
LE PROBLÈME DE LA STABILITÉ DU SYSTÈME SOLAIRE, DE LAGRANGE À NOS JOURS

par

Jacques Féjoz

Résumé. L'attraction mutuelle des planètes peut-elle rompre la belle régularité du mouvement keplérien des planètes autour du Soleil, que la loi de l'attraction universelle était initialement censée expliquer? Nous retraçons certaines idées mathématiques qui ont émergé des tentatives de résolution du plus ancien des problèmes de Dynamique, depuis les travaux de Lagrange (1736-1813), puis ceux de Poincaré ou Arnold, jusqu'à certains travaux plus récents conduisant à l'abandon total du dogme de la stabilité.

Table des matières

.....	1
1. Le système planétaire.....	3
2. La variation de la constante.....	5
3. Les deux théorèmes de stabilité de Lagrange et Laplace.....	10
4. Les premiers signes d'instabilité.....	13
5. Les théorèmes d'Arnold et de Nekhoroshev.....	18
6. Instabilité globale.....	20
Références.....	24

À la fin du XVII^e siècle, la découverte de la loi de l'attraction universelle bouleversa notre compréhension du mouvement des astres du système solaire [84]. Avec cette loi, Newton expliqua de façon magistrale la contradiction apparente entre le principe, mis en avant par Galilée et Descartes, du mouvement inertiel rectiligne uniforme en mécanique terrestre et les lois, énoncées par Kepler, régissant le mouvement elliptique des planètes autour du Soleil et des satellites autour des planètes. Dans un tour de force supplémentaire, Newton calcula l'effet approché du Soleil sur la Lune. Il s'aperçut rapidement, en effet, que les petites attractions mutuelles pouvaient détruire la belle régularité que l'attraction universelle avait d'abord expliquée :

[B]ind Fate could never make all the Planets move one and the same way in Orbs concentrick, some inconsiderable Irregularities excepted, which may have risen from the mutual Actions of Comets and Planets upon one another, and which will be apt to increase, till this System wants a Reformation. [85]

La conséquence imprévue de l'attraction newtonienne fut donc de remettre en question la croyance en la stabilité du Système solaire : il ne fut plus évident que les planètes se mouvaient immuablement, sans collisions ni éjections.

En fait, une seconde question se posa, concomitante à celle de la stabilité — celle de « savoir si la loi de Newton explique à elle seule tous les phénomènes astronomiques » [90]. Une course longue de deux siècles s'engagea entre les astronomes, dont les observations étaient toujours plus précises, et les « géomètres ». Deux discordances entre observations et prédictions entretinrent au XVIII^e siècle un suspense particulier : la première était l'avance du périhélie de la Lune ; la seconde était le décalage de la longitude moyenne de Jupiter et de Saturne [61], mis au jour grâce à la confrontation des observations astronomiques de l'époque avec celles rassemblées par Ptolémée presque deux mille ans auparavant. Les premiers calculs de Newton, d'Euler, de Clairaut, de d'Alembert et d'autres donnaient de mauvais résultats [17, 27].

Mais les problèmes conjoints de la stabilité et de l'adéquation de la loi de Newton se heurtaient tous deux au même mur de difficulté : le calcul infinitésimal en était à ses débuts, et l'appareil mathématique nécessaire pour comprendre l'influence à long terme des attractions mutuelles manquait. La théorie des perturbations naquit avec les travaux de Lagrange et de Laplace, qui démontrèrent deux retentissants théorèmes de stabilité. Par ailleurs, Lagrange transforma la mécanique et la dynamique en une branche de l'analyse mathématique, en posant les fondations des géométries différentielle et symplectique, ouvrant ainsi la voie à des développements ultérieurs considérables. Ironiquement, Lagrange supprima les figures là où Newton avait tenté de supprimer les formules ! En tout cas, il s'ensuivit une riche série de développements, conduits par Hill, Le Verrier, Lindstedt, Poincaré, Kolmogorov ou Arnold, parmi d'autres, qui conduisirent à de nombreuses démonstrations partielles de la stabilité du Système solaire, que Poincaré commenta ainsi :

Les personnes qui s'intéressent aux progrès de la mécanique céleste, mais qui ne peuvent les suivre que de loin, doivent éprouver quelque étonnement en voyant combien de fois on a démontré la stabilité du système solaire.

Lagrange l'a établie d'abord, Poisson l'a démontrée de nouveau, d'autres démonstrations sont venues depuis, d'autres viendront encore. Les démonstrations anciennes étaient-elles insuffisantes, ou sont-ce les nouvelles qui sont superflues ?

L'étonnement de ces personnes redoublerait sans doute, si on leur disait qu'un jour peut-être un mathématicien fera voir, par un raisonnement rigoureux, que le système planétaire est instable.

Cela pourra arriver cependant ; il n'y aura là rien de contradictoire, et cependant les démonstrations anciennes conserveront leur valeur. (Poincaré, 1897 [91] ; voir aussi [18])

Et en effet, après des siècles d'efforts pour démontrer la stabilité du Système solaire, la surprise fut immense quand successivement Poincaré, Arnold ou Laskar avancèrent un faisceau d'arguments mathématiques et numériques indiquant au contraire que le

Système solaire est instable, sur une échelle de temps inférieure à la durée de vie du Soleil : l'évolution à long terme du Système solaire ressemble plus à une partie de tennis dans une forêt qu'à un jeu bien réglé de roues dentées. Mais les mécanismes précis d'instabilité restent largement mytérieux...

C'est cette histoire que nous nous proposons de survoler à travers quelques unes des idées mathématiques qui l'ont jalonnée, choisies subjectivement. Au détriment de la rigueur historique nous nous permettrons beaucoup d'anachronismes sans lesquels l'exposition serait considérablement allongée.

Mentionnons que les œuvres complètes de Lagrange, mort il y a deux cents ans, sont numérisées sur le site Gallica de la Bibliothèque Nationale de France.

1. Le système planétaire

Étant donné un paramètre $\epsilon > 0$, soient $m_0, \epsilon m_1, \epsilon m_2, \dots, \epsilon m_n$ les masses de $1 + n$ points matériels, censés représenter le Soleil et n planètes. Si l'on note $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^3$ les vecteurs positions de ces astres, les équations de Newton s'écrivent

$$(1) \quad \begin{cases} \ddot{x}_0 = \epsilon \sum_{k \neq 0} m_k \frac{x_k - x_0}{\|x_k - x_0\|^3} \\ \ddot{x}_j = m_0 \frac{x_0 - x_j}{\|x_0 - x_j\|^3} + \epsilon \sum_{k \neq 0, j} m_k \frac{x_k - x_j}{\|x_k - x_j\|^3} \quad (j = 1, \dots, n). \end{cases}$$

Comme Newton l'a démontré dans ses *Principia* [84], le fait de remplacer les corps célestes par des points matériels est justifié tant que la distribution de masse de ces corps a une symétrie sphérique. Par ailleurs, la masse des planètes rapportée à celle du Soleil étant petite (1/1000 pour Jupiter), il est légitime d'étudier les équations (1) pour les petites valeurs de ϵ ; ce sera d'ailleurs le cadre d'étude de la quasi-totalité des travaux mathématiques sur le sujet.

Remarquons aussi que l'invariance galiléenne des équations (1) permet de se restreindre sans perte de généralité au sous-espace invariant où le centre de masse

$$x_G = \frac{1}{m_0 + \epsilon \sum_{j \neq 0} m_j} \left(m_0 x_0 + \epsilon \sum_{j \neq 0} m_j x_j \right)$$

est à l'origine, ce que nous ferons dorénavant; on peut alors retrouver le mouvement du Soleil à partir de celui des planètes, puisque

$$x_0 = -\epsilon \sum_{j \neq 0} \frac{m_j}{m_0} x_j.$$

Nous noterons

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^3)^n \setminus \Delta = \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta \quad (\Delta := \cup_{j,k} \{x_k = x_j\})$$

le vecteur de configuration, et

$$z = (x, \dot{x}) \in ((\mathbb{R}^3)^n \setminus \Delta) \times (\mathbb{R}^3)^n = T(\mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta)$$

le vecteur d'état. Bizarrement, l'espace des z (ou son dual) s'appelle aujourd'hui l'*espace des phases*.⁽¹⁾ Soit encore

$$(2) \quad \dot{z} = v(z) = v_0(z) + \epsilon v_1(z)$$

1. À peu près tout le monde depuis Boltzmann a pourtant oublié ce que le mot *phase* désigne!

le champ de vecteurs correspondant aux équations (1), restreint à notre sous-espace invariant $(x_G, \dot{x}_G) = (0, 0)$.

Limite keplérienne. — À la limite quand ϵ tend vers 0, le Soleil se confond avec $x_G = 0$. Chaque planète, elle, subit la seule attraction du Soleil fixe :

$$\ddot{x}_j = -m_0 \frac{x_j}{\|x_j\|^3} \quad (j = 1, \dots, n).$$

et son mouvement est régi par les lois de Kepler [4] :

Première loi. *Le corps x_j se meut le long d'une conique dont un foyer est à l'origine.*

Deuxième loi. *L'aire balayée par x_j croît linéairement avec le temps.*

Si de plus l'énergie

$$E_j = \frac{m_j \dot{x}_j^2}{2} - \frac{m_0 m_j}{\|x_j - x_0\|}$$

est < 0 , ce que nous supposons dans la suite, la conique décrite est bornée, donc c'est une ellipse.

Troisième loi. *Le carré de la période de révolution de x_j est proportionnel au cube du grand demi-axe.*

La deuxième loi découle immédiatement du fait que la dérivée de

$$\gamma_j := \det(x_j, \dot{x}_j)$$

le long des trajectoires est nulle.⁽²⁾ (Le moment cinétique habituel est $C_j = m_j \gamma_j$.) Pour la troisième loi, voir le livre d'Arnold-Kozlov-Neishtadt [4]. Cédons au plaisir de rappeler une démonstration merveilleuse de la première loi, due à Lagrange.

Démonstration de la première loi [46]. — D'abord, le mouvement se fait dans le plan (ou la droite si $\gamma_j = 0$) engendré par la position x_j et la vitesse \dot{x}_j initiales ; ceci découle de l'invariance du problème de Cauchy par symétrie par rapport à ce plan. Notons (ξ_j, η_j) les coordonnées de x_j dans ce plan (respectivement, dans un plan contenant cette droite) et $r_j = \sqrt{\xi_j^2 + \eta_j^2}$. Les coordonnées ξ_j et η_j satisfont les équations

$$\ddot{\xi}_j = -m_0 \frac{\xi_j}{r_j^3}, \quad \ddot{\eta}_j = -m_0 \frac{\eta_j}{r_j^3}$$

tandis que, comme un calcul direct le montre, r_j satisfait

$$\ddot{r}_j = -\frac{\gamma_j^2 - m_0 r_j}{r_j^3}.$$

Des conditions initiales $x_j^o = (\xi_j^o, \eta_j^o)$ étant fixées (et $r_j^o = \sqrt{\xi_j^o + \eta_j^o}$), ξ et η satisfont tautologiquement l'équation linéaire dépendant du temps

$$(3) \quad \ddot{\zeta}_j = -m_0 \frac{\zeta_j}{r_j^o(t)^3},$$

2. Cela peut-il inciter, dans les cours d'algèbre linéaire, à ne pas soigneusement occulter le fait que le déterminant est un volume orienté ?

tandis que r_j satisfait l'équation "linéaire non homogène" dépendant du temps

$$(4) \quad \ddot{r}_j = -\frac{\gamma_j^2 - m_0 r_j}{r_j^o(t)^3},$$

(on a simplement remplacé tous les r_j dans les dénominateurs par la fonction explicite du temps $r_j^o(t)$). L'équation (3) étant la partie homogène de l'équation (4), le plan affine des solutions de (4) est dirigé par le plan vectoriel des solutions de (3). De plus, $r_j(t) \equiv \gamma_j^2/m_0$ étant une solution particulière de (4) (correspondant à une révolution circulaire uniforme), il existe des constantes $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$ telles que la courbe $(\xi_j(t), \eta_j(t), r_j(t))$ soit tracée sur le plan affine d'équation

$$r_j = \gamma_j^2/m_0 + \alpha_j \xi_j + \beta_j \eta_j$$

(si $\gamma_j = 0$, ceci reste vrai parce que ξ_j et η_j sont proportionnelles). En éliminant r_j , on obtient

$$\sqrt{\xi_j^2 + \eta_j^2} = \gamma_j^2/m_0 + \alpha_j \xi_j + \beta_j \eta_j,$$

soit l'équation d'une conique dans le plan de x_j , dont un foyer est l'origine, de droite directrice $\gamma_j^2/m_0 + \alpha_j \xi_j + \beta_j \eta_j = 0$ et d'excentricité $\sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2}$. \square

Pour chaque planète, on se restreindra, dans l'espace des orbites du champ de vecteurs v_0 , à un voisinage assez petit des solutions horizontales (plan orbital confondu avec un plan fixe orienté qualifié d'horizontal), circulaires (excentricité nulle), et directes (dont la révolution se fait, en projection sur le plan horizontal, dans le sens positif). Parmi les planètes du Système solaire, c'est en effet Mercure qui a la plus grande inclinaison ($\sim 7^\circ$) et la plus grande excentricité ($\sim 0,2$), et toutes les planètes tournent dans le même sens (en revanche, la rotation propre de Vénus, par exemple, est rétrograde). La variété des telles solutions keplériennes d'une planète est difféomorphe à \mathbb{R}^5 .

2. La variation de la constante

L'intégration du champ non perturbé v_0 , dans l'espace des phases de dimension $6n$, se fait à l'aide de $6n$ constantes d'intégrations scalaires, disons $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_{6n})$, qui sont autant d'*intégrales premières*⁽³⁾ : se donner une condition initiale équivaut à se donner la constante d'intégration vectorielle ζ , et alors

$$z = z(t, \zeta).$$

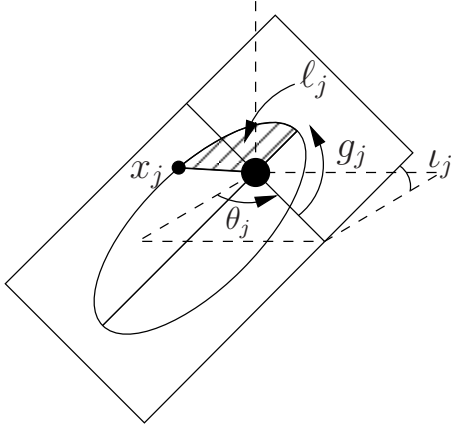
Parmi ces constantes, on peut distinguer les $5n$ *éléments elliptiques* qui déterminent l'ellipse keplérienne sur laquelle chaque planète se meut, et les n paramètres qui déterminent la position des planètes sur leur ellipse à l'instant initial. Comme éléments elliptiques,

3. Intégrale première : nom bizarre qui désigne des fonctions constantes le long des courbes intégrales, qui provient d'un usage ancien du mot "intégrale" pour désigner des quantités conservées, l'adjectif "première" signifiant que ces intégrales dépendent des positions et de leur dérivée première par rapport au temps

sur l'ouvert difféomorphe à $\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3$ de l'espace des phases où de plus les ellipses ne sont ni circulaires ni horizontales, on peut choisir les suivants :

$$\begin{cases} a_j = \text{grand demi-axe} \\ g_j = \text{argument du périhélie} \\ e_j = \text{excentricité} \\ \theta_j = \text{longitude du nœud} \\ \iota_j = \text{inclinaison,} \end{cases}$$

où la définition de certains éléments est rappelée sur la figure suivante.



Comme coordonnée sur chaque ellipse, on peut choisir l'*anomalie moyenne* ℓ_j , c'est-à-dire l'angle compté à partir du périhélie, proportionnel à l'aire intérieure à l'ellipse délimitée par x_j ; d'après la deuxième loi des aires, $\dot{\ell}_j$ est constante le long des courbes intégrales de v_0 .

Ainsi, une condition initiale z^o étant fixée, l'unique courbe intégrale correspondante de v_0 est une fonction $z = z(t, \zeta)$, $\zeta = (\ell_j, a_j, g_j, e_j, \theta_j, \iota_j)_{j=1, \dots, n}$, telle que

$$\frac{\partial z}{\partial t}(t, \zeta) = v_0(z(t, \zeta)).$$

Fort de cette première approximation du mouvement, cherchons maintenant une courbe intégrale du champ de vecteur $v = v_0 + \epsilon v_1$, avec $0 \leq \epsilon \ll 1$. Les intégrales premières ζ précédentes n'ont aucune chance de rester des intégrales premières, mais on peut s'attendre à ce qu'elles varient lentement. La méthode de la variation de la constante consiste à chercher une solution de la forme

$$z = z(t, \zeta(t)),$$

où $\zeta(t)$ est la nouvelle fonction inconnue.⁽⁴⁾ En dérivant par rapport au temps, et en simplifiant les termes $\frac{\partial z}{\partial t} = v_0(z)$, on voit que

$$(5) \quad \frac{\partial z}{\partial \zeta}(t, \zeta(t)) \cdot \dot{\zeta}(t) = \epsilon v_1(z(t, \zeta(t))),$$

4. Cette méthode est généralement enseignée comme une astuce de calcul pour les équations linéaires. Comme dans ce cas la notion de petitesse disparaît, la méthode devient incompréhensible.

ce qui finit de convaincre que $\dot{\zeta} = O(\epsilon)$. Faute de savoir résoudre l'équation exactement, on peut bien sûr obtenir le premier ordre d'approximation (après Kepler) en négligeant les termes d'ordre deux en ϵ , c'est-à-dire en résolvant :

$$\dot{\zeta}(t) = \epsilon \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta}(t, \zeta^o) \right)^{-1} v_1(z(t, \zeta^o)),$$

par simple quadrature.

C'est ce que Newton (dans un époustouffant tour de force qui impressionna Laplace), Clairaut, d'Alembert, Euler, Lagrange et d'autres ont fait dans différentes situations particulières, (voir par exemple [30, 84]) pour tenter notamment d'expliquer les deux grands problèmes que furent l'avance du périhélie de la Lune et les irrégularités de Saturne et de Jupiter. La théorie des perturbations était née... mais les résultats étaient faux ! Par exemple, dans son mémoire qui remporta le prix de l'Académie des Sciences en 1748, Euler prétend démontrer que les décalages des anomalies moyennes de Jupiter et de Saturne sont de même signe, alors que les observations montrent le contraire [30, 62]. En 1747, Clairaut proposa à l'Académie des Sciences de réviser la loi de l'attraction universelle pour rendre la Mécanique compatible avec ses prédictions [17] ! Schématiquement, les erreurs ont deux sources :

- les dérivées partielles sont délicates à calculer (la dérivée par rapport à ζ_j dépendant de la définition de tous les ζ_k !),
- il faut beaucoup de savoir-faire pour déterminer quels termes sont effectivement négligeables devant d'autres.

C'est à cette époque que les calculs commencèrent à être effectués avec des lettres pour les paramètres plutôt qu'avec des valeurs numériques, et devinrent ainsi considérablement plus limpides.

Avec la terminologie d'aujourd'hui, ce qui précède revient à déduire, par simple dérivation de l'application

$$\phi : z \text{ (condition initiale)} \mapsto \zeta \text{ (constante d'intégration)},$$

l'évolution de la constante d'intégration de v_0 par rapport au temps :

$$\dot{\zeta} = \phi'(z) \cdot v(z).$$

Lagrange clarifia et perfectionna considérablement la méthode de la variation de la constante. On peut artificiellement décomposer sa contribution en deux.

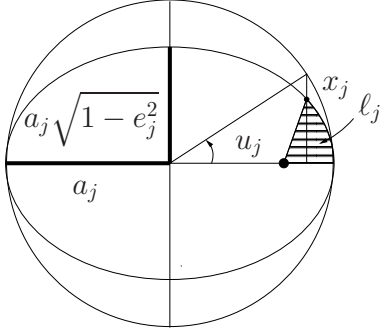
Redressement du champ de vecteur keplérien. — Lagrange comprit que l'application ϕ est un changement de coordonnées, c'est-à-dire que l'on peut repérer un point de l'espace des phases non plus par la position et la vitesse des planètes, mais par les éléments des ellipses keplériennes que les planètes auraient décrites à partir de ce point sous la seule action du Soleil, et par leur position sur ces ellipses. Ceci permet de composer l'égalité précédente à droite par ϕ^{-1} , et donc d'obtenir un système fermé

$$(6) \quad \dot{\zeta} = \phi'(z(\zeta)) \cdot v(z(\zeta)) = (\phi_* v)(\zeta),$$

soit encore de calculer l'image directe du champ de vecteurs par le difféomorphisme ϕ . C'est l'un des premiers exemples de changement de coordonnées qui ne soit ni algébrique,

ni proche de l'identité, et utilisé pour redresser un champ de vecteurs. On peut y voir le début du concept de variété différentielle abstraite.⁽⁵⁾

La transcendance du changement de variables ϕ se voit quand on examine le paramétrage des ellipses keplériennes. Rappelons que l'on note ℓ_j l'anomalie moyenne de la j -ième planète. Notons de plus u_j son anomalie excentrique, dont la définition se lit sur la figure suivante.



Ces deux anomalies sont liées par l'équation de Kepler

$$\ell_j = u_j - e_j \sin u_j.$$

La détermination de la loi horaire des astres dans le ciel passe par l'inversion de cette formule. C'est d'ailleurs apparemment son désir de comprendre correctement la formule d'inversion de Lagrange [44, 101] qui a conduit Cauchy à développer sa théorie des fonctions holomorphes, et notamment la formule de la moyenne [12].

Revenons un instant à l'équation (6), que l'on peut écrire

$$(7) \quad \dot{\zeta} = \sum_{j=1}^n \nu_j \frac{\partial}{\partial \ell_j} + \epsilon(\phi_* v_1)(\zeta)$$

en notant ν_j les *moyens mouvements*, c'est-à-dire les fréquences keplériennes de planètes. Quand $\epsilon = 0$, la solution est simplement

$$\ell_j = \ell_j^o + n_j t, \quad (a_j, g_j, e_j, \theta_j, \iota_j) = \text{cst.}$$

Partant de là, par récurrence on peut calculer le développement de $\zeta(t)$ en puissances de ϵ , en substituant à chaque étape la solution approchée précédente dans le second membre de (7). On obtient ainsi une *série de perturbation*, dont on voit sur des exemples très simples l'inutilité quant aux propriétés des solutions sur de longues échelles de temps. Un exemple connu de d'Alembert est le suivant. Une solution de l'équation

$$\ddot{x} + (1 + \epsilon)x = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

est $x = \cos[(1 + \epsilon)t]$, mais, à cause du fait que la fréquence dépend de ϵ , son développement en puissances de ϵ en donne une très mauvaise idée :

$$x = \cos t - \epsilon t \sin t + O(\epsilon^2);$$

les termes comme $-\epsilon t \sin t$, dont l'amplitude croît avec le temps, sont qualifiés de *séculaires*, par opposition au terme périodique et de moyenne nulle $\cos t$.

5. A. Albouy objecte que les coordonnées polaires, par exemple, étaient utilisées longtemps avant. Un autre exemple, lui presque contemporain, est l'introduction par Euler des coordonnées elliptiques pour intégrer le problème des deux centres fixes [31].

Découverte de la nature hamiltonienne des équations. — La seconde contribution fondamentale de Lagrange à la méthode de la variation de la constante, ultérieure aux développements qui seront exposés dans la partie suivante, constitue les débuts de la géométrie symplectique locale. Lagrange et son étudiant Poisson écrivirent alternativement plusieurs mémoires [51, 52, 93, 94] présentant les équations des variations de la constante de façon de plus en plus générale et symétrique. Arago commenta ainsi les mémoires de 1807 et 1808 :

[...] Poisson avait vingt-sept ans lorsqu'il présenta ce magnifique travail à l'Académie. Vers la fin de 1808, un événement complètement inattendu jeta le monde scientifique dans une surprise enthousiaste. Lagrange se reposait depuis longtemps dans sa gloire. Il assistait assidûment à nos séances, mais sans y préférer un seul mot [...]. Tout à coup, Lagrange sort de sa léthargie, et son réveil est celui du lion. Le 17 août 1808, il lit au Bureau des longitudes, et le lundi suivant 22, à l'Académie des sciences, un des plus admirables Mémoires qu'ait jamais tracés la plume d'un mathématicien. Ce travail était intitulé : Mémoire sur la théorie des variations des éléments des planètes, et en particulier des variations des grands axes de leurs orbites. (F. Arago, *Œuvres complètes*, 1854, p. 654)

Nous nous contenterons d'en donner un aperçu assez global ; plusieurs auteurs ont étudié ces travaux plus en détails que nous ne le ferons ici [41, 70, 99].

Notons

$$\Omega = -\epsilon^2 \sum_{j < k} \frac{m_j m_k}{\|x_j - x_k\|}$$

le potentiel des forces gravitationnelles perturbatrices, dont ϵv_1 est le gradient relativement à la métrique des masses $\epsilon \sum_j m_j \sum_{k=1,2,3} (dx_j^k)^2$. Lagrange démontra d'abord que le champ de vecteurs $\dot{\zeta}$ calculé ci-dessous satisfait les équations

$$(8) \quad \sum_{1 \leq k \leq 6n} (\zeta_j, \zeta_k) \dot{\zeta}_j = \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta_j}, \quad (j = 1, \dots, 6n)$$

où (ζ_j, ζ_k) désigne la *parenthèses de Lagrange* de ζ_j et de ζ_k . Ces parenthèses s'interprètent maintenant comme les coefficients de la forme symplectique canonique $\omega = \sum_j m_j \sum_{k=1,2,3} dx_j^k \wedge d\dot{x}_j^k$ de l'espace des phases, dans les coordonnées $(\zeta_1, \dots, \zeta_{6n})$.⁽⁶⁾ Cette formule est donc la version en coordonnées de la formule par laquelle on définit aujourd'hui les champs hamiltoniens sur une variété symplectique, à savoir $i_\zeta \omega = d\Omega$. Dans la perspective où ces parenthèses furent introduites, la difficulté et le miracle furent de montrer que les parenthèses ne dépendent pas du temps, ou, de façon équivalente, que la forme symplectique est conservée. Le lien entre l'équation implicite de définition de $\dot{\zeta}$ et la conservation de la forme symplectique fut complètement clarifié seulement plus tard par Poincaré et É. Cartan dans leur étude de l'invariant intégral temps-énergie [10, 90].

Ultérieurement, Lagrange et Poisson mirent les équations (8) sous la forme explicite

$$(9) \quad \dot{\zeta}_j = \sum_{1 \leq k \leq 6n} \{\zeta_j, \zeta_k\} \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta_k},$$

6. Souriau défend l'idée que Lagrange considérait en fait une variante (non canoniquement) isomorphe de l'espace des phases, l'espace des mouvements. Mais ceci est secondaire pour notre propos.

où $\{\zeta_j, \zeta_k\}$ est le *crochet de Poisson* de ζ_j et ζ_k , à savoir une composante du tenseur de Poisson ω^{-1} .

Nous ne détaillerons pas les calculs sinieux par lesquels Lagrange et Poisson sont passés ; l'une des difficultés était que leur degré de généralité n'est apparu que progressivement. Tout cela fut clarifié dans la *Mécanique analytique* [53] de Lagrange, le mémoire de mécanique céleste de Cauchy présenté à l'Académie de Turin [11, 13] (où la formule de la moyenne pour les fonctions holomorphes est introduite au passage), et les articles de Hamilton [36, 37]. D'ailleurs, Lagrange ne tira pas lui-même directement partie de la conservation de la forme symplectique pour aller plus loin sur des questions de dynamique proprement dite : le point de vue géométrique de Poincaré, étudiant simultanément toutes les orbites de l'espace des phases, manquait encore.

3. Les deux théorèmes de stabilité de Lagrange et Laplace

Laplace et Lagrange sont à l'origine des premiers théorèmes de stabilité pour le système planétaire, que nous présentons après les considérations précédentes par pure commodité d'exposition. Ces théorèmes sont admirables et réussissent là où Newton, Euler ou d'Alembert avaient échoué. Ici encore, l'histoire des mémoires successifs présentés aux académies de Paris et de Berlin par les deux savants-concurrents est intriquée [45, 47, 48, 49, 50, 54, 55, 56], et l'on renvoie par exemple au séminaire Poincaré de J. Laskar [62] pour quelques détails sur la façon dont Laplace, impressionné par le mémoire de Lagrange de 1774, en écrivit rapidement un lui-même généralisant celui de Lagrange, et le fit publier trois ans avant celui de Lagrange !

Introduisons anachroniquement les coordonnées de Poincaré

$$\zeta = (\lambda_j, \Lambda_j, \xi_j, \eta_j, p_j, q_j)_{j=1, \dots, n} \in (\mathbb{T} \times \mathbb{R}^5)^n, \quad \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z},$$

qui sont symplectiques : $\omega = \sum_j d\lambda_j \wedge d\Lambda_j + d\xi_j \wedge d\eta_j + dp_j \wedge dq_j$ et analytiques dans un voisinage des mouvements keplériens horizontaux circulaires directs [21, 33, 92]. Peu importe ici leur définition précise ; nous aurons juste besoin de savoir que

$$\begin{cases} \lambda_j = \ell_j + g_j + \theta_j & (\text{longitude moyenne}) \\ \Lambda_j = m_j \sqrt{m_0} \sqrt{a_j} \\ \xi_j + i\eta_j \sim_{e_j \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\Lambda_j}{2}} e_j e^{i(g_j + \theta_j)} \\ p_j + iq_j \sim_{e_j, \iota_j \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\Lambda_j}{2}} \iota_j e^{i\theta_j}. \end{cases}$$

Suivons malicieusement Lagrange en notant H l'hamiltonien ("intégrale des forces vives") en l'honneur de Huygens⁽⁷⁾ :

$$H = H_0 + \epsilon H_1$$

où H_0 est l'hamiltonien de n problèmes de Kepler découplés :

$$H_0 = \sum_{1 \leq j \leq n} -\frac{m_0^2 m_j^3}{2\Lambda_j^2}.$$

7. Voir [53], Tome I, Seconde partie, sections première (pp. 248 ss) et troisième (pp. 326 ss).

Les équations de la dynamique prennent la forme classique des équations hamiltoniennes

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_j = \partial_{\Lambda_j} H, & \dot{\Lambda}_j = -\partial_{\lambda_j} H \\ \dot{\xi}_j = \partial_{\eta_j} H, & \dot{\eta}_j = -\partial_{\xi_j} H \\ \dot{p}_j = \partial_{q_j} H, & \dot{q}_j = -\partial_{p_j} H \end{cases}$$

(ce qui ne serait pas le cas avec certaines coordonnées non symplectiques utilisées par Lagrange). Par exemple, la troisième loi de Kepler se retrouve ici facilement, puisque les moyens mouvements valent

$$\nu_j = \dot{\lambda}_j \Big|_{\epsilon=0} = \frac{\partial H_0}{\partial \Lambda_j} = \frac{m_0^2 m_j^3}{\Lambda_j^3} = \frac{\sqrt{m_0}}{a_j^{3/2}}.$$

Le fait que la période ne dépende pas de l'excentricité découle du fait que H_0 ne dépend non trivialement que des Λ_j , alors que pour un potentiel $U(r)$ ni newtonien ($-1/r$) ni élastique (r^2) H_0 dépendrait de $2n$ actions. Cette dégénérescence dynamique fait du problème planétaire un problème de perturbation singulière : on ne peut pas espérer que les mouvements perturbés "quasipériodiques" aient seulement n fréquences indépendantes (en tenant compte de l'invariance par la symétrie de rotation, on peut se convaincre qu'ils devraient avoir $3n - 1$ fréquences, ce que le théorème d'Arnold confirmera).

Premier théorème de stabilité de Lagrange-Laplace. *En dehors des résonances keplériennes, au premier ordre en ϵ , les variations des grands demi-axes sont périodiques et de moyenne nulle.*

Précisons que le vecteur fréquence $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ est *résonnant* s'il existe un vecteur $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ tel que $k \cdot \nu = 0$. La théorie des perturbations se complique considérablement en présence de résonances. Dans le cas le plus simple où k a exactement deux composantes non nulles, la résonance signifie que les planètes vont régulièrement se retrouver dans les mêmes positions relatives, et que donc leur petite attraction mutuelle va, au fil des révolutions, s'accumuler.

Démonstration. — En notant $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ le vecteur des moyens mouvements, on a

$$\Lambda_j = \Lambda_j^o + \epsilon \int_0^t \frac{\partial H_1}{\partial \lambda_j} (\lambda^o + t\nu, \Lambda^o, \xi^o, \eta^o, p^o, q^o) dt + O(\epsilon^2).$$

En dehors des résonances, l'intégrande est périodique et de moyenne nulle par rapport aux λ_j , d'où le théorème. \square

En déduire que les grands demi-axes sont stables pour le système planétaire complet serait une erreur grave, que Laplace commit :

[...] [L]'altération du mouvement moyen de Jupiter, si elle existe, n'est point due à l'action de Saturne. [56]

La petite démonstration ci-dessus fait ressortir le rôle du *système moyenné* ou *séculaire*, obtenu à partir du système planétaire par moyennisation sur \mathbb{T}^n de l'hamiltonien par rapport aux angles rapides $\lambda_1, \dots, \lambda_n$:

$$\langle H \rangle = H_0 + \epsilon \int_{\mathbb{T}^n} H_1 d\lambda_1 \cdots d\lambda_n.$$

Elle consiste en effet à remarquer que, au premier ordre en ϵ et en dehors des résonances, la variation moyenne des Λ_j est donnée par l'hamiltonien moyenné.

L'hamiltonien moyenné ne dépendant pas des longitudes moyennes, les Λ_j sont constants pour $\langle H \rangle$, et peuvent être considérés comme des paramètres. Ainsi, $\langle H \rangle$ induit un hamiltonien sur l'espace des n -uplets d'ellipses keplériennes de grand demi-axe fixé. Ce dernier est l'*espace séculaire*, difféomorphe à \mathbb{R}^{4n} (compte tenu des restrictions faites antérieurement), et (ξ, η, p, q) en sont des coordonnées. La dynamique séculaire décrit la dynamique de la lente déformation des ellipses keplériennes sous l'effet des perturbations, par opposition à la dynamique rapide de révolution des planètes autour du Soleil.

L'origine $(\xi, \eta, p, q) = 0$ correspond aux n -uplets d'ellipses circulaires horizontales directes. Par symétrie, il est facile de se convaincre qu'elle est un point fixe du système séculaire. À une époque où l'algèbre linéaire n'existait pas encore, Laplace puis Lagrange dans le cas « général », calculèrent les valeurs propres du système séculaire linéarisé, et obtinrent le théorème retentissant suivant, montrant la stabilité linéaires des excentricités et des inclinaisons.

Second théorème de stabilité de Lagrange-Laplace. *L'origine de l'espace séculaire est un point fixe elliptique du système séculaire.*

En effet, il s'avère que l'hamiltonien moyenné possède le développement remarquable suivant :

$$\langle H_1 \rangle = C_0(m, a) + Q_h \cdot \xi^2 + Q_h \cdot \eta^2 + Q_v \cdot p^2 + Q_v \cdot q^2 + O(4),$$

où les formes quadratiques “horizontale” et “verticale” Q_h et Q_v sont de la forme

$$\begin{cases} Q_h \cdot \xi^2 &= \sum_{1 \leq j < k \leq n} m_j m_k \left(C_1(a_j, a_k) \left(\frac{\xi_j^2}{\Lambda_j} + \frac{\xi_k^2}{\Lambda_k} \right) + 2C_2(a_j, a_k) \frac{\xi_j \xi_k}{\sqrt{\Lambda_j \Lambda_k}} \right) \\ Q_v \cdot p^2 &= \sum_{1 \leq j < k \leq n} -m_j m_k C_1(a_j, a_k) \left(\frac{p_j}{\sqrt{\Lambda_j}} - \frac{p_k}{\sqrt{\Lambda_k}} \right)^2 ; \end{cases}$$

les coefficients C_j sont analytiques réels par rapport aux masses et aux grands demi-axes, et peuvent être exprimés en fonction des coefficients de Laplace.

Soient ρ_h et ρ_v des opérateurs orthogonaux de \mathbb{R}^n , diagonalisant Q_h et Q_v (dépendant analytiquement des masses et des grands demi-axes) :

$$\rho_h^* Q_h = \sum_j \sigma_j d\xi_j^2 \quad \text{and} \quad \rho_v^* Q_v = \sum_j \sigma_{n+j} dp_j^2.$$

Dans l'espace des phases séculaire complet, l'application

$$\rho : (\xi, \eta, p, q) \mapsto (\rho_h \cdot \xi, \rho_h \cdot \eta, \rho_v \cdot p, \rho_v \cdot q)$$

est symplectique et le problème est donc ramené à un hamiltonien de la forme

$$(10) \quad H_0(\Lambda) + \epsilon \sum_j (\sigma_j(\Lambda)(\xi_j^2 + \eta_j^2) + \sigma_{n+j}(\Lambda)(p_j^2 + q_j^2)) + \epsilon O_4(\xi, \eta, p, q) + O_2(\epsilon).$$

La partie principale est intégrable : quand on la considère sur l'espace des phases entier (non séculaire), elle est le produit gauche de n rotateurs (mouvements keplériens) et de $2n$ oscillateurs harmoniques découplés (dynamique séculaire), et ses courbes intégrales

sont quasipériodiques⁽⁸⁾ à $3n$ fréquences

$$\nu_1, \dots, \nu_n, \epsilon\sigma_1, \dots, \epsilon\sigma_n, \epsilon\sigma_{n+1}, \dots, \epsilon\sigma_{2n}.$$

À la vue de ces deux théorèmes, la stabilité du Système solaire parut acquise : les grands demi-axes, excentricités et inclinaisons ne subissent que de petites variations, sans dérive, et les ellipses keplériennes des planètes ne peuvent pas se croiser. Cependant, l'image obtenue de la dynamique du Système solaire est toute nouvelle : les ellipses keplériennes des planètes ne sont plus fixes, mais soumises à un double mouvement de précession dans leur propre plan (avec des périodes allant de quelques dizaines de milliers d'années à quelques millions d'années) et de précession des nœuds, c'est-à-dire de rotation des plans des ellipses dans l'espace.

Les fréquences séculaires σ_j calculées par Lagrange sont d'ailleurs étonnamment proches des valeurs admises aujourd'hui. On peut attribuer la petite erreur commise

- À l'incertitude des masses de Mercure et Vénus, qui ne possèdent pas de satellites permettant d'établir leur masse avec précision par la troisième loi de Kepler ; quant aux satellites de Mars, Phobos et Deimos, ils furent découverts plus tard.
- À l'approximation commise en négligeant les différents restes, dont Le Verrier, célèbre pour avoir découvert la planète Neptune par le calcul (en 1846, après Adams mais indépendamment de lui), examina l'effet.

Mieux, Le Verrier posa une question fondamentale nouvelle [59], celle de savoir

si, par la méthode des approximations successives, les intégrales se développent effectivement en séries assez convergentes pour qu'on puisse répondre de la stabilité du système solaire (Le Verrier, *Annales de l'Observatoire de Paris*, partie III de l'addition III, Paris, éd. Mallet Bachelet, 1856).

4. Les premiers signes d'instabilité

Séries de Lindstedt. — Considérons provisoirement un hamiltonien

$$H(\theta, r) = H_0(r) + \epsilon H_1(\theta, r) + \epsilon^2 H_2(\theta, r) + \dots,$$

sur $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n = \{(\theta, r)\}$ ($\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$), qui dépend analytiquement d'un petit paramètre ϵ et dont la valeur quand $\epsilon = 0$ est un hamiltonien intégrable $H_0(r)$. Poincaré a décrit la procédure générale pour éliminer formellement les angles θ de H , en dehors des résonances de H_0 , en construisant une conjugaison formelle ϕ [90, 66] ; c'est un changement de point de vue radical par rapport à celui se focalisant sur l'expression analytique d'une solution particulière donnée. Poincaré attribua la méthode à Lindstedt (qui avait construit les premiers termes) et la qualifia de *nouvelle*, par opposition aux *anciens* développements évoqués à la fin de la partie 2, utilisés pendant tout le XIXe siècle par Delaunay, Bohlin et d'autres (voir [28] par exemple).

Une conjugaison formelle ϕ peut être construite comme le temps 1 du flot d'un hamiltonien auxiliaire K ϵ -petit :

$$\phi = \exp X_K, \quad K = \epsilon K_1(\theta, r) + \epsilon^2 K_2(\theta, r) + \dots.$$

8. Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est *quasi-périodique* de vecteur fréquence $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_k)$ si elle se factorise par le flot linéaire de fréquence ω sur \mathbb{T}^k , i.e. s'il existe une fonction $F : \mathbb{T}^k = \mathbb{R}^k/2\pi\mathbb{Z}^k \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(t) = F(t\omega)$.

L'image réciproque formelle de H par ϕ est

$$H \circ \phi = H + X_K \cdot H + \frac{1}{2} X_K^2 \cdot H + \cdots,$$

où le champ de vecteurs hamiltonien X_K de K peut être vu comme un opérateur de dérivation ou, utilisant le fait que $X_{K_j} \cdot H_0 = -X_{H_0} \cdot K_j$ (= le crochet de Poisson K_j et de H_0),

$$H \circ \phi = H_0 + \epsilon (H_1 - X_{H_0} \cdot K_1) + \epsilon^2 \left(H_2 + X_{K_1} \cdot H_1 + \frac{1}{2} X_{K_1}^2 \cdot H_0 - X_{H_0} \cdot K_2 \right) + \cdots.$$

On voudrait trouver successivement K_1, K_2, \dots , tels que chaque terme de $H \circ \phi$ de degré donné ≥ 1 en ϵ ne dépende pas de θ . On obtient un système infini triangulaire d'équations aux dérivées partielles linéaires sur \mathbb{T}^n , paramétré par les actions r :

$$\begin{aligned} X_{H_0} \cdot K_1 &= \{H_1\} := H_1 - \int_{\mathbb{T}^n} H_1 d\theta \\ X_{H_0} \cdot K_2 &= \left\{ H_2 + X_{K_1} \cdot H_1 + \frac{1}{2} X_{K_1}^2 \cdot H_0 \right\} \\ &\dots \end{aligned}$$

où $X_{H_0} = \alpha \cdot \partial_\theta$, avec $\alpha := (\partial_{r_1} H_0, \dots, \partial_{r_n} H_0)$. En développant en séries de Fourier, on voit que la première équation possède une solution formelle en dehors des résonances $k \cdot \alpha = 0$, $k \in \mathbb{Z}^n$ (rappelons que α dépend des actions). Choisissons par exemple la solution de moyenne nulle :

$$K_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \frac{\hat{H}_1^k}{i k \cdot \alpha} e^{ik \cdot \theta}, \quad H_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{H}_1^k e^{ik \cdot \theta}.$$

Les *petits dénominateurs* $k \cdot \alpha$ peuvent empêcher la série de Fourier de $K_1(r)$ de converger. Intuitivement, ceci signifie que, près des résonances, l'effet déstabilisant de la perturbation, au lieu de s'annuler en moyenne, s'accumule. En dehors des résonances, les coefficients de Fourier de K_1 sont bien définis. Alors la seconde équation peut être résolue de façon analogue. Mais comme le membre de droite est maintenant une série de Fourier formelle, K_2 est une série de Fourier formelle dont les coefficients eux-mêmes sont des séries de Fourier formelles, etc.

Pour éviter ces problèmes de convergence, dans la construction d'un nombre fini de termes de la série de Lindstedt, on peut tronquer les séries de Fourier à un certain ordre assez élevé qui tend vers l'infini quand ϵ tend vers zéro, au prix de perdre l'analyticité du développement par rapport à ϵ . Une façon de rendre rigoureuse toute la construction des séries de Lindstedt est de se restreindre d'abord aux vecteurs fréquences diophantiens :

$$|k \cdot \alpha| \geq \gamma \|k\|^{-\tau}$$

pour des constantes $\gamma, \tau > 0$ indépendantes de $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, puis de construire le jet infini des séries le long de l'ensemble (transversalement) de Cantor des fréquences diophantiennes, en dérivant formellement les équations dans les directions transverses. Les coefficients ainsi obtenus se prolongent à tout l'espace des phases, comme un théorème de Whitney le montre [16].

Les *séries de von Zeipel* généralisent celles de Lindstedt au cas où l'hamiltonien non perturbé H_0 ne dépend pas de toutes les variables d'action. C'est le cas du problème planétaire puisque, comme on l'a vu, H_0 ne dépend, parmi les coordonnées de Poincaré, que des Λ_j .

La question suivante est celle de la convergence de ces séries de perturbation formelles $H \circ \phi$, et de celle de la conjugaison formelle ϕ elle-même (bien sûr, la convergence de ϕ implique celle de $H \circ \phi$). La réponse n'est pas directe. Des exemples où la conjugaison diverge apparaissent dans certaines constructions d'Anosov-Katok [1]. Voici un exemple simple [4]. Sur $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2 = \{(\theta, r)\}$, considérons l'hamiltonien

$$H = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \epsilon \left(r_1 + \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} a_k \sin(k \cdot \theta) \right),$$

où $a_k = \exp(-\|k\|)$ et α est diophantien. L'angle θ tourne à la fréquence constante $\alpha_\epsilon = (\alpha_1 + \epsilon, \alpha_2) : \theta(t) = \theta(0) + t\alpha_\epsilon$. Il existe des valeurs arbitrairement petites de ϵ telles que α_ϵ soit résonnant : $(\alpha_1 + \epsilon)/\alpha_2 = p/q \in \mathbb{Q}$. Alors on a

$$\dot{r}_j = -\epsilon \sum_k k_j a_k \cos(k \cdot \theta), \quad j = 1, 2.$$

Les termes tels que $k \cdot \alpha_\epsilon \neq 0$ sont de moyenne nulle. Mais d'autres, précisément ceux pour lesquels k est de la forme $k = \kappa(-q, p)$ pour $\kappa \in \mathbb{Z}$ ont une contribution constante généralement non nulle, de sorte que r tend vers l'infini. D'un autre côté, si les séries de Lindstedt et la conjugaison correspondante convergent, l'action r ne subit que des oscillations bornées. Donc la conjugaison ici diverge. (Le fait que la série de Lindstedt elle-même diverge, ici, ne se déduit pas directement de cet argument.)

Les exemples ci-dessus ne sont pas génériques, parce qu'ils sont des perturbations d'hamiltoniens dégénérés. Mais Poincaré démontra que la divergence est générique [90, Chap. XIII]. Son argument est schématiquement le suivant. Si une conjugaison de Lindstedt converge pour une certaine action r , le tore $\mathbb{T}^n \times \{r\}$ est invariant et quasipériodique pour $H \circ \phi$. Sa fréquence est $\alpha_\epsilon(r) = \partial_r(H \circ \phi)(r) = \partial_r H_0 + \dots$. La fréquence non perturbée $\alpha_0(r)$ était choisie non résonnante, mais, pour $\epsilon > 0$ arbitrairement petit, la fréquence perturbée α_ϵ sera résonnante. En conséquence, le tore invariant est feuilleté en tores invariants de dimension inférieure. Or, un tel tore invariant résonnant n'est pas générique. Donc, génériquement, les séries de Lindstedt divergent. Poincaré montra aussi que les conjugaisons de Lindstedt du problème des trois corps divergent généralement.

Mais Poincaré ne pouvait exclure la possibilité que les séries et conjugaisons de Lindstedt convergent parfois, non uniformément (les notations dans la citation ne sont pas les notations originales) :

Nous avons reconnu que les équations canoniques [...] peuvent être satisfaites formellement par des séries de la forme

$$\begin{cases} \theta_i = \theta_i^0 + \epsilon \theta_i^1 + \epsilon^2 \theta_i^2 + \dots, \\ r_i = r_i^0 + \epsilon r_i^1 + \epsilon^2 r_i^2 + \dots, \end{cases}$$

où les θ_i^k et les r_i^k sont des fonctions périodiques des quantités

$$w_i = \alpha_i t + \varpi_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

[de quoi] nous avons tiré

$$r_i^k = \sum \frac{B \sin(k_1 w_1 + k_2 w_2 + \dots + k_n w_n + h)}{k_1 \alpha_1^0 + k_2 \alpha_2^0 + \dots + k_n \alpha_n^0} + A_0.$$

[Cette] série converge-t-elle absolument et uniformément ? [...] deux degrés de liberté, les séries ne pourraient-elles pas, par exemple, converger

quand r_1^0 et r_2^0 ont été choisis de telle sorte que le rapport $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ soit incommensurable, et que son carré soit au contraire commensurable (ou quand le rapport $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ est assujéti à une autre condition analogue à celle que je viens d'énoncer un peu au hasard) ? [90, §§ 146–149]

Envisageant les conséquences déraisonnables d'une convergence uniforme, en termes d'existence d'orbites périodiques aux résonances, il spécula :

Les raisonnements de ce Chapitre ne permettent pas d'affirmer que ce fait ne se présentera pas. Tout ce qu'il m'est permis de dire, c'est qu'il est fort invraisemblable. [*ibid.*]

Hill et Weierstrass doutaient des arguments de Poincaré contre la convergence des séries de Lindstedt [5, 40], malgré leur propre échec à démontrer la convergence. La théorie KAM, dans la seconde moitié du XXe siècle, leur donnera raison.

Non-existence d'intégrales premières supplémentaires. — Un autre critère de régularité dynamique concerne l'existence d'intégrales premières. Les intégrales premières sont autant de contraintes qui circonscrivent les solutions, et même, si ces intégrales sont en nombre suffisant, les équations du mouvement s'intègrent par quadrature (calcul d'intégrale) et élimination (application du théorème d'inversion locale).

Dans le problème des trois corps, Bruns démontra la non-existence d'intégrales premières qui sont algébriques par rapport aux positions x_j et aux impulsions $m_j \dot{x}_j$, mis à part les intégrales premières classiques [9, 42]. Le résultat est vrai pour tout choix de masses, et Painlevé suggéra plus tard qu'il est suffisant de supposer que l'intégrale est algébrique par rapport aux impulsions [87].

Poincaré, lui, démontra que, dans le problème des trois corps, il n'existe aucune nouvelle intégrale première qui soit analytique par rapport aux éléments elliptiques et aux petites masses (il suffit même de chercher une intégrale première admettant un développement formel en les masses, avec des coefficients analytiques) [90, Volume II] : “Le problème [...] n'admet pas d'autre intégrale uniforme que celles des forces vives et des aires” [90, Chap. v, § 85]. La stratégie de démonstration de Poincaré est la suivante. Soit F une intégrale première de l'hamiltonien H du problème planétaire. En développant l'équation $\{H, F\} = 0$ par rapport au petit paramètre ϵ , puis développant les coefficients eux-mêmes en séries de Fourier, Poincaré montre que beaucoup de coefficients de Fourier de F doivent s'annuler à certaines résonances bien choisies. L'une des difficultés est la dégénérescence propre de H , dont la limite quand ϵ tend vers 0 ne dépend pas de toutes les variables d'action.

Plus récemment, la non-existence d'intégrales méromorphes supplémentaires dans le voisinage bien choisi de solutions périodiques particulières a été démontrée en étudiant le groupe de monodromie de l'équation aux variations de ces solutions ; voir [43, 102] par exemple. La méthode a été appliquée avec succès à la solution parabolique de Lagrange du problème des trois corps [100], en utilisant les théories de Ziglin et de Morales-Ramis, à masses fixes. Certains raffinements ont conduit à la théorie de Galois différentielle [75, 76], le groupe de Galois étant une extension du groupe de monodromie. Combot a généralisé les résultats existants pour la mécanique céleste de façon significative [23, 24, 26], et les équations aux variations d'ordre supérieur semblent donner des informations supplémentaires dans les cas indéterminés [25, 26, 78, 77, 71]. La principale limitation de la méthode est qu'elle est locale au voisinage d'une solution et

que *a priori* il pourrait exister une intégrale première supplémentaire dans un domaine de l'espace des phases qui serait borné par une frontière naturelle.

Divergence des série de Bohlin. — Poincaré découvrit aussi l'écart des solutions séparatrices d'un point d'équilibre hyperbolique, et l'enchevêtrement qui en résulte (l'histoire intéressante de son erreur initiale, dans son mémoire qui lui a valu le prix du roi Oscar II de Suède [89], qui l'a ultérieurement conduit à sa découverte, est racontée par exemple dans [5, 6]) :

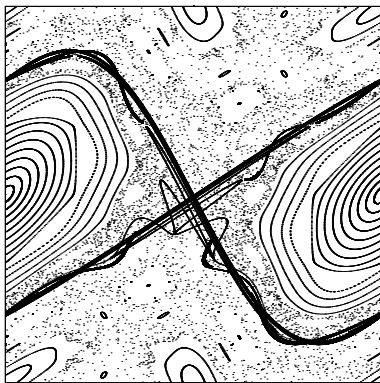
On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer. Rien n'est plus propre à nous donner une idée de la complication du problème des trois corps et en général de tous les problèmes de Dynamique où il n'y a pas d'intégrale uniforme et où les séries de Bohlin sont divergentes.

[...] Cette remarque est de nature à nous faire comprendre [...] combien les transcendentes qu'il faudrait imaginer pour résoudre [le problème des trois corps] diffèrent de toutes celles que nous connaissons. [90, §§ 397–398]

La figure ci-dessous donne une idée de ce que Poincaré n'osait pas dessiner, dans le cas de l'application standard

$$\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2, \quad (x, y) \mapsto (x + y', y + \epsilon \sin x) \quad (\text{ici avec } \epsilon = 0.3)$$

introduite par Chirikov [22, 65] comme modèle universel des couches chaotiques au voisinage d'une séparatrice d'une application twist de l'anneau. En deux dimensions, ce type de non-intégrabilité dynamique implique la non-existence d'intégrales premières supplémentaires [79].



Mais Lagrange étant mort 99 ans avant Poincaré, nous nous permettrons de renvoyer aux recensions beaucoup plus complètes des travaux de Poincaré qui ont été faites en 2012, et notamment le séminaire de Chenciner [18].

Mentionnons que le début du xx^e siècle vit l'avènement de la Relativité Générale d'Einstein, qui expliqua certains faits tels que l'avance du périhélie de Mercure. La dynamique classique s'avéra donc un cas limite, déjà inextricablement compliqué en même temps que beaucoup plus simple que les équations d'Einstein.

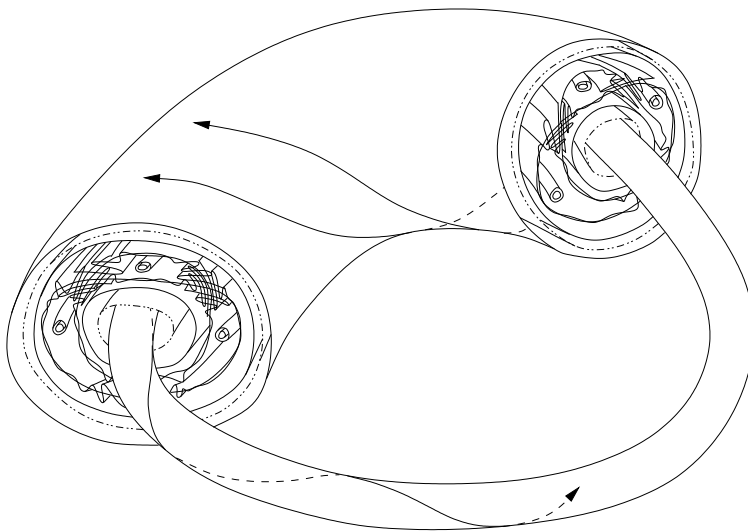
5. Les théorèmes d'Arnold et de Nekhoroshev

À la moitié du XX^e siècle, Kolmogorov fit une avancée prodigieuse en démontrant que les séries de perturbation pour un tore invariant de fréquence fixée convergent, bien que non uniformément, si l'on suppose que la fréquence est diophantienne et qu'une condition de non-dégénérescence adéquate est vérifiée. Kolmogorov utilisa l'algorithme de Newton en dimension infinie et trouva les solutions quasipériodiques correspondantes par passage à la limite. La convergence rapide de l'algorithme bat l'effet des résonances, et ceci est l'une des idées principales à la base de la théorie de Kolmogorov-Arnold-Moser ; voir [3, 8, 20, 88, 95, 97] pour plus de détails et des références.

L'hypothèse de non-dégénérescence requise pour appliquer le théorème de Kolmogorov n'est pas satisfaite dans le cas du problème planétaire, pour plusieurs "raisons", la première et la plus incontournable étant la dégénérescence propre du potentiel newtonien (le fait déjà mentionné que, dans le problème des deux corps, toutes les orbites bornées sont périodiques alors que génériquement elles seraient quasipériodiques à deux fréquences). En 1963, Arnold prouva une version abstraite du théorème de Kolmogorov destinée aux cas dégénérés tels que le problème planétaire et publia le résultat remarquable suivant [2].

Théorème d'Arnold. *Quelles que soient les masses $m_0, m_1, \dots, m_n > 0$ et quels que soient les grands demi-axes $0 < a_1 < \dots < a_n$, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $0 < \epsilon < \epsilon_0$, dans l'espace des phases au voisinage des mouvements keplériens circulaires et coplanaires de grands demi-axes a_1, \dots, a_n , il existe un sous-ensemble de mesure de Lebesgue strictement positive de conditions initiales conduisant à des mouvements quasipériodiques à $3n - 1$ fréquences.*

Les solutions décrites par ce théorème sont donc bornées, sans collision ni éjection, et l'ensemble des telles solutions voit sa densité tendre vers 1 quand ϵ tend vers 0. Mais cela n'empêche pas que, si $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$ est fixé, les tores invariants coexistent avec un ensemble de mesure de Lebesgue strictement positive des solutions beaucoup moins régulières. Nous renvoyons au séminaire de Chenciner [18] pour des explications sur cette figure :



La démonstration d’Arnold était complète uniquement pour $n = 2$ planètes dans le plan. Le théorème fut démontré pour deux planètes dans l’espace par Robutel [96]. Pour plus de deux planètes, la réduction par la symétrie de rotation est moins explicite et Herman remarqua une résonance mystérieuse : la trace

$$\sigma_1 + \cdots + \sigma_{2n} = 0$$

des fréquences séculaires est nulle. Herman surmonta cette difficulté et décrivit une démonstration complète et plus conceptuelle dans une série d’exposés [32] ; voir aussi [21]. Pour éviter le calcul de la torsion de l’hamiltonien planétaire (déterminant de la matrice des termes d’ordre 4 non écrits dans l’expression (10)), Herman utilisa une condition de non-dégénérescence due à Arnold et Pyartli, qui nous ramène à vérifier que l’image de l’analogie de l’application fréquence séculaire

$$\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_n) \mapsto (\sigma_1(\Lambda), \dots, \sigma_{2n}(\Lambda))$$

après réduction par la symétrie de rotation n’est contenue dans aucun hyperplan vectoriel. Un théorème de la théorie des approximations diophantiennes permet alors de voir que la fréquence est diophantienne pour un ensemble de valeurs de Λ de mesure de Lebesgue strictement positive, ce dont le théorème d’Arnold découle.

Cependant, les difficultés pour “appliquer” le théorème d’Arnold au problème planétaire sont patentées. Une première est que la petitesse requise pour les masses n’est pas réaliste. Hénon calcula qu’avec la démonstration d’Arnold, il faudrait que la masse de Jupiter rapportée à celle du Soleil soit de l’ordre de 10^{-300} [38] ! En revanche, Robutel a montré numériquement que certaines parties du Système solaire, en particulier le système Soleil-Jupiter-Saturne, ont une dynamique quasipériodique [58, 96]. Aussi, Celletti-Chierchia [14, 15] et Locatelli-Giorgilli [67] ont montré des versions quantitatives du théorème KAM, qu’ils ont appliquées aux systèmes Soleil-Jupiter-astéroïde Victoria et Soleil-Jupiter-Saturne ; ces applications sont assistées par ordinateurs, et requièrent dans le second cas la manipulation de séries de dix millions de termes. Que les mouvements bornés forment un ensemble de mesure de Lebesgue strictement positive pour tous les ϵ (et pas seulement pour $\epsilon \ll 1$) reste une question complètement ouverte.

Un autre point de mécontentement pour appliquer la théorie KAM en astronomie est que l’ensemble des tores invariants trouvés est (transversalement) un ensemble de Cantor (paramétré par les fréquences diophantiennes), topologiquement maigre. Étant donné l’approximation faite en passant du Système solaire réel au problème planétaire newtonien, la question de savoir si les moyens mouvements et les fréquences séculaires des planètes sont diophantiens n’est pas pertinente. Ainsi, la conclusion directe du théorème d’Arnold, sur un intervalle de temps infini, est illusoire en astronomie. Pourtant, la théorie KAM est devenue un outil fondamental en dynamique conservative. Pour paraphraser Poincaré, qui avait tant insisté sur l’importance des orbites périodiques, les orbites quasipériodiques elles aussi font maintenant partie de la brèche par laquelle on peut s’attaquer au problème planétaire.

Un théorème parent et plus réaliste est le théorème de Nekhoroshev [80], qui affirme que les mouvements au voisinage d’une solution KAM quasipériodique sont stables sur un temps exponentiellement long par rapport à ϵ . En appliquant un théorème de ce type, Niederman a montré la stabilité d’un système solaire à deux planètes avec des masses planétaires pas tout à fait égales aux masses réelles, mais nettement plus réalistes [86]. On pourrait encore citer la théorie des invariants adiabatiques de Neishtadt, qui fournit une description statistique du comportement des trajectoires [81, 82].

6. Instabilité globale

Les calculs numériques de Laskar. — À partir des années 1980, l'avènement des ordinateurs a permis d'explorer la dynamique du Système solaire réel (et non plus du Système solaire épuré des mathématiciens), avec le Soleil, les planètes, la Lune (tous les corps étant réduits à des points matériels, sauf dans le cas du sous-système Terre-Lune) et les effets de la relativité générale. Cela ne s'est cependant pas fait simplement. Jusqu'en 1991, la seule intégration numérique directe d'un modèle réaliste de l'ensemble du Système solaire était celle de Newhall, calculée sur seulement 44 siècles [83]; le pas d'intégration ne peut guère dépasser 1/2 jour si l'on inclut les planètes intérieures.

Dans les années 1980, Laskar a remplacé les équations de Newton par une forme normale formelle de 150 000 termes, une sorte de système séculaire au deuxième ordre des masses et au cinquième ordre des excentricités et inclinaisons. Ce système ne décrit pas le rapide mouvement de révolution keplérienne des planètes, mais seulement la lente évolution des ellipses, en tenant compte des nombreuses résonances du Système solaire. En quelques heures de calcul, il peut être intégré avec un pas de temps très grand, de l'ordre de 500 ans, sur plus de 200 millions d'années. La surprise de ce calcul a été que le Système solaire interne (Mercure, Vénus, Terre et Mars) est chaotique, avec un temps de Lyapunov de 5 millions d'années [57] : une différence de 15 mètres dans la position initiale de la Terre conduit à une différence de 1500 mètres après 10 millions d'années, et de 150 millions de kilomètres (soit la distance Terre-Soleil actuelle) après 100 millions d'années ! Il devient donc pratiquement impossible de prédire le mouvement des planètes au-delà de 100 millions d'années — et les progrès de l'informatique ne permettront pas de dépasser cette limite à court ou moyen terme. Ces résultats ont été confirmés par des intégrations directes dès que la puissance de calcul des ordinateurs l'a permis.

Par ailleurs, pour comprendre l'effet des différentes résonances, Laskar a développé la méthode de l'*analyse en fréquence*, qui est aujourd'hui utilisée aussi bien pour calibrer les électro-aimants des accélérateurs de particules qu'en paléoclimatologie. Dans le Système solaire, par exemple la résonance séculaire

$$2(\dot{g}_T - \dot{g}_M) - (\dot{\theta}_T - \dot{\theta}_M) \simeq 0$$

entre les fréquences de précession des périhélies de la Terre et de Mars et les fréquences de rotation de leur ligne des nœuds est en partie responsable du comportement chaotique observé, en créant des transitions compliquées entre différents modes d'énergie [61].

Mais que dire du mouvement des planètes sur des temps comparables à la durée de vie du Système solaire ?⁽⁹⁾ Là encore, pour dépasser la limite infranchissable évoquée plus haut, la démarche de Laskar est issue de la théorie qualitative des systèmes dynamiques. Elle consiste à calculer des *pseudo-orbites*, de la façon suivante. Laskar intègre numériquement le système séculaire pendant 500 millions d'années [60], à partir de 5 données initiales toutes situées à l'intérieur de la boule d'incertitude de l'état actuel du Système solaire (la position de la Terre variant d'une dizaine de mètres d'une condition initiale à l'autre). Des 5 simulations, Laskar ne garde que celle pour laquelle l'excentricité de Mercure est la plus grande. Puis il recommence avec 5 conditions initiales voisines du point d'arrivée. En répétant cette opération une dizaine de fois, il réussit à observer des rencontres proches

9. À cause des processus physiques dans le Soleil, dans 4 milliards d'années les conditions climatiques sur Terre ressembleront à celles sur Vénus actuellement, et dans 6 ou 7 milliards d'années le Soleil deviendra une géante rouge.

entre Mercure et Vénus, qui se soldent soit par une collision entre les deux planètes soit par l'éjection de Mercure du Système solaire ; avec une probabilité seulement un peu plus faible, Vénus, Terre et Mars sont aussi sujettes aux collisions et aux éjections !

La pertinence de telles pseudo-orbites n'est pas justifiée rigoureusement. Mais elle repose sur l'idée du shadowing lemma (lemme de "pistage") qui affirme, en dynamique hyperbolique, qu'une pseudo-orbite est approchée par de vraies orbites. La théorie variationnelle de Mather en donne d'ailleurs un analogue affaibli dans des situations beaucoup plus générales. En outre, Laskar a récemment vérifié ces résultats par un calcul direct, avec les équations complètes [63].

Un exemple d'instabilité. — Les mécanismes mathématiques d'instabilité ont été l'objet de recherches intenses depuis une trentaine d'années, tant abstraitement avec la théorie de Mather et la théorie KAM faible [7, 19, 29, 69, 72, 74] que dans différents exemples, et dans le problème des N corps en particulier [35, 73, 79, 98].

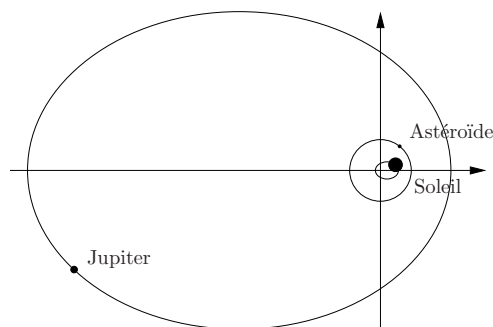
Dans un article célèbre [3], Arnold proposa un mécanisme d'instabilité via des "chaînes de transition", sur un exemple aussi lumineux que particulier. Il commenta :

Par opposition à la stabilité, l'instabilité est elle-même stable. Je crois que le mécanisme de "chaîne de transition" qui garantit cette instabilité dans notre exemple est aussi présente dans le cas général (par exemple, dans le problème des trois corps).

Cette fois encore, Arnold fut visionnaire. Nous terminerons cet exposé en décrivant un travail récent ayant pour objectif de répondre positivement à la conjecture d'Arnold, dans une petite sous-partie du Système solaire [34].

La Ceinture d'astéroïdes est une zone située entre Mars et Jupiter où, pour différentes raisons, la matière ne s'est pas accrétée pour former une nouvelle planète. Le résultat est qu'il y subsiste un grand nombre d'objets, allant de particules de poussière à des astéroïdes de quelques centaines de kilomètres de diamètre. En 1857, l'astronome américain Kirkwood découvrit que la densité de distribution des astéroïdes en fonction de leur grand demi-axe possède des lacunes, et que les plus importantes de ces lacunes correspondent exactement aux résonances en moyens mouvements avec Jupiter, c'est-à-dire à des astéroïdes qui, après un certain nombre entier de révolutions, retrouveraient Jupiter dans la même position relative. Le mécanisme conjectural est que, sous l'effet d'une telle résonance, l'excentricité de l'astéroïde peut augmenter de façon importante, jusqu'à ce qu'il subisse des rencontres proches avec Mars, qui le perturberont fortement et rapidement, de sorte que l'astéroïde sortira probablement de sa résonance. La partie mathématiquement difficile consiste à comprendre pourquoi, sous l'effet de Jupiter, l'excentricité de l'astéroïde varie. C'est ce phénomène qui s'apparente à de la *diffusion d'Arnold*, que nous allons justifier, grâce à une généralisation d'un mécanisme de Mather.

Un bon modèle pour étudier ce phénomène est le problème restreint elliptique des trois corps : deux primaires (le Soleil et Jupiter) gravitent le long d'une ellipse keplérienne fixe (dont les éléments porteront l'indice 0), tandis qu'un troisième corps de masse nulle (l'astéroïde) subit l'attraction conjointe des deux primaires sans, en retour, perturber leur propre mouvement.



Les deux primaires décrivent donc des ellipses homothétiques, disons $-\mu x_0$ pour le Soleil et $(1-\mu)x_0$ pour Jupiter, si l'on note $x_0(t)$ un mouvement keplérien normalisé de grand demi-axe unité, et μ la masse de Jupiter dans des unités où la masse totale du Soleil et de Jupiter vaut 1. L'hamiltonien de l'astéroïde (dont on note $q \in \mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{C}$ la position et l'impulsion) s'écrit

$$H = \frac{|p|^2}{2} - \frac{1}{|q|} + \left(\frac{1}{|q|} - \frac{1-\mu}{|q + \mu q_0(t)|} - \frac{\mu}{|q - (1-\mu)q_0(t)|} \right).$$

Ce problème à 2,5 degrés de liberté (2 parce que $q \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, et 0,5 parce que l'hamiltonien dépend du temps) possède trois petits paramètres :

- la masse μ de Jupiter
- le grand demi-axe a de l'astéroïde
- l'excentricité e_0 des primaires.

Quand μ ou a tendent vers 0, à la limite l'astéroïde ne ressent plus que l'attraction du Soleil, et les équations dégénèrent en celles d'un problème de Kepler.

En revanche, la limite où e_0 tend vers 0 est un marche-pied qui gagne à être analysé. D'abord, elle a 2 degrés de liberté : quand le mouvement des primaires est circulaire, en se plaçant dans un repère tournant on rend l'hamiltonien indépendant du temps, ce qui fait chuter le nombre de degrés de liberté d'une demi unité. Cette limite n'est pas intégrable, mais de "grandes" instabilités n'y sont pas pour autant possibles, parce que les tores KAM, lagrangiens donc de dimension 2, séparent les niveaux d'énergie de dimension 3. Donc, même les solutions qui ne vivent pas sur un tore KAM sont confinées dans une région bordée par les tores KAM.

Dans la suite, nous supposons $\mu = 1/1000$ (une valeur réaliste pour la masse de Jupiter) et $a \simeq (1/3)^{2/3}$ (ce qui correspond à la résonance 1 : 3 en moyens mouvements avec Jupiter, la principale de la Ceinture d'astéroïdes : l'astéroïde fait environ trois révolutions quand Jupiter en fait une). Au voisinage de la résonance 1 : 3, certaines harmoniques en

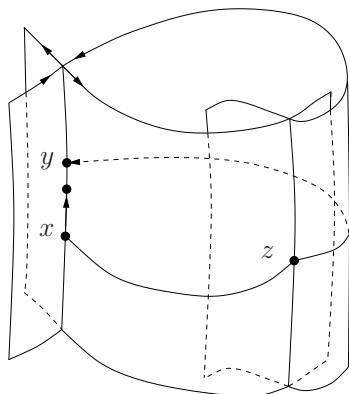
$$\cos [k(\lambda - 3\lambda_0 + \text{cst})], \quad k \in \mathbb{N},$$

ne peuvent pas être éliminées de H par moyennisation. Il se trouve que l'hamiltonien pour $e_0 = 0$ est une fonction générique au sens approximatif suivant (vérifié numériquement) :

- Au voisinage de la résonance, il possède un maximum non dégénéré par rapport à l'angle $\varphi = \lambda - 3\lambda_0$, qui correspond à un point fixe hyperbolique du système moyenné par rapport à λ , soit un cylindre normalement hyperbolique du système complet, sur lequel on peut choisir comme coordonnées l'excentricité $e \in [e_1, e_2]$ de l'astéroïde et

l'argument g du périhélie de l'astéroïde. Il faut encore ajouter une dimension à ce cylindre si l'on inclut le temps.

- Les variétés stable et instable de ce cylindre hyperbolique se rencontrent transversalement le long d'un cylindre de même dimension (quitte à réduire l'intervalle $[e_1, e_2]$). Le cylindre C étant normalement hyperbolique, il persiste à une petite perturbation faisant passer les corps primaires d'une orbite circulaire à une orbite légèrement excentrique, et faisant passer du système moyenné au vrai système. L'idée dynamique centrale est qu'on peut associer deux dynamiques à C :
- La restriction du flot à C . C'est la dynamique *interne*, qu'on peut ramener à une transformation de C en considérant l'application de retour à une surface de section telle que $g = 0 \pmod{2\pi}$.
- Une dynamique *externe* obtenue par le procédé limite suivant : un point $x \in C$ est envoyé sur $y \in C$ s'il existe un point z appartenant à l'intersection (dont on fixe une composante connexe) des variétés instable de x et stable de y . (Sous des conditions générales ici vérifiées les points y et z existent et sont uniques.) Autrement dit, on peut passer de x à y approximativement en partant très près de x et de sa variété instable, et en se laissant porter par le flot naturel jusqu'à revenir très près de C , presque asymptotiquement à y ; tout cela doit être quantifié pour avoir un sens précis. Sur la figure suivante, le cylindre normalement hyperbolique est représenté symboliquement par une courbe presque verticale, à gauche.



Le gros du travail consiste alors à montrer que les deux dynamiques interne et externe ne possèdent pas de courbes invariantes communes ; ceci repose sur une analyse précise de leur forme normale. On peut alors conclure en montrant que :

- en itérant les dynamiques interne et externe aléatoirement, on peut effectivement dériver le long du cylindre (autrement dit, le fait qu'il y ait une courbe invariante commune était la seule obstruction possible à l'instabilité [64, 74, 68]) ;
- une telle poly-orbite aléatoire peut être réalisée de façon approchée par une véritable orbite, en réglant les conditions initiales de façon à tantôt longer le cylindre, et tantôt réaliser une longue excursion le long de ses variétés invariantes pour éventuellement traverser une courbe invariante de la dynamique interne.

On obtient ainsi des solutions le long desquelles l'excentricité de l'astéroïde dérive de e_1 jusqu'à e_2 (deux valeurs données), tandis que l'excentricité des corps primaires est arbitrairement petite.

Plus radicalement, la conjecture est que, en restriction à tout niveau d'énergie du problème des N corps, l'ensemble non-errant⁽¹⁰⁾ est rare⁽¹¹⁾ (après avoir éventuellement reparamétrisé les orbites pour rendre le flot complet) [39]. La 300e commémoration de la mort de Lagrange verra-t-elle des idées pour le démontrer ?

Merci à Alain Albouy, Alain Chenciner, Jacques Laskar, Rick Moeckel, Pierre Pansu et Philippe Robutel pour leurs discussions et leur relecture. Merci à François Lassner de m'avoir signalé plusieurs erreurs.

Références

- [1] D. V. Anosov et A. B. Katok. New examples in smooth ergodic theory. Ergodic diffeomorphisms. *Trudy Moskov. Mat. Obšč.*, 23 :3–36, 1970.
- [2] V. I. Arnold. Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics. *Uspehi Mat. Nauk*, 18(6 (114)) :91–192, 1963.
- [3] V. I. Arnold. Instability of dynamical systems with many degrees of freedom. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 156 :9–12, 1964.
- [4] V. I. Arnold, V. V. Kozlov, et A. I. Neishtadt. *Mathematical aspects of classical and celestial mechanics*, volume 3 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2006. Translated from the Russian original by E. Khukhro.
- [5] J. Barrow-Green. *Poincaré and the three body problem*, volume 11 of *History of mathematics*. American mathematical society and London Mathematical Society, 1997.
- [6] F. Béguin. *L'héritage scientifique de Poincaré*, chapitre Le mémoire de Poincaré pour le prix du roi Oscar. Belin, 2006.
- [7] P. Bernard. The dynamics of pseudographs in convex Hamiltonian systems. *J. Amer. Math. Soc.*, 21(3) :615–669, 2008.
- [8] J.-B. Bost. Tores invariants des systèmes dynamiques hamiltoniens (d'après Kolmogorov, Arnold, Moser, Rüssmann, Zehnder, Herman, Pöschel, . . .). *Astérisque*, 1984/85(133-134) :113–157, 1986. Séminaire Bourbaki.
- [9] E. H. Bruns. Über die Integrale des Vielekörperproblems. *Acta mathematica*, 11 :25–96, 1887.
- [10] É. Cartan. *Leçons sur les invariants intégraux*. Hermann (Paris), 1922.
- [11] A. Cauchy. Extrait du Mémoire présenté à l'Académie de Turin (sans titre), October 11, 1831. <http://www.accademiadelle scienze.it/TecaViewer/index.jsp?RisIdr=TECA0000014562&keywords=Cauchy>.
- [12] A. Cauchy. Sur la mécanique céleste et sur un nouveau calcul qui s'applique à un grand nombre de questions diverses. Mémoire présenté à l'Académie de Turin le 11 octobre, 1831. Œuvres complètes, série II, tome 15.
- [13] A. Cauchy. Sur la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de Mécanique. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, pages 406–412, 1837. Extrait d'un Mémoire sur la Mécanique céleste présenté à l'Académie de Turin le 11 octobre 1831.

10. Les points non-errants sont les points de l'espace des phases qui retournent dans leur voisinage au bout d'un certain temps. En particulier, les points dont l'orbite est bornée sont non-errants.

11. Un ensemble est rare si l'intérieur de son adhérence est vide.

- [14] A. Celletti et L. Chierchia. KAM stability for a three-body problem of the solar system. *Z. Angew. Math. Phys.*, 57(1) :33–41, 2006.
- [15] A. Celletti et L. Chierchia. KAM stability and celestial mechanics. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 187(878) :viii+134, 2007.
- [16] A. Chenciner. Séries de Lindstedt. Note technique SO28 du Bureau des Longitudes, 1990.
- [17] A. Chenciner. Rapport sur les Premiers Textes de Mécanique céleste (1747–1749), œuvres complètes de d’Alembert. *Gazette des mathématiciens*, 99 :107–114, 2004.
- [18] A. Chenciner. Poincaré and the three-body problem. *Séminaire Poincaré*, XVI :45–133, 2012.
- [19] C.-Q. Cheng et J. Yan. Existence of diffusion orbits in a priori unstable Hamiltonian systems. *J. Differential Geom.*, 67(3) :457–517, 2004.
- [20] L. Chierchia. KAM lectures. In *Dynamical Systems. Part I*, Pubbl. Cent. Ric. Mat. Ennio Giorgi, pages 1–55. Scuola Norm. Sup., Pisa, 2003.
- [21] L. Chierchia et G. Pinzari. The planetary N -body problem : symplectic foliation, reductions and invariant tori. *Invent. Math.*, 186(1) :1–77, 2011.
- [22] B. V. Chirikov. The passage of a nonlinear oscillating system through resonance. *Soviet Physics. Dokl.*, 4 :390–394, 1959.
- [23] T. Combot. Generic classification of integrable homogeneous potentials of degree -1 in the plane. *Preprint*, 2012.
- [24] T. Combot. Non-integrability of the equal mass n -body problem with non-zero angular momentum. *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, 114(4) :319–340, 2012.
- [25] T. Combot. Integrability conditions at order 2 for homogeneous potentials of degree -1 . *Nonlinearity*, 26(1) :95–120, 2013.
- [26] T. Combot et C. Koutschan. Third order integrability conditions for homogeneous potentials of degree -1 . *J. Math. Phys.*, 53(8) :082704, 26, 2012.
- [27] J. Le Rond d’Alembert. *Premiers textes de mécanique céleste (1747–1749)*, volume 6 of *Œuvres Complètes de d’Alembert. [Complete Works of d’Alembert]*. CNRS Éditions, Paris, 2002. Edited by Michelle Chapront-Touzé.
- [28] C. Delaunay. *Théorie du mouvement de la lune*. Vol. 2 in *Théorie du mouvement de la lune*. Mallet-Bachelier, 1867.
- [29] D. Dolgopyat. Repulsion from resonances. *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)*, 128 :vi+119, 2012.
- [30] L. Euler. Recherches sur la question des inégalités du mouvement de Saturne et de Jupiter. *Prix de l’Académie royale des Sciences*, 1748-1749. Opera Omnia, Série 2, Volume 25, pp. 45-157.
- [31] L. Euler. Un corps etant attiré en raison reciproque quarrée des distances vers deux points fixes donne trouver les cas ou la courbe decrite par ce corps sera algebrique. *Mémoires de l’académie des sciences de Berlin*, 16 :228–249, 1767. Opera Omnia, Series 2, Volume 6, pp. 274 - 293.
- [32] J. Féjoz. Démonstration du ‘théorème d’Arnold’ sur la stabilité du système planétaire (d’après Herman). *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 24(5) :1521–1582, 2004.
- [33] J. Féjoz. A proof of the invariant torus theorem of Kolmogorov. *Regular and Chaotic Dynamics*, 17 :1–5, 2012.
- [34] J. Féjoz, M. Guàrdia, V. Kaloshin, et P. Roldán. Arnold diffusion in the restricted elliptic planar 3-body problem. *Preprint*, 88 pages, 2011.
- [35] J. Galante et V. Kaloshin. Destruction of invariant curves in the restricted circular planar three-body problem by using comparison of action. *Duke Math. J.*, 159(2) :275–327, 2011.

- [36] W. R. Hamilton. On a general method in dynamics. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, pages 95–144, 1834. Lu le 10 avril 1834. *Mathematical Works* (Cambridge University Press), volume IV.
- [37] W. R. Hamilton. Second essay on a general method in dynamics. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, pages 247–308, 1834. Lu le 15 janvier 1835. *Mathematical Works* (Cambridge University Press), volume IV.
- [38] M. Hénon. Exploration numérique du problème restreint IV. masses égales, orbites non périodiques. *Bulletin Astronomique*, 3(1 :2) :49–66, 1966.
- [39] M. Herman. Some open problems in dynamical systems. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Berlin, 1998)*, volume Extra Vol. II, pages 797-808 (electronic), 1998.
- [40] G. W. Hill. On the convergence of series used in the subject of perturbations. *Bull. Amer. Meth. Soc.*, 2 :93–97, 1896. *Collected Mathematical Works*, Vol. IV, No. 59, 94-98.
- [41] P. Iglesias. Les origines du calcul symplectique chez Lagrange. *Le journal de maths des élèves*, 1(3) :153–161, 1995.
- [42] E. Julliard-Tosel. Bruns’ theorem : the proof et some generalizations. *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, 76(4) :241–281, 2000.
- [43] E. Julliard-Tosel. Un nouveau critère de non-intégrabilité méromorphe d’un hamiltonien. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 330(12) :1097–1102, 2000.
- [44] J.-L. Lagrange. Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries. *Mémoires de l’Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, 24 :251–326, 1770. *Œuvres complètes* (Gauthier-Villars), tome 3, pp. 5-73.
- [45] J. L. Lagrange. Recherches sur les équations séculaires des mouvements des nœuds et des inclinaisons des orbites des planètes. *Mémoire de l’Académie royale des Sciences de Paris*, 1774. *Œuvres complètes* (Gauthier-Villars), volume VI, pp. 636-709.
- [46] J. L. Lagrange. Recherches sur la théorie des perturbations que les comètes peuvent éprouver par l’action des planètes. *Mémoires des savants étrangers de l’Académie des Sciences*, 1778. *Œuvres complètes* (Gauthier-Villars), tome VI, pp. 406-510.
- [47] J. L. Lagrange. Théorie des variations séculaires des éléments des planètes. Première et seconde parties. *Nouveaux Mémoires de l’Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, 1781-1782. *Œuvres complètes* (Gauthier-Villars), volume V, pp. 125-207 et 211-344.
- [48] J. L. Lagrange. Sur les variations séculaires des mouvements moyens des planètes. *Nouveaux Mémoires de l’Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, 1783. *Œuvres complètes* (Gauthier-Villars), volume V, pp. 381-414.
- [49] J. L. Lagrange. Théorie des variations périodiques des mouvements des planètes. Première et seconde parties. *Nouveaux Mémoires de l’Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, 1783-1784. *Œuvres complètes* (Gauthier-Villars), volume V, pp. 347-377 et 417-489.
- [50] J.-L. Lagrange. Mémoire sur la théorie des variations des éléments de planètes et en particulier des variations des grands axes de leurs orbites. *Mémoires de l’Institut de France*, 1809. Lu le 22 août 1808. *Œuvres complètes* (Gauthier-Villars), volume VI, pp. 713-768.
- [51] J.-L. Lagrange. Mémoire sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de mécanique. *Mémoires de l’Institut de France*, 1809. Lu le 13 mars 1809. *Œuvres complètes* (Gauthier-Villars), volume VI, pp. 771-805.
- [52] J.-L. Lagrange. Second mémoire sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique. *Mémoires de l’Institut de France*, 1810. Lu le 19 février 1810. *Œuvres complètes* (Gauthier-Villars), volume VI, pp. 809-816.
- [53] J.-L. Lagrange. *Mécanique analytique*. Gauthier-Villars, 1888. Quatrième édition en deux volumes. *Œuvres complètes* (Gauthier-Villars), volumes XI et XII. (Première édition en 1808).

- [54] P. S. Laplace. Mémoire sur les solutions particulières des équations différentielles et sur les inégalités séculaires des planètes. *Mémoire de l'Académie royale des Sciences de Paris*, 1772. Œuvres complètes, tome VIII, pp. 325-366.
- [55] P. S. Laplace. Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde. *Mémoire de l'Académie royale des Sciences de Paris*, 1772. Œuvres complètes, tome VIII, pp. 369-477.
- [56] P. S. Laplace. Sur le principe de la gravitation universelle et sur les inégalités séculaires des planètes qui en dépendent. *Mémoire de l'Académie royale des Sciences de Paris*, 1773. Œuvres complètes, tome VIII, pp. 201-275.
- [57] J. Laskar. A numerical experiment on the chaotic behavior of the Solar System. *Nature*, 338 :237-238, 1989.
- [58] J. Laskar. The chaotic motion of the Solar System. A numerical estimate of the size of the chaotic zones. *Icarus*, 88 :266-291, 1990.
- [59] J. Laskar. *Chaos et déterminisme*, chapitre La stabilité du Système solaire. Éd. du Seuil, 1992.
- [60] J. Laskar. Large-scale chaos in the Solar System. *Astronomy and Astrophysics*, 287 :9-12, 1994.
- [61] J. Laskar. *Sfogliando La Mécanique analytique, Giornata di studio su Louis Lagrange*, chapitre Lagrange et la stabilité du système solaire. Edizioni Universitarie di Lettere Economia Diritto, Milano, 2006.
- [62] J. Laskar. Le système solaire est-il stable? In *Le Chaos*, numéro XIV in Séminaire Poincaré, pages 221-246. Birkhäuser, 2010.
- [63] J. Laskar et M. Gastineau. Existence of collisional trajectories of Mercury, Mars and Venus with the Earth. *Nature*, 459(7248) :817-819, 2009.
- [64] P. Le Calvez. Drift orbits for families of twist maps of the annulus. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 27(3) :869-879, 2007.
- [65] A. J. Lichtenberg et M. A. Leiberman. *Regular and chaotic dynamics*, volume 38 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1992.
- [66] A. Lindstedt. Beitrag zur Integration der Differentialgleichungen. *Abh. K. Akad. Wiss. St. Petersburg*, 31(4), 1882.
- [67] U. Locatelli et A. Giorgilli. Invariant tori in the Sun-Jupiter-Saturn system. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 7(2) :377-398 (electronic), 2007
- [68] V. Mandorino. Connecting orbits for families of Tonelli Hamiltonians. *J. Mod. Dyn.*, 6(4) :499-538, 2012.
- [69] J.-P. Marco et D. Sauzin. Wandering domains and random walks in Gevrey near-integrable systems. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 24(5) :1619-1666, 2004.
- [70] C.-M. Marle. The inception of symplectic geometry : the works of Lagrange and Poisson during the years 1808-1810. *Lett. Math. Phys.*, 90(1-3) :3-21, 2009.
- [71] R. Martínez et C. Simó. Non-integrability of Hamiltonian systems through high order variational equations : summary of results and examples. *Regul. Chaotic Dyn.*, 14(3) :323-348, 2009.
- [72] J. N. Mather et G. Forni. Action minimizing orbits in Hamiltonian systems. In *Transition to chaos in classical and quantum mechanics (Montecatini Terme, 1991)*, volume 1589 of *Lecture Notes in Math.*, pages 92-186. Springer, Berlin, 1994.
- [73] R. Moeckel. Some qualitative features of the three-body problem. In *Hamiltonian dynamical systems (Boulder, CO, 1987)*, volume 81 of *Contemp. Math.*, pages 1-22. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.
- [74] R. Moeckel. Generic drift on Cantor sets of annuli. In *Celestial mechanics (Evanston, IL, 1999)*, volume 292 of *Contemp. Math.*, pages 163-171. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

- [75] J. J. Morales-Ruiz et J.-P. Ramis. Galoisian obstructions to integrability of Hamiltonian systems : statements and examples. In *Hamiltonian systems with three or more degrees of freedom (S'Agaró, 1995)*, volume 533 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 509–513. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.
- [76] J. J. Morales-Ruiz et J.-P. Ramis. Galoisian obstructions to integrability of Hamiltonian systems. I, II. *Methods Appl. Anal.*, 8(1) :33–95, 97–111, 2001.
- [77] J. J. Morales-Ruiz, J.-P. Ramis, et C. Simó. Integrability of Hamiltonian systems et différential Galois groups of higher variational equations. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 40(6) :845–884, 2007.
- [78] J. J. Morales-Ruiz, C. Simó, et S. Simon. Algebraic proof of the non-integrability of Hill's problem. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 25(4) :1237–1256, 2005.
- [79] J. Moser. *Stable and random motions in dynamical systems*. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001. With special emphasis on celestial mechanics, Reprint of the 1973 original, With a foreword by Philip J. Holmes.
- [80] N. N. Nekhoroshev. An exponential estimate of the time of stability of nearly integrable Hamiltonian systems. II. *Trudy Sem. Petrovsk.*, 5 :5–50, 1979.
- [81] A. Neishtadt. On averaging in two-frequency systems with small Hamiltonian and much smaller non-Hamiltonian perturbations. *Mosc. Math. J.*, 3(3) :1039–1052, 1200, 2003. {Dedicated to V. I. Arnold on the occasion of his 65th birthday}.
- [82] A. Neishtadt. Averaging method and adiabatic invariants. In *Hamiltonian dynamical systems and applications*, NATO Sci. Peace Secur. Ser. B Phys. Biophys., pages 53–66. Springer, Dordrecht, 2008.
- [83] X. X. Newhall, E. M. Standish, et J. G. Williams. De102 : a numerically integrated ephemeris of the moon and planets during forty-four centuries. *Astron. Astrphys.*, 125 :150–167, 1983.
- [84] I. Newton. *Philosophiæ naturalis principia mathematica*. Maclehose (1871), 1687.
- [85] I. Newton. *Opticks : A Treatise of the Reflections, Refractions, Inflections and Colour of Light*. Dover (1952), 1730.
- [86] L. Niederman. Stability over exponentially long times in the planetary problem. *Nonlinearity*, 9(6) :1703–1751, 1996.
- [87] P. Painlevé. *Leçons sur la théorie des équations différentielles professées à Stockholm (septembre, octobre, novembre 1895)*. Hermann, Paris, 1897.
- [88] R. Pérez-Marco. KAM techniques in PDE. *Astérisque*, 290 :Exp. No. 908, ix, 307–317, 2003. Séminaire Bourbaki. Vol. 2001/2002.
- [89] H. Poincaré. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. *Acta Math.*, 13 :1–270, 1890.
- [90] H. Poincaré. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Gauthier-Villars, Paris, 1892.
- [91] H. Poincaré. Sur la stabilité du système solaire. In *Annuaire pour l'an 1898 du Bureau des Longitudes*. Bureau des Longitudes, Gauthier-Villars et fils, 1897. Reproduit dans la Revue scientifique (revue rose), 4, IX (1898).
- [92] H. Poincaré. *Leçons de mécanique céleste*. Gauthier-Villars, 1905.
- [93] S. D. Poisson. Mémoire sur les inégalités séculaires des moyens mouvements des planètes. *Journal de l'École polytechnique*, 15(VIII) :1–56, 1808. Lu le 20 juin 1808 à l'Institut de France.
- [94] S. D. Poisson. Sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de mécanique. *Journal de l'École polytechnique*, 15(VIII) :266–344, 1809. Lu le 16 octobre 1809 à l'Institut de France.
- [95] J. Pöschel. A lecture on the classical KAM theorem. In *Smooth ergodic theory and its applications (Seattle, WA, 1999)*, volume 69 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 707–732. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

- [96] P. Robutel. Stability of the planetary three-body problem. II. KAM theory and existence of quasiperiodic motions. *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, 62(3) :219–261, 1995.
- [97] M. B. Sevryuk. The classical KAM theory at the dawn of the twenty-first century. *Mosc. Math. J.*, 3(3) :1113–1144, 1201–1202, 2003. Dedicated to V. I. Arnold on the occasion of his 65th birthday.
- [98] C. Simó et T. J. Stuchi. Central stable/unstable manifolds and the destruction of KAM tori in the planar Hill problem. *Phys. D*, 140(1-2) :1–32, 2000.
- [99] J.-M. Souriau. La structure symplectique de la mécanique décrite par Lagrange en 1811. *Math. Sci. Humaines*, 94 :45–54, 1986.
- [100] A. V. Tsygvintsev. Non-existence of new meromorphic first integrals in the planar three-body problem. *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, 86(3) :237–247, 2003.
- [101] E. T. Whittaker et G. N. Watson. *A course of modern analysis*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, 1996. Reprint of the fourth (1927) edition.
- [102] H. Yoshida. A criterion for the nonexistence of an additional analytic integral in Hamiltonian systems with n degrees of freedom. *Phys. Lett. A*, 141(3-4) :108–112, 1989.

Journée annuelle de la Société mathématique de France, le 28 juin 2013

JACQUES FÉJOZ, Université Paris-Dauphine & Observatoire de Paris