3)$  : quand  $\epsilon$  tend vers 0 on a

$$|\delta'_j - \delta_j| \leq \|\epsilon^2 A_1 + O(\epsilon^3)\| \leq \frac{2}{\sigma} \|A\|^2 \left(1 + \frac{\|D\|}{\sigma}\right) \epsilon^2 (1 + O(\epsilon)).$$

$\square$

COROLLAIRE 72. Soient  $\delta_1, \dots, \delta_{n-1} \in \mathbb{R}$  et  $\delta_n = 0$  tels que  $\sigma = \min_{1 \leq j \neq k \leq n} |\delta_j - \delta_k| \neq 0$ ,  $\hat{D} \in M_{n-1}(\mathbb{R})$  une matrice symétrique de valeurs propres  $\delta_1, \dots, \delta_{n-1}$ ,  $D$  la matrice symétrique

$$D = \left( \begin{array}{c|c} \hat{D} & (0) \\ \hline (0) & 0 \end{array} \right),$$

et  $A_\epsilon \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice symétrique dont le dernier coefficient vaut

$$(A_\epsilon)_{nn} = c_1 + c_2\epsilon^\beta, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \beta < 2.$$

Alors quand  $\epsilon$  tend vers 0 la matrice  $D + \epsilon A_\epsilon$  possède une valeur propre

$$\sigma_n(\epsilon) = \epsilon(c_1 + c_2\epsilon^\beta) + O(\epsilon^2).$$

De plus, si  $\hat{D}$  est diagonale  $D + \epsilon A_\epsilon$  est conjuguée à une matrice diagonale par une matrice  $\rho \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$  vérifiant  $\rho = I + O(\epsilon)$ .

*Démonstration.* Soient  $\hat{\rho} \in \text{SO}_{n-1}(\mathbb{R})$  telle que

$${}^t \hat{\rho} \hat{D} \hat{\rho} = \text{Diag}(\delta_1, \dots, \delta_{n-1})$$

et  $\rho \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$  définie par

$$\rho = \left( \begin{array}{c|c} \hat{\rho} & (0) \\ \hline (0) & 1 \end{array} \right).$$

Le résultat découle du Lemme 71 appliqué à

$${}^t \rho (D + \epsilon A_\epsilon) \rho = {}^t \rho (D + \epsilon \text{Diag } A_\epsilon) \rho + \epsilon {}^t \rho (A_\epsilon - \text{Diag } A_\epsilon) \rho,$$

où  $\text{Diag } A_\epsilon$  désigne la matrice diagonale dont les termes diagonaux coïncident avec ceux de  $A_\epsilon$ .  $\square$

## 7.2. Condition d'Arnold-Pyartli dans le plan

PROPOSITION 73. *La forme bilinéaire  $\mathcal{Q}_h$  (formule (36)) est définie négative.*

(De façon erronée, Herman donne le même énoncé alors que sa définition de  $\mathcal{Q}_h$  n'inclut pas le signe négatif du potentiel newtonien.)

La démonstration de cette proposition utilisera les deux lemmes suivants, dont le second avait été remarqué par Hadamard.

LEMME 74. *Les coefficients de Laplace vérifient*

$$b_s^{(j)}(\alpha) > b_s^{(j+1)}(\alpha) \quad (\forall s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}, 0 < \alpha < 1, j \in \mathbb{N}).$$

*Démonstration du lemme.* Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur  $s$ . Supposons pour commencer que l'on a  $0 < s < 1$  et notons  $s_j = s(s+1)\dots(s+j-1)$ . Dans [Poin05] ou dans [LR95] on donne le développement suivant des coefficients de Laplace :

$$b_s^{(j)} = \frac{s_j}{j!} \alpha^j \left( 1 + \frac{s}{1!} \frac{(s+j)}{(j+1)} \alpha^2 + \frac{s(s+1)}{2!} \frac{(s+j)(s+j+1)}{(j+1)(j+2)} \alpha^4 + \dots \right).$$

Donc on a

$$b_s^{(j)} - b_s^{(j+1)} = \frac{s_j}{j!} \alpha^j \left( \left( 1 - \frac{s+j}{j+1} \alpha \right) + \frac{s(s+j)}{1(j+1)} \alpha^2 \left( 1 - \frac{s+j+1}{j+2} \alpha \right) + \dots \right) > 0.$$

Par ailleurs, les deux relations de récurrence (ibid.)

$$\begin{cases} b_{s+1}^{(j)} = \frac{(s+j)(1+\alpha^2)}{s(1-\alpha^2)^2} b_s^{(j)} - 2 \frac{(j-s+1)\alpha}{s(1-\alpha^2)^2} b_s^{(j+1)} \\ b_s^{(j+2)} = \frac{(j+1)}{(j-s+2)} \left( \alpha + \frac{1}{\alpha} \right) b_s^{(j+1)} - \frac{j+s}{j-s+2} b_s^{(j)} \end{cases}$$

montrent que l'on a

$$b_{s+1}^{(j)} - b_{s+1}^{(j+1)} = \frac{j b_s^{(j)} + (j+1) b_s^{(j+1)}}{s(1+\alpha)^2} + \frac{b_s^{(j)} - b_s^{(j+1)}}{(1+\alpha)^2};$$

l'inégalité voulue s'en déduit pour tout  $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$  par récurrence.  $\square$

LEMME 75. Soit  $Q \in M_n(\mathbb{R})$  la matrice d'une forme bilinéaire symétrique, dont les coefficients  $(q_{jk})$  sont tels que pour tout  $j$  et pour tout  $k \neq j$  on ait  $q_{jj} < 0$ ,  $q_{jk} > 0$  et la quantité  $\delta q_j = -q_{jj} - \sum_{l \neq j} q_{jl}$  soit strictement positive (matrice à diagonale fortement dominante). Alors la forme bilinéaire associée à  $Q$  est négative.

Démonstration du lemme. Soit  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ . On a

$$Q \cdot v^{\otimes 2} = \sum_{1 \leq j, k \leq n} q_{jk} v_j v_k = - \sum_j \delta q_j v_j^2 - \sum_{j < k} q_{jk} (v_j - v_k)^2 \leq 0.$$

$\square$

Démonstration de la proposition. Considérons la matrice  $\Delta = \text{Diag}(\sqrt{\Lambda_1}, \dots, \sqrt{\Lambda_n})$  ainsi que la matrice  $\hat{\mathcal{Q}}_h = {}^t \Delta \mathcal{Q}_h \Delta$ . Notons  $q_{jk}$  les coefficients de la matrice de  $\hat{\mathcal{Q}}_h$ . Pour tous  $j, k = 1, \dots, n$  on a

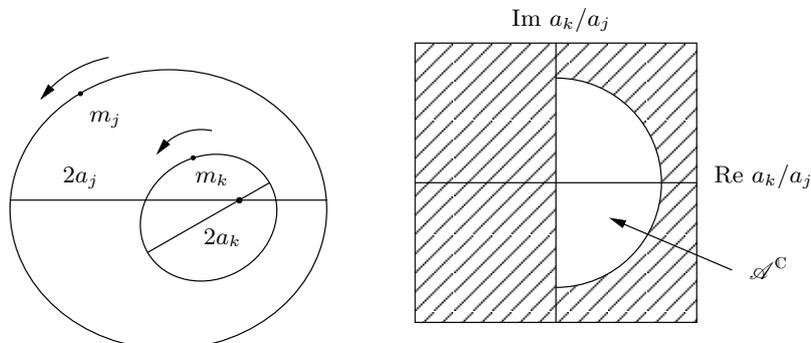
$$\begin{cases} q_{jj} = - \sum_{1 \leq k < j} m_j m_k \frac{a_j}{2a_k^2} b_{3/2}^{(1)}(a_j/a_k) - \sum_{j < k \leq n} m_k m_j \frac{a_k}{2a_j^2} b_{3/2}^{(1)}(a_k/a_j) \\ q_{jk} = m_k m_j \frac{a_k}{2a_j^2} b_{3/2}^{(2)}(a_k/a_j) \quad \text{si } j < k \\ q_{jk} = m_j m_k \frac{a_j}{2a_k^2} b_{3/2}^{(2)}(a_j/a_k) \quad \text{si } j > k. \end{cases}$$

D'après les lemmes 74 et 75, la forme  $\hat{\mathcal{Q}}_h$  est donc négative. (Plutôt que d'utiliser le Lemme 75 on peut aussi remarquer que cette forme quadratique est la somme des  $n(n-1)/2$  formes quadratiques correspondant aux problèmes séculaires à deux planètes.) Montrons que de plus elle est définie. Soit  $v \in \mathbb{R}^n$  un vecteur tel que  $\hat{\mathcal{Q}}_h \cdot v = 0$ . Soit  $j \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $|v_j| = \max_k |v_k|$ . Quitte à éventuellement changer  $v$  en  $-v$  on peut supposer que  $v_j \geq 0$ . La  $j$ -ième composante du vecteur  $\hat{\mathcal{Q}}_h \cdot v$  vaut

$$0 = q_{jj} v_j + \sum_{k \neq j} q_{jk} v_k \leq \left( q_{jj} + \sum_{k \neq j} q_{jk} \right) v_j,$$

où le facteur entre parenthèses est, d'après le Lemme 74, strictement négatif. Donc  $v = 0$ . Il en résulte que  $\hat{\mathcal{Q}}_h$  est définie. Comme ses termes diagonaux sont négatifs, elle est négative, ainsi que  $\mathcal{Q}_h$ .  $\square$

Les masses  $m_0, \dots, m_n$  étant fixées, il n'est pas facile de démontrer que la partie de  $\mathcal{A}$  (cf. (34)) sur laquelle la matrice de  $\mathcal{Q}_h$  n'a pas de valeurs propres doubles est

FIGURE 4. Demi grands axes réels et complexes ( $1 \leq j < k \leq n$ )

connexe. Ceci l'est beaucoup plus dans le complexe. Nous allons donc complexifier l'application  $\mathcal{A} \ni a = (a_1, \dots, a_n) \mapsto \mathcal{Q}_h(m, a)$ .

LEMME 76. *Les coefficients de Laplace  $b_s^{(k)}$  se prolongent analytiquement en des fonctions méromorphes sur la sphère de Riemann ayant pour points singuliers les quatre pôles  $0, \pm 1, \infty$ .*

*Démonstration.* Ce lemme découle par exemple de l'équation différentielle satisfaite par les coefficients de Laplace ([Poin05] § 252) :

$$\alpha^2(1 - \alpha^2) \frac{d^2 b_s^{(k)}}{d\alpha^2} + (\alpha - (4s + 1)\alpha^3) \frac{db_s^{(k)}}{d\alpha} - (4s^2 \alpha^2 + k^2(1 - \alpha^2)) b_s^{(k)} = 0.$$

□

D'après (36) et (37), la forme quadratique  $\mathcal{Q}_h$  s'étend donc en une fonction holomorphe sur l'ouvert simplement connexe

$$\mathcal{A}^{\mathbb{C}} = \{(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n ; \forall j < k \quad |a_k/a_j| < 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{Re}(a_k/a_j) > 0\} ;$$

voir la Figure 4.

Remarquons que, contrairement aux autres singularités séculaires, le point fixe  $(r, z) = (0, 0)$  est aussi un point fixe de l'action de  $\mathrm{SO}_2$  par rotations rigides des  $n$ -uplets d'ellipses képlériennes. En particulier, le générateur infinitésimal de cette action n'est pas un vecteur propre associé à une valeur propre nulle du problème plan.

PROPOSITION 77. *Pour tout  $n \geq 2$ , il existe un ouvert dense de mesure pleine  $U \subset \mathcal{A}$  sur lequel la matrice  $\mathcal{Q}_h$  possède  $n$  valeurs propres distinctes satisfaisant la propriété suivante : pour tout ouvert  $V \subset U$  simplement connexe, les valeurs propres de  $\mathcal{Q}_h$  définissent  $n$  fonctions holomorphes  $\sigma_1, \dots, \sigma_n : V \rightarrow \mathbb{C}$  telles que l'application fréquence*

$$a \in V \mapsto (\nu_1, \dots, \nu_n, \sigma_1, \dots, \sigma_n) \tag{40}$$

*du système planétaire dans le plan soit gauche sur  $V$ .*

*Démonstration.* Procédons par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 2$ , les formules (31) et (39) montrent que quand  $a_1 = O(1)$  et  $a_2 \rightarrow 0$  on a

$$\mathcal{Q}_h = -m_1 m_2 \frac{3}{8} \frac{a_2^{3/2}}{a_1^3} \left[ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{a_2}}{\Lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{a_2}}{\Lambda_2} \end{pmatrix} + O \left( \begin{pmatrix} a_2 & a_2^{3/4} \\ a_2^{3/4} & \sqrt{a_2} \end{pmatrix} \right) \right].$$

Le Lemme 70 ne peut pas être appliqué directement au facteur entre crochets. En revanche, le Lemme 71 appliqué à

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{a_2}}{\Lambda_1} + O(a_2) & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{a_2}}{\Lambda_2} + O(\sqrt{a_2}) \end{pmatrix} + O \left( \begin{pmatrix} 0 & a_2^{3/4} \\ a_2^{3/4} & 0 \end{pmatrix} \right)$$

montre que si  $a_2$  est assez petit la matrice  $\mathcal{Q}_h$  possède deux valeurs propres distinctes

$$\begin{cases} \sigma_1 = -m_1 m_2 \frac{3}{8} \frac{a_2^2}{a_1^3 \Lambda_1} (1 + O(\sqrt{a_2})) \\ \sigma_2 = -m_1 m_2 \frac{3}{8} \frac{a_2^2}{a_1^3 \Lambda_2} (1 + O(\sqrt{a_2})). \end{cases} \quad (41)$$

En particulier, le discriminant du polynôme caractéristique de  $\mathcal{Q}_h$  n'est pas constant comme fonction holomorphe sur  $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ . Donc la partie de  $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$  sur laquelle  $\mathcal{Q}_h$  possède au moins une valeur propre double est de codimension complexe strictement positive. Notons  $\mathcal{A}_s^{\mathbb{C}}$  son complémentaire dans  $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ ;  $\mathcal{A}_s^{\mathbb{C}}$  est connexe – c'est tout le bénéfice de la complexification – et contient, d'après (41), une partie de la forme  $\{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}_*^{+2}, 0 < a_2/a_1 < \epsilon\}$ , avec  $0 < \epsilon < 1$ . Les valeurs propres de  $\mathcal{Q}_h$  définissent donc deux fonctions holomorphes  $\sigma_1, \sigma_2 : \widetilde{\mathcal{A}_s^{\mathbb{C}}} \rightarrow \mathbb{C}$  sur le revêtement universel de  $\mathcal{A}_s^{\mathbb{C}}$ .

Considérons l'application fréquence

$$\alpha : \widetilde{\mathcal{A}_s^{\mathbb{C}}} \ni a \mapsto (\nu_1, \nu_2, \sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}^4,$$

où les deux moyens mouvements sont définis par la formule (33). Supposons qu'il existe un ouvert  $V$  de  $\widetilde{\mathcal{A}_s^{\mathbb{C}}}$  sur lequel les fréquences satisfont une relation linéaire

$$k_1 \nu_1 + k_2 \nu_2 + k_3 \sigma_1 + k_4 \sigma_2 = 0, \quad k_1, \dots, k_4 \in \mathbb{R}. \quad (42)$$

Comme  $\widetilde{\mathcal{A}_s^{\mathbb{C}}}$  est connexe, d'après le principe du prolongement analytique, l'image de  $\alpha|_{\widetilde{\mathcal{A}_s^{\mathbb{C}}}}$  entière satisfait (42). Or d'après les formules (41) et d'après la troisième loi de Kepler (formule (33)), en faisant tendre  $a_2$  vers 0 on voit que la relation linéaire est triviale. Donc, d'après le Lemme 44 la fonction holomorphe

$$\alpha \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial a_2} \wedge \frac{\partial^2 \alpha}{\partial a_2^2} \wedge \frac{\partial^3 \alpha}{\partial a_2^3}$$

n'est identiquement nulle sur aucun ouvert de  $\widetilde{\mathcal{A}_s^{\mathbb{C}}}$ . Donc il existe un ouvert dense  $U$  de  $\mathcal{A}$ , de mesure pleine et sur lequel l'application définie localement presque

partout qui envoie continûment  $a \in U$  sur une détermination de  $\alpha \in \mathbb{R}^4$  est gauche au sens de la Définition 57.

Pour tout  $n \geq 3$ , supposons la proposition vérifiée à l'ordre  $n - 1$ . Considérons  $n$  planètes et faisons tendre  $a_n$  vers 0 avec  $a_1, \dots, a_{n-1} = O(1)$ . D'après les formules (39), la matrice de  $\mathcal{Q}_h$  vaut

$$\mathcal{Q}_h = \left( \begin{array}{c|c} \hat{\mathcal{Q}}_h + O(a_n^{5/2}) & O(a_n^{5/2}) \\ \hline O(a_n^{5/2}) & b_{nn} \end{array} \right), \quad b_{nn} \in \mathbb{R}.$$

Il suit du Corollaire 72 que  $\mathcal{Q}_h$  possède une valeur propre  $\sigma_n \neq 0$  qui tend vers 0 avec  $a_n > 0$  et que les autres valeurs propres sont  $\sigma_j = \hat{\sigma}_j + O(a_n^{5/2})$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ , où  $\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_n$  sont les valeurs propres de  $\hat{\mathcal{Q}}_h$ . Par un raisonnement analogue à ci-dessus, les valeurs propres  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  sont distinctes sur un ouvert dense de mesure pleine de  $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$  et la conclusion de la proposition au rang  $n$  en découle.  $\square$

### 7.3. Les uniques relations dans l'espace

LEMME 78. *La forme  $\mathcal{Q}_v$  (formule (36)) est positive.*

*Démonstration.* Comme  $C_1 < 0$ , ceci se lit sur la seconde formule de (36).  $\square$

La résonance suivante, qui découle de l'invariance par les rotations, n'est pas une surprise. (Ce lemme n'a pas d'analogue dans le plan parce que le générateur infinitésimal de l'action de  $SO_2$  sur l'espace séculaire s'annule à l'origine.)

LEMME 79.  *$\mathcal{Q}_v$  possède une valeur propre nulle, que nous noterons  $\varsigma_n$ .*

*Démonstration.* Le vecteur  $X = (\sqrt{\Lambda_1}, \dots, \sqrt{\Lambda_n})$  est dans le noyau de la forme linéaire associée à  $\mathcal{Q}_v$  :

$$\mathcal{Q}_v \cdot X = \sum_{j < k} -m_j m_k C_1(a_j, a_k) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\Lambda_j} & -1/\sqrt{\Lambda_j \Lambda_k} \\ -1/\sqrt{\Lambda_j \Lambda_k} & 1/\sqrt{\Lambda_k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\Lambda_j} \\ \sqrt{\Lambda_k} \end{pmatrix} = 0.$$

$\square$

Curieusement, il semble que le fait suivant n'ait pas été remarqué, dans toute sa généralité, avant Herman [AA01].

PROPRIÉTÉ 80 (HERMAN) *La trace de la matrice  $\mathcal{Q}_h + \mathcal{Q}_v$  est nulle.*

*Démonstration.* C'est une conséquence directe des formules (36).  $\square$

PROPOSITION 81. *Pour tout  $n \geq 2$ , il existe un ouvert dense de mesure pleine  $U \subset \mathcal{A}$  sur lequel les valeurs propres de  $\mathcal{Q}_h$  et de  $\mathcal{Q}_v$  sont deux à deux distinctes et satisfont la propriété suivante : pour tout ouvert  $V \subset U$  simplement connexe, les valeurs propres de  $\mathcal{Q}_h$  et de  $\mathcal{Q}_v$  définissent  $2n$  fonctions holomorphes  $\sigma_1, \dots, \sigma_n, \varsigma_1, \dots, \varsigma_n : V \rightarrow \mathbb{C}$  qui, avec les moyens mouvements  $\nu_1, \dots, \nu_n$ , satisfont les deux uniques relations linéaires (à combinaisons linéaires près)*

$$\sum_{1 \leq j \leq n} (\sigma_j + \varsigma_j) = 0 \quad \text{et} \quad \varsigma_n = 0. \quad (43)$$

*Démonstration.* La proposition est vraie pour  $n = 2$  d'après la Proposition 77 et les lemmes 80 et 79. Supposons-la vérifiée à l'ordre  $n - 1$  avec  $n \geq 3$ . Comme dans l'induction de la démonstration de la Proposition 77, on fait tendre le demi grand axe  $a_n$  vers 0 et l'on note  $\hat{\mathcal{Q}}_v$  la matrice de la forme  $\mathcal{Q}_v$  à l'ordre  $n - 1$ ; alors l'application du corollaire 72 donne le résultat voulu.  $\square$

En restriction à la sous-variété de moment cinétique vertical, on perd la fréquence  $\varsigma_n$  attachée à l'invariance par rotation (voir le paragraphe suivant). Arnold affirme dans [Arn63] que l'application fréquence  $(\sigma_1, \dots, \sigma_n, \varsigma_1, \dots, \varsigma_{n-1})$ , vue comme une fonction locale sur l'espace des phases à valeurs dans  $\mathbb{R}^{2n-1}$ , est une submersion. La proposition précédent montre que ceci est faux.

**7.4. Condition d'Arnold-Pyartli dans l'espace** La Proposition 81 montre que l'image de l'application fréquence du système planétaire est contenue dans un plan vectoriel  $\subset \mathbb{R}^{3n}$  de codimension deux, ce qui interdit d'appliquer le Théorème 60 directement. Notons

$$C = x_0 \wedge y_0 + \sum_{1 \leq j \leq n} x_j \wedge y_j \in \mathbb{R}^3$$

le moment cinétique, dont les composantes s'expriment en fonction des coordonnées de Poincaré de la façon suivante ([Poin05, Chap. IV, paragraphe 90]) :

$$\begin{cases} C_x + iC_y = \sum_{1 \leq j \leq n} z_j \sqrt{2\Lambda_j - |r_j|^2 - \frac{1}{2}|z_j|^2} \in \mathbb{C} \\ C_z = \sum_{1 \leq j \leq n} \left( \Lambda_j - \frac{1}{2} (|r_j|^2 + |z_j|^2) \right) \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (44)$$

Pour s'affranchir de la dégénérescence de l'application fréquence, dans le cas de trois corps Arnold « réduit le noeud » à la Jacobi en fixant le moment cinétique et en considérant le quotient de l'espace des phases par les rotations autour de l'axe du moment cinétique. Dans le cas général de  $n$  planètes, il propose de fixer la direction du moment cinétique (ce qui supprime la valeur propre nulle) et, ne se doutant pas de l'existence d'une résonance supplémentaire, suggère sans le faire d'appliquer le théorème de tores invariants abstrait dans des coordonnées symplectiques analytiques (que l'on peut construire par récurrence).

Sans donner de détails, Herman semble ajouter une fonction du moment cinétique à l'hamiltonien  $F$ , selon une astuce de Poincaré (cette fonction est une combinaison linéaire de  $C_x^2 + C_y^2$  et de  $C_z^2$ , dont les champs hamiltoniens engendrent infinitésimalement un tore maximal invariant de l'action de  $\text{SO}(3)$ ).

Nous allons voir comment montrer sans calculs que le système complètement réduit par la symétrie de rotation vérifie la condition d'Arnold-Pyartli.

Soit  $\tilde{F}$  l'hamiltonien réduit par la symétrie de rotations, c'est-à-dire l'hamiltonien induit par le quotient par les rotations d'axe vertical de la sous-variété de moment cinétique vertical fixé. Notons aussi  $\tilde{\mathcal{Q}}$  la réduction de  $\mathcal{Q}$ . Pour toute valeur des masses et des demi grands axes, le vecteur fréquence  $\tilde{\alpha}$  de l'hamiltonien intégrable

$\tilde{\mathcal{Q}}$  est bien défini et l'on le considère, à masses fixées, comme une application multivaluée définie sur  $\mathcal{A}$ .

**PROPOSITION 82.** *Pour tout  $n \geq 2$ , il existe un ouvert dense de mesure pleine  $U \subset \mathcal{A}$  sur lequel les fréquences de  $\tilde{\mathcal{Q}}$  (composantes de  $\tilde{\alpha}$ ) sont distinctes deux à deux et satisfont la propriété suivante : pour tout ouvert non vide  $V \subset U$  simplement connexe,  $\tilde{\alpha}$  définit une fonction holomorphe  $V \rightarrow \mathbb{R}^{3n-2}$  dont l'image n'est contenue dans aucun hyperplan vectoriel.*

Nous utiliserons ce résultat sous la forme suivante.

**COROLLAIRE 83.** *Les déterminations de l'application fréquence  $\tilde{\alpha}$  presque partout localement définies sur  $(\mathbb{R}_*^+)^n$  sont gauches dans  $\mathbb{R}^{3n-2}$  en tout point d'un ouvert dense de mesure pleine.*

*Démonstration de la proposition 82.* Soit  $T$  un tore invariant de  $\mathcal{Q}$  de dimension  $3n - 1$  (ce sont les perturbations de ces tores qui nous intéresseront), inclus dans la sous-variété symplectique de moment cinétique vertical, d'équation  $C_x = C_y = 0$ . Il est transverse aux champs hamiltoniens  $\vec{C}_x$  et  $\vec{C}_y$  qui, d'après la démonstration du Lemme 79 et la Proposition 80, engendrent le plan propre de la valeur propre nulle de  $\mathcal{Q}_v$ . Donc le vecteur fréquence  $\alpha$  du flot de  $\mathcal{Q}$  sur  $T$  s'identifie, grâce au plongement de  $T$  dans l'espace des phases, aux  $3n - 1$  composantes non nulles du vecteur fréquence du flot de  $\mathcal{Q}$  dans l'espace des phases.

De plus, comme  $T$  est lagrangien dans la sous-variété symplectique de moment cinétique vertical, il est invariant par les rotations d'axe vertical. Donc le quotient de  $T$  par ces rotations est un tore  $\tilde{T}$  de dimension  $3n - 2$ . Le flot de  $\mathcal{Q}$  sur  $T$  étant quasipériodique, il l'est pour  $\tilde{\mathcal{Q}}$  sur  $\tilde{T}$ . Le vecteur fréquence du flot au quotient est simplement la classe d'équivalence de  $\alpha \in \mathbb{R}^{3n-1}$  modulo  $\vec{C}_z$ . Or, la partie quadratique

$$\mathcal{Q}_{C_z} = -\frac{1}{2} \sum_{1 \leq j \leq n} (|r_j|^2 + |z_j|^2)$$

de  $C_z$  est de trace non nulle  $-2n$ . Donc la droite engendrée par la valeur de  $\vec{C}_z$  à l'origine est transverse à l'hyperplan de la résonance restante. Donc, l'hyperplan de trace nulle se projetant bijectivement par passage au quotient, l'image de  $\tilde{\alpha}$ , en fonction des demi grands axes, n'est contenue dans aucun hyperplan vectoriel.  $\square$

*Fin de la démonstration du Théorème 63.* L'hamiltonien quotient  $\tilde{F}$  possède un ensemble de mesure de Lebesgue  $(6n - 4)$ -dimensionnelle strictement positive de tores invariants lagrangiens dans l'espace des phases réduit. Ces tores quasipériodiques diophantiens de dimension  $3n - 2$  se relèvent dans la sous-variété de moment cinétique vertical en des tores de dimension  $3n - 1$ , quasipériodiques (mais pas forcément diophantiens).

L'invariance par rotation des équations de Newton implique que l'on obtient un ensemble de tores invariants de même mesure quand on fixe le moment cinétique dans n'importe quelle autre direction que la direction verticale. Le théorème de

Fubini montre alors que que la réunion de ces ensembles est de mesure de Lebesgue  $6n$ -dimensionnelle strictement positive.  $\square$

#### 8. *Le Système solaire est-il stable ?*

Les difficultés pour appliquer le théorème d'Arnold au Système solaire sont patentées. D'abord, on ne connaît pas explicitement de valeur du petit paramètre  $\epsilon_0$ ; Hénon a même remarqué que, sans précautions particulières, les premières démonstrations ne prouvent l'existence de tores invariants que pour des valeurs dérisoires de  $\epsilon_0$ , de l'ordre de  $10^{-300}$  [Hén66]! D'autre part, les tores invariants trouvés remplissent dans l'espace des phases un ensemble transversalement cantorien qui, s'il est de mesure strictement positive, est néanmoins maigre au sens de la topologie. Étant donnée l'approximation faite en passant du Système solaire au système planétaire (28), la question de savoir si les moyens mouvements des planètes du Système solaire sont diophantiens n'a pas de sens simple; Molchanov a d'ailleurs spéculé, à l'opposé, sur le caractère totalement périodique des moyens mouvements des planètes [Mol68, Bel77].

Ces arguments rendent illusoire en Astronomie la précision de la conclusion du théorème d'Arnold. Robutel a cependant montré numériquement que des parties importantes du Système solaire, considérées comme des systèmes isolés, ont une dynamique quasipériodique; c'est le cas des planètes géantes, et en particulier du système Soleil-Jupiter-Saturne [Las90, Rob95]. Aussi, Celletti et Chierchia ont récemment démontré une version quantitative du théorème KAM, qu'ils ont appliquée avec l'aide d'un ordinateur au système isolé constitué par le Soleil, Jupiter et l'astéroïde Victoria [CC97, CC03]. Remarquons par ailleurs que cela reste un problème ouvert d'établir si, quel que soit  $\epsilon > 0$  (et pas seulement pour  $\epsilon$  petit), les mouvements bornés forment un sous-ensemble de mesure strictement positive pour le système planétaire.

Le théorème de Nekhoroshev [Nek79] affirme qu'au voisinage de solutions quasipériodiques les mouvements sont stables sur des temps exponentiellement longs en fonction du paramètre perturbatif  $\epsilon$ . En appliquant un théorème de ce type, Niederman [Nie96] a montré la stabilité, pendant un intervalle de temps correspondant à la durée de vie du Système solaire, d'un système Soleil-Jupiter-Saturne hypothétique dans lequel la masse de Jupiter et celle de Saturne sont divisées par un facteur  $10^{21}$ . Des travaux récents de Neishtadt sur la stabilité, pendant un intervalle de temps exponentiellement long et sous l'effet de très petites perturbations non hamiltoniennes, sont prometteurs [Nei03].

À l'inverse, les travaux de Poincaré sur le problème des trois corps [Poin92], plus récemment ceux de Sitnikov et d'Alekseev sur le problème restreint [Mos73] ou ceux de Moeckel [Moe88] montrent la complexité que recèle la dynamique du système planétaire ou, a fortiori, celle du Système solaire. Mais ils augurent bien plus encore : les intégrations numériques de Laskar indiquent que la dynamique séculaire des planètes telluriques, sur quelques centaines de millions d'années, est très irrégulière, et que, sur quatre milliards d'années, il n'est pas exclu que Mercure rentre en collision avec Vénus ou s'échappe du système solaire [Las90, Mar98]! On

peut donc espérer démontrer l'existence de diffusion dans le système planétaire, ce qui exigera de surmonter, en plus des difficultés redoutables de mise en évidence de la diffusion dans les cas les plus favorables [Mat93], les obstacles liés à la non-compacité des surfaces d'énergie. Là encore, se posera la question de comprendre les mécanismes géométriques de dérive et d'estimer leur temps caractéristique.

*Notations tensorielles* Un espace euclidien est systématiquement identifié à son dual. Une application linéaire de  $\mathbb{R}^p$  vers  $\mathbb{R}^q$  est vue comme un tenseur

$$a \in \mathbb{R}^q \otimes \mathbb{R}^p, \quad x \in \mathbb{R}^p \mapsto a \cdot x \in \mathbb{R}^q,$$

où le point dans  $a \cdot x$  désigne donc une contraction.

Le tenseur  $a$  peut aussi être vu comme une forme linéaire

$$\mathbb{R}^q \otimes \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}, \quad yx \mapsto y \cdot a \cdot x = a \cdot (yx),$$

où le signe de produit tensoriel est omis et où les points dénotent des contractions simples ou doubles selon le contexte. Le tenseur transposé est le tenseur  ${}^t a \in \mathbb{R}^p \otimes \mathbb{R}^q$  tel que  ${}^t a \cdot (xy) = a \cdot (yx)$  pour tous  $x, y$ .

Enfin, soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$  une fonction différentiable. Notons  $Df$  sa différentielle et identifions-la à une application

$$U \rightarrow \mathbb{R}^q \otimes \mathbb{R}^p, \quad x \mapsto (Df(x) : \delta x \in \mathbb{R}^p \mapsto Df(x) \cdot \delta x \in \mathbb{R}^q).$$

Notamment, si  $y \in \mathbb{R}^q$ , nous notons  ${}^t Df(x) \cdot y$  la différentielle en  $x$  de l'application  $x \in U \mapsto f(x) \cdot y \in \mathbb{R}$ .

*Remerciements.* Merci d'abord à Alain Chenciner, sans l'aide généreuse de qui cet article n'aurait pas vu le jour ; puis à Vladimir Arnold, Mikhail Sevryuk, Alain Albouy, Philippe Robutel, Jacques Laskar, Jean Bourgain, Luidgi Chierchia, Luca Biasco, Raphaël Krikorian, Hakan Eliasson et Helmut Rüssmann pour leurs explications ou leur relecture de certaines parties ; enfin à Albert Fathi, Jean-Pierre Marco, John Mather, Anatole Neishtadt et Jean-Paul Thouvenot pour leur intérêt et leurs encouragements.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [AA01] K. Abdullah et A. Albouy. On a strange resonance noticed by M. Herman. *Regul. Chaotic Dyn.* **6** (2001), 421–432.
- [AR67] R. Abraham et J. Robbin. *Transversal Mappings and Flows*. Benjamin, New-York, 1967.
- [Arn63] V.I. Arnold. Petits dénominateurs et problèmes de stabilité du mouvement en mécanique classique et céleste (en russe). *Usp. Mat. Nauk.* **18** (1963), 91–192 (trad. anglaise, *Russ. Math. Surv.* **18** (1963), 85–193).
- [Arn65] V.I. Arnold. Conditions d'application et estimation de l'erreur pour la méthode de moyennisation des systèmes qui traversent des résonances (en russe). *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **161** (1965), 9–12 (trad. anglaise *Soviet Math. Dokl.* **6** (1965), 331–334).

- [Arn88] V.I. Arnold, V.V. Koslov et A.I. Neishtadt. *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics (Dynamical systems III, Encyclopaedia Math. Sci., 3)*. Springer, 1993.
- [Bak86] V.I. Bakhtin. Moyennisation dans les systèmes à plusieurs fréquences (en russe). *Funktsional. Anal. i Prilozhen* **20**(2) (1986), 1–7.
- [Bel77] V. Beletsky. *Essai sur le mouvement des corps cosmiques* (en russe), 1977; trad. française, Mir 1986.
- [Bou97] J. Bourgain. On Melnikov's persistency problem. *Math. Res. Lett.* **4** (1997), 445–458.
- [Bos85] J.B. Bost. Tores invariants des systèmes dynamiques hamiltoniens [d'après Kolmogorov, Arnold, Moser, Rüssmann, Zehnder, Herman, Pöschel, ...]. *Séminaire Bourbaki*, Exp. **639**, 1984/85.
- [BHS96] H.W. Broer, G.B. Huitema et M.B. Sevryuk. *Quasi-periodic Motions in Families of Dynamical Systems (Lecture Note in Mathematical Science 1645)*. Springer, 1996.
- [CC97] A. Celletti et L. Chierchia. On the stability of realistic three-body problems. *Comm. Math. Phys.* **186**(2) (1997), 413–449.
- [CC03] A. Celletti et L. Chierchia. KAM stability and celestial mechanics. Prépublication, [http://www.mat.uniroma3.it/users/chierchia/WWW/english\\_version.html](http://www.mat.uniroma3.it/users/chierchia/WWW/english_version.html), 2003.
- [Che88] A. Chenciner. Intégration du problème de Kepler par la méthode de Hamilton-Jacobi : coordonnées de Delaunay et de Poincaré. *Notes scientifiques et techniques du Bureau des Longitudes* **S 026** (1989).
- [CS94] Ch.-Q. Cheng et Y.-S. Sun. Existence of KAM tori in degenerate Hamiltonian systems. *J. Differential Equations* **114** (1994), 288–335.
- [Eli85] L.H. Eliasson. Perturbations of stable invariant tori. Prépublication de l'Institut Mittag-Leffler, 1985.
- [Eli89] L.H. Eliasson. Perturbations of stable invariant tori for Hamiltonian systems. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci.* **4**(15 :1) (1988), 115–147.
- [Féj02] J. Féjoz. Quasiperiodic motions in the planar three-body problem. *J. Differential Equations* **183** (2002), 303–341.
- [Féj02a] J. Féjoz. Global secular dynamics in the planar three-body problem. *Celest. Mech. Dynam. Astronom.* **84** (2002), 159–195.
- [Féj03] J. Féjoz. Global secular dynamics in the Lunar problem. *Proc. Conf. on the Modern Theory of Dynamical Systems and Applications to Theoretical Celestial Mechanics, Dedicated to the Memory and the 70th Birthday of V.M. Alekseyev*, Moscou (2003).
- [Ham74] R.S. Hamilton. The inverse function theorem of Nash and Moser. Prépublication, Cornell University, 1974.
- [Ham82] R.S. Hamilton. The inverse function theorem of Nash and Moser. *Bull. Amer. Math. Soc.* **7** (1982), 65–222.
- [Hén66] M. Hénon. Exploration numérique du problème restreint IV. Masses égales, orbites non périodiques. *Bull. Astronom.* **3**(1 :2) (1966), 49–66.
- [HS71] M.R. Herman et F. Sergeraert. Sur un théorème d'Arnold et Kolmogorov. *C. R. Acad. Sc. Paris* **273** (1971), 409–411.
- [Her80] M.R. Herman. Démonstration du théorème des courbes invariantes pour les difféomorphismes de l'anneau. Manuscrit, 1980.
- [Her98] M.R. Herman. Démonstration d'un théorème de V.I. Arnold. *Séminaire de Systèmes Dynamiques* et manuscrit, 1998.
- [Her98a] M.R. Herman. Some open problems in dynamical systems. *Proceedings of the international congress of mathematicians*, Berlin, 1998 Vol. II. *Doc. Math.*, vol. extra II (1998), 797–808.
- [Hir76] M. W. Hirsch. *Differential topology*. Springer, 1976.
- [Hör76] L. Hörmander. The boundary problems of physical geodesy. *Arch. Ration. Mech. Anal.* **62** (1976), 1–52.
- [JM66] W.H. Jefferys et J. Moser. Quasi-periodic solutions for the three-body problem. *Astronom. J.* **71** (1966), 568–578.
- [Kri99] R. Krikorian. Réductibilité des systèmes produits-croisés à valeurs dans des groupes compacts. *Astérisque* **259** (1999).
- [Kuk88] S.B. Kuksin. Perturbation theory of conditionally periodic solutions of infinite-dimensional Hamiltonian systems and its applications to the Korteweg-de Vries

- equation (en russe). *Mat. Sb.* **136**(178 :3) (1988) 396–412 (trad. anglaise *Math. USSR-Sb.* **64**(2) (1989), 397–413).
- [Las90] J. Laskar. The chaotic motion of the Solar System. A numerical estimate of the size of the chaotic zones. *Icarus* **88** (1990), 266–291.
- [Las91] J. Laskar. Analytical framework in Poincaré variables for the motion of the solar system. *Predictability, Stability and Chaos in n-Body Dynamical Systems*. Ed. A. Roy (*NATO ASI Series, B272*). 1991, pp. 93–114.
- [LR95] J. Laskar et P. Robutel. Stability of the planetary three-body problem, I. Expansion of the planetary Hamiltonian. *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* **62** (1995), 193–217.
- [LZ76] M.L. Lidov et S.L. Ziglin. Non-restricted double-averaged three body problem in Hill's case. *Celestial Mech.* **13** (1976), 471–489.
- [MRL02] F. Malige, P. Robutel, J. Laskar. Partial reduction in the  $n$ -body planetary problem using the angular momentum integral. *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* **84** (2002), 283–316.
- [Mar98] S. Marmi. Chaotic behavior in the solar system (following J. Laskar). *Séminaire Bourbaki*, Exp. 854, 1998/99.
- [Mat93] J. N. Mather. Variational construction of connecting orbits. *Ann. Inst. Fourier* **43**(5) (1993), 1349–1386.
- [MS98] D. McDuff et D. Salamon. *Introduction to symplectic topology*, 2nd edn. Oxford Science, 1998.
- [Mel65] V. K. Melnikov. On some cases of conservation of conditionally periodic motions under a small change of the Hamiltonian function. *Soviet Math. Dokl.* **6** (1965), 1592–1596.
- [Mel68] V. K. Melnikov. A family of conditionally periodic solutions of a Hamiltonian system. *Soviet Math. Dokl.* **9** (1968), 882–886.
- [Moe88] R. Moeckel. Some qualitative features of the three-body problem. *Hamiltonian Dynamical Systems (Boulder, CO, 1987)* (Contemporary Mathematics, 81). American Mathematical Society, Providence, 1988, pp. 1–22.
- [Mol68] A. Moltchanov. The resonant structure of the solar system. *Icarus* **8**(2) (1968), 203–215.
- [Mos61] J. Moser. A new technique for the construction of solutions of non-linear differential equations. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **47** (1961), 1824–1831.
- [Mos62] J. Moser. On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II* (1962), 1–20.
- [Mos73] J. Moser. *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*. Princeton University Press, 1973, réimpression 2001.
- [Nas56] J. Nash. The imbedding problem for Riemannian manifolds. *Ann. of Math.* **63** (1956), 20–63.
- [Nei03] A. Neishtadt. On averaging in two-frequency systems with small Hamiltonian and much smaller non-Hamiltonian perturbations. Prépublication (2003).
- [Nek79] N.N. Nekhoroshev. An exponential estimate of the time of stability of near-integrable Hamiltonian systems (en russe). *Uspehi Mat. Nauk* **32** (1977), 5–66.
- [New87] I. Newton. *Les principes mathématiques de la philosophie naturelle*, 1687; trad. de la Marquise Du Chastellet, 1756; réimpression Blanchard, 1966.
- [Nie96] L. Niederman. Stability over exponentially long times in the planetary problems. *Nonlinearity* **9** (1996), 1703–1751.
- [Par83] I.O. Parasyuk. Perturbation de mouvements quasipériodiques dans les systèmes réversibles à plusieurs fréquences (en russe). *Dokl. Akad. Nauk Ukrain. SSR Ser. A* **9** (1982), 19–22.
- [Par84] I.O. Parasyuk. Perturbation de tores invariants dans les systèmes hamiltoniens (en russe). *Ukrain. Mat. Zh.* **36**(4) (1984), 467–473.
- [Poin05] H. Poincaré. *Leçons de mécanique céleste*. Gauthier-Villars, Paris, 1905–1907.
- [Poin92] H. Poincaré. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Gauthier-Villars, Paris, 1892–1899.
- [Pös82] J. Pöschel. Integrability of Hamiltonian systems on Cantor sets. *Comm. Pure Appl. Math.* **35** (1982), 653–696.

- [Pös89] J. Pöschel. On elliptic lower-dimensional tori in Hamiltonian systems. *Math. Z.* **202** (1989), 559–608.
- [Pya69] A.S. Pyartli. Approximations diophantiennes sur les sous-variétés de l'espace euclidien (en russe). *Funkcional. Anal. i Priložen.* **3** (1969) 59–62 (trad. anglaise *Functional Anal. Appl.* **3** (1969), 303–306).
- [Rob95] P. Robutel. Stability of the planetary three-body problem. II. KAM Theory and existence of quasiperiodic motions. *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* **62** (1995), 219–261.
- [Rüs90] H. Rüssmann. Nondegeneracy in the perturbation theory of integrable dynamical systems. *Stochastics, Algebra and Analysis in Classical and Quantum Dynamics (Marseille, 1988) (Mathematical Applications, 59)*. Kluwer Academic, Dordrecht, 1990, pp. 211–223.
- [Rüs94] H. Rüssmann. On the frequencies of quasi-periodic solutions of analytic nearly integrable Hamiltonian systems. *Seminar on Dynamical Systems (St Petersburg, 1991) (Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 12)*. Birkhäuser, Basel, 1994, pp. 160–183.
- [See64] R.T. Seeley. Extension of  $C^\infty$  functions defined in a half space. *Proc. Amer. Math. Soc.* **15** (1964), 625–626.
- [Sch64] L. Schwartz. *Functional Analysis*. Courant Institute of Mathematical Sciences, New-York, 1964.
- [Ser72] F. Sergeraert. Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **5** (1972), 599–660.
- [Sev95] M.B. Sevryuk. The lack-of-parameters problem in the KAM theory revisited. *Hamiltonian Systems with Three or More Degrees of Freedom (NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 533)*. Kluwer, Dordrecht, 1999, pp. 568–572.
- [Sev03] M.B. Sevryuk. The classical KAM theory at the dawn of the twenty-first century. *Moscow Math. J.* **3** (2003), 1113–1144.
- [Ste70] E.M. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton University Press, 1970.
- [Yoc92] J.-C. Yoccoz. Travaux de Herman sur les tores invariants. *Séminaire Bourbaki* **754** (1992/92).
- [Zeh76] E. Zehnder. Generalized implicit function theorems with applications to some small divisor problems II. *Comm. Pure Appl. Math.* **29**(1) (1976), 49–111.