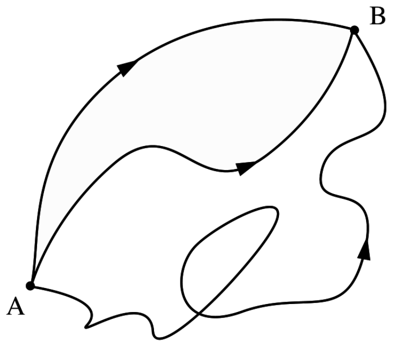
Le principe de moindre action



Au premier siècle de notre ère, Héron d'Alexandrie, démontra, dans son *Catoptrica*, que, quand un rayon de lumière est réfléchi sur un miroir, le chemin qu'il suit est plus court que n'importe quel chemin obtenu en faisant varier le point de réflexion sur le miroir. À partir de l'époque moderne, Fermat, Maupertuis, Euler, Lagrange, Gauss, Dirac, Feynman et bien d'autres découvrirent une série de généralisations spectaculaires. L'une des plus marquantes est le principe d'action stationnaire de Hamilton. Considérons une particule, plongée par exemple dans un champ gravitationnel uniforme, se mouvant d'un point A vers un point B, en un certain temps. On peut imaginer que la particule suive un autre chemin entre A et B, pendant le même temps. Si alors on calcule à chaque instant la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle, et si l'on calcule la moyenne de cette différence le long de la trajectoire, le résulat est un nombre qui est *toujours plus grand* que le nombre analogue trouvé pour la trajectoire réelle! On en déduit par exemple que la particule a intérêt à passer au plus vite quand elle est au plus bas, parce qu'alors l'énergie potentielle est petite.

C'est un fait général que les lois fondamentales de la Mécanique classique reviennent à dire que "l'action" le long du mouvement est stationnaire (à défaut d'être forcément minimale), i.e. invariante par variation infinitésimale du chemin suivi:

$$\delta \int L \, dt = 0,$$

où le *lagrangien* L est une certaine fonction, dépendant à chaque instant de la configuration et de la vitesse du système. Ce principe a suscité beaucoup de commentaires téléologiques parce que les systèmes mécaniques se comportent comme si ils choisissaient leur évolution pour rendre stationnaire (ou minimiser, dans les cas les plus simples) l'action entre les états initial et final. Les travaux de Dirac et de Feynman en Mécanique quantique donnèrent une explication à cette finalité apparente, reposant sur le calcul d'interférence des fonctions d'onde et la célèbre "formule de la phase stationnaire":

> Is it true that the particle looks at all the other possible trajectories? And if, by having things in the way, we don't let it look, that we will get an analogue of diffraction? The miracle of it all is, of course, that it does just that. [...] A particle smells all the paths in the neighborhood and chooses the one that has the least action. [...] Nearby paths will normally cancel their effects out in taking the sum —except for one

> region, and that is when a path and a nearby path all give the same phase in the first approximation. (R. Feynman, *Physics Lectures*, 1964)
>
> Est-il vrai que la particule regarde toutes les autres trajectoires possibles ? Et si, en mettant des obstacles à son passage, nous ne la laissons pas regarder, que nous obtiendrons un analogue de la diffraction ? Le miracle dans tout ça est, bien sûr, que c'est précisément ce qui se passe. [...] Une particule renifle tous les chemins dans le voisinage et choisit celle qui a la moindre action. [...] Normalement, les chemins voisins annulent mutuellement leur effet quand on les ajoute — sauf dans une région précise, celle où le chemin et les chemins voisins donnent tous la même phase en première approximation. (R. Feynman, *Physics Lectures*, 1964)

En réalité, beaucoup d'équations différentielles admettent une formulation variationnelle. C'est le cas notamment de la plupart des lois physiques. Récemment, la théorie de Mather-Mañe a produit un nouveau remarquable principe de moindre action en Dynamique classique, dans lequel les objets minimisants ne sont plus des trajectoires individuelles, mais des "mesures", destinées à appréhender de subtils phénomènes dynamiques globaux.

Sources: V. Arnold, Méthodes mathématiques de la mécanique classique (1976); R. Feynman, The principle of least action in quantum mechanics (1942)