Torsion du problème planétaire*

M. Herman

Introduction

Considérons, pour $n \geq 2$, $1+n$ points matériels se mouvant dans $\mathbb{R}^3$ et soumis à l'attraction newtonienne. Notons leurs masses $M_0 = 1$ (soleil) et $\epsilon M_1, \epsilon M_2, ..., \epsilon M_n$ (planètes), où $\epsilon > 0$ est un paramètre réel. Si les positions des corps sont notées $q_0, q_1, ..., q_n \in \mathbb{R}^3$ et les impulsions $p_0, \epsilon p_1, ..., \epsilon p_n \in \mathbb{R}^3$, le mouvement des corps est régit par les équations différentielles

$$\begin{cases} \dot q_0 = \partial_{p_0} F, & \dot q_j = \epsilon^{-1}\partial_{p_j} F \quad (j = 1...n) \\ \dot p_0 = -\partial_{q_0} F, & \dot p_j = -\epsilon^{-1}\partial_{q_j} F \end{cases}$$

associées à l'hamiltonien

$$F = \frac{1}{2}\|p_0\|^2 + \epsilon\left(\frac{1}{2}\sum_{1\leq j\leq n}\frac{\|p_j\|^2}{M_j} - \sum_{1\leq j\leq n}\frac{M_j}{\|q_j - q_0\|}\right) - \epsilon^2 \sum_{1\leq j<k\leq n}\frac{M_j M_k}{\|q_j - q_k\|},$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne. Le *problème planétaire* est de décrire les solutions de ces équations quand $0 < \epsilon \ll 1$.

La réduction du problème par la symétrie de translation peut se faire en introduisant les coordonnées héliocentriques canoniques [Po]

$$\begin{cases} r_0 = q_0 \\ r_j = q_j - q_0 \quad (j = 1, ..., n) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} P_0 = p_0 + \epsilon p_1 + \epsilon p_2 + ... + \epsilon p_n \\ P_j = p_j \quad (j = 1, ..., n), \end{cases}$$

dans lesquelles l'hamiltonien devient, sur le sous-espace invariant $P_0 = 0$ et après changement de temps par le facteur ϵ,

$$H = H_0 + \epsilon H_1 = \sum_{1\leq j\leq n}\left(\frac{\|P_j\|^2}{2\mu_j} - \frac{M_j}{\|r_j\|}\right) + \epsilon\sum_{1\leq j<k\leq n}\left(-\frac{M_j M_k}{\|r_j - r_k\|} + \langle P_j, P_k\rangle\right),$$

avec $1/\mu_j = 1 + 1/M_j$. L'*hamiltonien képlérien* H_0 est l'hamiltonien de n problèmes à deux corps découplés, donc est intégrable. H_1 est la somme d'une *partie principale* (fonction des positions) et d'une *partie complémentaire* (fonction des impulsions).

La Théorie des perturbations montre que, au voisinage des mouvements képlériens elliptiques dont les fréquences sont incommensurables, au premier ordre en ϵ les lentes déformations des ellipses képlériennes sont régies par l'*hamiltonien moyenné*

$$\epsilon\langle H_1\rangle = \epsilon\int_{T^n} H_1\, d\lambda_1 \otimes ... \otimes d\lambda_n,$$

où les angles $\lambda_1, ..., \lambda_n$ paramètrent les ellipses conformément à la loi des aires.

Depuis Laplace et Lagrange on sait que $\langle H_1\rangle$ possède un point critique elliptique correspondant aux ellipses circulaires coplanaires orientées positivement. Dans la forme normale de Birkhoff de $\langle H_1\rangle$ au voisinage de ce point critique, le premier invariant est le *vecteur des fréquences séculaires*, tandis que le deuxième invariant est le *tenseur de torsion* $\mathscr{T}$, auquel l'auteur fait référence dans le titre de ces notes.

*Les notes originales de ce texte existent dans une version manuscrite préliminaire. Certaines corrections mineures, ainsi que des commentaires, ont été ajouté par J. Féjoz dans l'introduction et en notes de bas de page.

L'auteur démontre que, dans l'espace des masses et des demi grands axes, le sous-ensemble où le déterminant de la torsion s'annule est un ensemble analytique nulle part dense. Ce résultat est riche de conséquences pour l'étude de la dynamique planétaire et de sa stabilité. Grâce à lui on peut notamment appliquer au problème planétaire le théorème des tores invariants dans sa version "isochroniquement non dégénérée". Cela ainsi une affirmation erronnée dans la démonstration du remarquable "théorème d'Arnold" [Ar] (voir [Ro] et [Fé]) et renforce la propriété de non dégénérescence démontrée et utilisée dans [Fé]. Il serait intéressant de calculer la signature de la torsion.

Nous renvoyons aux références ci-dessous pour plus de détails, ainsi qu'aux références qu'elles-même contiennent.

Jacques Féjoz, février 2009

[Ar] V.I. Arnold. Petits dénominateurs et problèmes de stabilité du mouvement en mécanique classique et céleste (en russe). *Usp. Mat. Nauk.* **18** (1963), 91–192 (trad. anglaise, *Russ. Math. Surv.* **18** (1963), 85–193)

[Fé] J. Féjoz, Démonstration d'Herman du théorème d'Arnold sur la stabilité du système solaire. *Ergodic Theory & Dynam. Sys.* **24** (2004). Version mise à jour sur `http://people.math.jussieu.fr/~fejoz/arnold.pdf`

[Po] H. Poincaré. *Leçons de mécanique céleste.* Gauthier-Villars, Paris, 1905–1907

[Ro] P. Robutel, Stability of the planetary three-body problem, II. KAM theory and existence of quasiperiodic motions. *Celest. Mech. & Dynam. Astr.* **62**:219–261 (1995)

Table des matières

On supposera que *les particules tournent dans le même sens* (les inclinaisons étant petites).

1 Développement de la fonction perturbatrice : partie abstraite

1.1 Composantes du moment cinétique

Le moment cinétique vaut[1]

$$\begin{aligned}\vec{C} &= (C_x, C_y, C_z)\\ &= (G\sin i \sin\Omega, -G\sin i\cos\Omega, H = G\cos i)\\ &= (-(L-\rho_1)\sin i\sin w_2, (L-\rho_1)\sin i\cos w_2, L-\rho_1-\rho_2)\end{aligned}$$

où

$$\rho_1 = L - G, \quad \rho_2 = G - H, \quad w_2 = -\Omega.$$

1.1.1 Moment cinétique en coordonnées de Poincaré

Composante verticale :

$$C_z = \sum_1^n H_j = \sum_{j=1}^n \left(\Lambda_j - \frac{|r_j|^2}{2} - \frac{|z_j|^2}{4}\right) = cte$$

(cette formule est valable après réduction du centre de masse), où[2]

$$r_j = \xi_j + i\eta_j, \quad z_j = p_j + iq_j.$$

On vérifie :

$$\begin{aligned}G\sin i\sin\Omega &= -p\sqrt{L-\rho_1-\tfrac{\rho_2}{2}}\\ -G\sin i\cos\Omega &= -q\sqrt{L-\rho_1-\tfrac{\rho_2}{2}}.\end{aligned}$$

Les composantes C_x et C_y du moment cinétique donnent les intégrales premières (après réduction du centre de masse)

$$\sum_1^n z_j\sqrt{\Lambda_j - \frac{|r_j|^2}{2} - \frac{|z_j|^2}{4}} = cte.$$

1.2 L'hamiltonien moyenné

Nous voulons calculer, en variables de Poincaré,[3]

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n_{2\pi}=\mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}} \sum_{i<j}\left(\langle P_i, P_j\rangle - \frac{M_iM_j}{\|r_j - r_i\|}\right) d\lambda_1\otimes \ldots \otimes d\lambda_n.$$

Nous allons, en suivant H. Poincaré, essayer d'obtenir le plus d'informations possibles sans aucun calcul. Ensuite, des calculs seront nécessaires (il n'est pas évident que l'intégrale ne soit pas identiquement nulle !). Nous utiliserons les développements en série de Legendre (ce qui est relativement simple) et, à un moment (à cause d'une résonance bizarre), en coefficients de Laplace.

[1] G est la norme du moment cinétique, i l'inclinaison et Ω la longitude du noeud.
[2] $(\lambda_j, \Lambda_j, \xi_j, \eta_j, p_j, q_j)$ sont les coordonnées de Poincaré.
[3] Le texte original contient un facteur 2 erroné dans la "partie complémentaire" $\langle P_i, P_j\rangle$.

Lemme 1.
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \langle P_i, P_j\rangle \, d\lambda_1 \, d\lambda_2 = 0.$$

Démonstration. Les équations du mouvement képlérien de la particule $q_j(t)$ donnent

$$P_j(t) = M_j \frac{dq_j}{dt}(t) = \frac{M_j}{a_j^{3/2}} \frac{dq_j}{d\lambda_j}.$$

Or

$$\int_0^{2\pi} \frac{dq_j}{d\lambda_j} \, d\lambda_j = 0$$

et donc

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \langle P_i, P_j\rangle \, d\lambda_i \, d\lambda_j = 0$$

(q_i dépend de λ_i mais pas de λ_j). □

Remarque On considère le système hamiltonien sur $T^*(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$,

$$H = \|P\|^2 + V(\|q\|)$$

(mouvement d'une particule soumis à une force centrale). Soit T^p un tore plongé invariant par f_t^H, tel que $f_{t|T}^H$ est C^∞-conjugué à un flot linéaire de T^p. Alors

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t p \circ f_t^H \, dt = 0.$$

En effet, il suffit de dériver $q(t) = \varphi_1(\theta_0 + \alpha t)$ par rapport à t et d'intégrer par rapport à θ_0, en utilisant l'unique ergodicité du flot minimal $\theta \mapsto \eta + \alpha t$ sur T^p, p pouvant être égal à 1 pour une orbite périodique ou à 2 sinon.

On doit calculer en variables de Poincaré

$$P_{j,k} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{||r_j - r_k||} \, d\lambda_j \, d\lambda_k$$

puis considérer

$$-\sum_{j<k} M_j M_k P_{j,k}.$$

D'après le théorème de Poincaré, $1/||r_1 - r_2||$ est une fonction analytique des variables de Poincaré, développable en série convergente pour (r, z) voisin de zéro :

$$\frac{1}{||r_1 - r_2||} = \sum_{p\in\mathbb{Z}^2,\, k_j\in\mathbb{N}^2} c_{k,p} r^{k_1} \bar{r}^{k_2} z^{k_3} \bar{z}^{k_4} e^{i(p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2)}$$

où, si $k_j = (a_j, b_j)$, $|k_j| = a_j + b_j$, $r^{k_j} = r_1^{a_j} r_2^{b_j}$, etc.
On note $c_k = c_{k,0}$. On obtient

$$P_{1,2} = \sum_k c_k(\Lambda_1, \Lambda_2) r^{k_1} \bar{r}^{k_2} z^{k_3} \bar{z}^{k_4},$$

qui est une fonction réelle, d'où

$$c_{k_1,k_2,k_3,k_4} = \bar{c}_{k_2,k_2,k_4,k_3}.$$

1.3 Symétries

L'hamiltonien du problème à deux corps :

$$H = \frac{||p||^2}{2m} - \frac{mM}{||q||} = h$$

est invariant par l'application cotangente des symétries suivantes :

- La rotation horizontale

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha, x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha, x_3),$$

soit[4]

$$(\ell, g, h, L, G, H) \mapsto (\ell, g, h + \alpha, L, G, H),$$

soit[5]

$$(\lambda, w_1, w_2, L, \Gamma, Z) \mapsto (\lambda + \alpha, w_1 - \alpha, w_2 - \alpha, L, \Gamma, Z).$$

- La réflexion

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, -x_3),$$

soit

$$(\ell, g, h, L, G, H) \mapsto (\ell, g + \pi, h + \pi, L, G, H).$$

- La réflexion

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, -x_2, x_3),$$

soit

$$(\ell, g, h, L, G, H) \mapsto (-\ell, -g, -h, L, G, H),$$

soit

$$(\lambda, w_1, w_2, L, \Gamma, Z) \mapsto (-\lambda, -w_1, -w_2).$$

On utilise maintenant ces symétries. L'invariance par rotation implique

$$|k_1| + |k_3| = |k_2| + |k_4|.$$

La symétrie $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, -x_3)$ donne

$$|k_3| + |k_4| \equiv 0 \mod 2$$

(il n'y a pas de terme pair en inclinaison). Il suit

$$|k_1| + |k_2| \equiv 0 \mod 2.$$

Finalement, la symétrie $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, -x_2, x_3)$ implique que $c_k \in \mathbb{R}$. Il suit (de l'invariance par rotation et de ce que $c_k \in \mathbb{R}$) :

$$P_{1,2} = c_0(\Lambda_1, \Lambda_2) + Q_P(\xi) + Q_P(\eta) + Q_I(p) + Q_I(q) + \text{termes d'ordre} \geq 4,$$

où Q_P est une forme quadratique (c'est la partie quadratique du problème P = plan) et Q_I est une forme quadratique en les inclinaisons (I), dépendant de $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2)$.
On peut réduire les formes quadratiques et trouver

$$a_P \in SO(n) \quad \text{et} \quad a_I \in SO(n)$$

(dépendant de Λ) tels que

$$Q_P \circ a_P = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{P,j}(\Lambda)\, \xi_j^2, \quad Q_I \circ a_P = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{P,j}(\Lambda)\, p_j^2.$$

[4]en coordonnées de Delaunay, avec $h = \Omega$
[5]en coordonnées polaires symplectiques associées aux coordonnées de Poincaré

On remarque que
$$B : (\xi, \eta, p, q) \mapsto (a_P(\xi), a_P(\eta), a_I(p), a_I(q))$$
est symplectique, et
$$P_{1,2} \circ B = c_0(\Lambda) + \sum_1^n \sigma_{P,j}(\Lambda)(\xi_j^2 + \eta_j^2) + \sum_1^n \sigma_{I,j}(\Lambda)(p_j^2 + q_j^2)$$
$$+\text{termes d'ordre } 4 + \text{termes d'ordre pair} \geq 6.$$
Attention : B agissant sur les termes d'ordre 4, des termes non résonnants de Q_4 peuvent devenir résonnants pour $Q_4 \circ B$.

1.4 Une valeur propre nulle

Soient les intégrales du moment cinétique en variables de Poincaré :
$$C_z = \sum_{j=1}^n \left(\Lambda_j - \frac{|r_j|^2}{2} - \frac{|z_j|^2}{4}\right),$$
$$C_x + iC_y = \sum_1^n z_j \sqrt{\Lambda_j - \frac{|r_j|^2}{2} - \frac{|z_j|^2}{4}} = \sum_1^n z_j \sqrt{\Lambda_j} + \text{termes d'ordre} \geq 4$$
(en $|r_j|^2$ et $|z_j|^2$). Il en résulte que le flot de $X_{Q_I(\xi)+Q_I(\eta)}$ commute avec ceux de $X_{\sum_j p_j \sqrt{\Lambda_j}}$ et de $X_{\sum_j q_j \sqrt{\Lambda_j}}$. Donc $v = (\sqrt{\Lambda_1}, ..., \sqrt{\Lambda_n})$ vérifie $A_I v = 0$, où $Q_I(p) = {}^t p A_I p$, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$: v est un vecteur du noyau de $Q_I(p)$ et de $Q_I(q)$. Il en résulte que l'un des $\sigma_{I,j}$ (on choisit $j = n$) vérifie
$$\sigma_{I,n}(\Lambda_1, ..., \Lambda_n) = 0.$$

Dans la suite on note au besoin (à cause d'une récurrence sur n) $Q_{P,n}$, $Q_{I,n}$, $a_{P,n}$, $a_{I,n}$, $\sigma_{P,n,j}(\Lambda) = \sigma_{P,j}(\Lambda)$, $\sigma_{I,n,j}$ et $\sigma_{I,n,n}(\Lambda) = 0$ (convention ci-dessus).

1.5 Les théorèmes de stabilité de Lagrange et de Laplace

Pour le système moyennisé, les Λ_j sont des intégrales premières (Lagrange) et donc (toujours en supposant que toutes les particules tournent dans le même sens)
$$\sum \frac{|r_j|^2}{2} + \frac{|z_j|^2}{2}$$
est une intégrale première et *les orbites restent bornées.* Il n'y a pas de termes séculaires venant de la fonction perturbatrice (problème de Lagrange résolu, après des fautes, par Laplace). Mais c'est une *très grave erreur* (faite par Laplace) de penser que ceci implique la *stabilité topologique.*

Attention, il faut restreindre les domaines pour éviter les collisions.

1.6 Réduction

Les valeurs propres nulles viennent des intégrales premières C_x et C_y. On les élimine en se plaçant sur la variété
$$V_C = \{C_x + iC_y = a \in \mathbb{C}\}.$$

Le flot $f_t^{H_{n+1}}$ laisse invariante V_C. On a la forme symplectique $j_{V_C}^* w$ induite de w et l'hamiltonien restreint $H_{n+1} \circ j_{V_C}$.

Comme $\{C_x, C_y\} = C_z$, il faut éventuellement rétablir la forme symplectique si on veut faire de la théorie des perturbations, par exemple la forme normale de Birkhoff (et ce qui complique les choses sont les termes de degré 3).

Sur V_C on a $\{H_{n+1}, C_z\} = 0$ et C_z induit une action de $\mathbb{S}^1$. Comme

$$C_z = \sum_{j=1}^{n} \left(\Lambda_j - \frac{|r_j|^2}{2} - \frac{|z_j|^2}{4} \right)$$

sur $T^*\mathbb{T}^n \times T^*\mathbb{R}^{2n}$, cette action est sans point fixe.
En coordonnées polaires symplectiques, cette action est

$$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{r}_1, \hat{r}_2) \mapsto (\hat{\theta}_1 + t, \hat{\theta}_2 - t, \hat{r}_1, \hat{r}_2).$$

Si on néglige les termes d'ordre trois, le hamiltonien moyennisé sur V_C vaut

$$H_0(\Lambda) + \sum_1^n \sigma_{P,j}(\Lambda)|r_j|^2 + \sum_1^{n-1} \sigma_{I,j}(\Lambda)|z_j|^2$$

avec

$$H_0(\Lambda) = -\sum \frac{M_j^3}{\Lambda_j^2}.$$

On élimine $|z_{n-1}|$ avec

$$C_z = \sum_{j=1}^{n} \left(\Lambda_j - \frac{|r_j|^2}{2} - \frac{|z_j|^2}{4} \right) = C$$

et on obtient

$$\check{H} = H_0(\Lambda) + \sum_1^n \left(\sigma_{P,j} - \sigma_{I,n-1}\right)(\Lambda)|r_j|^2 + \sum_1^{n-2} \left(\sigma_{I,j} - \sigma_{I,n-1}\right)(\Lambda)|z_j|^2$$
$$+ \left(2\sum_1^n \Lambda_j - 2C\right) \sigma_{I,n-1}(\Lambda).$$

Les valeurs propres sont

$$(\sigma_{P,j} - \sigma_{I,n-1})_{1\leq j\leq n} \quad \text{et} \quad (\sigma_{I,j} - \sigma_{I,n-1})_{1\leq j\leq n-2}.$$

$\check{H}$ satisfait à la condition de Rüssmann[6] puisque l'unique relation affine entre les fréquences

$$\left(\frac{\partial H_0}{\partial \Lambda}(\Lambda), \sigma_{P,1}(\Lambda), ..., \sigma_{I,n-1}(\Lambda)\right)$$

est la relation

$$\sum_1^n \sigma_{P,j} + \sum_1^{n-1} \sigma_{I,j} = 0.$$

Si $n+1 = 3$ ce que nous avons fait est la réduction de Jacobi et les valeurs propres sont

$$\sigma_{P,2,1} - \sigma_{I,2,1}, \sigma_{P,2,2} - \sigma_{I,2,1},$$

avec

$$\sigma_{I,2,1}(\Lambda) = -\frac{1}{4} M_1 M_2 \left(\frac{1}{\Lambda_1} + \frac{1}{\Lambda_2}\right) \frac{a_1}{a_2^2} b_{3/2}^{(1)}\left(\frac{a_1}{a_2}\right).$$

Contrairement à une affirmation de V. I. Arnold :
Si l'inclinaison tend vers 0, le problème dans l'espace (après réduction) ne tend pas vers le problème plan. Ceci a été noté par Robutel et la raison en est qu'après réduction il n'y a plus d'inclinaison !
D'autre part les formules de Robutel de la partie quadratique sont erronées !

[6]Cf. [Fé]

Nous avons négligé les termes de degré ≥ 3. Il faut faire $D = 0$ dans les formules de Robutel et remplacer $1 + 2k$ par $2 + k$![7]

Dans les calculs ci-dessus nous avons négligé les termes d'ordre 4. Si on en tient compte il faut choisir a voisin de $0 \in \mathbb{C}$ et $C - \sum \Lambda_j$ voisin de 0.

Remarque. Si $\ell : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+q}$ est C^ω et si son image n'est pas incluse dans un hyperplan, alors $\forall x_0 \in U$ $\exists k_0$ tel que $j^{k_0}\ell$ est de rang $n + q$ et cette condition est stable par perturbation C^{k_0}.

2 L'horreur céleste

BLC = Bonjour Les Calculs. Attention aux facteurs $1/2$.[8]

2.1 Calcul de $P_{1,2}$

Rappelons que

$$P_{1,2} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\Delta^{1/2}}\, d\ell_1\, d\ell_2,$$

avec

$$\Delta = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos S, \quad r_j = \|\vec{r}_j\|, \quad \cos S = \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{r_1 r_2}.$$

On a

$$\frac{d\ell_j}{dv_j} = \frac{r_j^2}{a_j^2(1-e_j^2)^{1/2}}, \quad r_j = \frac{a_j(1-e_j^2)}{1 + e_j \cos v_j}\ ;$$

cela suit de

$$\frac{d\ell_j}{dt} = a_j^{-3/2}$$

et du fait que

$$M_j r_j^2 \frac{dv_j}{dt} = M_j \sqrt{a_j(1-e_j^2)}$$

est l'intégrale du moment cinétique, où $v_j = \theta_j$.[9]

La formule du changement de variables donne

$$P_{1,2} = \frac{1}{(2\pi)^2 a_1^2 a_2^2 (1-e_1^2)^{1/2}(1-e_2^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r_1^2 r_2^2}{\Delta^{1/2}}\, dv_1\, dv_2.$$

$P_{1,2}$ est une fonction des a_j, e_j, g_j, Ω_j. Pour le problème plan

$$\cos S = \cos(v_1 - v_2 + g_1 - g_2).$$

Pour le problème dans l'espace

$$\cos S = \cos(v_1 - v_2 + g_1 + \Omega_1 - g_2 - \Omega_2) + U.$$

[7] Dans [Ro, p. 258], il faut lire

$$H^{(0)}_{1,1,0,0}(\alpha, k) = \ldots = \frac{1}{8}(2+k)\alpha b^{(1)}_{3/2}(\alpha)$$

et

$$H^{(0)}_{1,0,0,1}(\alpha, k) = H^{(0)}_{0,1,1,0}(\alpha, k) = \ldots$$

[8] Notamment, la définition des coefficients de Laplace diffère d'un facteur deux d'un auteur à l'autre.)

[9] v_j désigne l'anomalie vraie.

Passage des variables (a_j, e_j, g_j, i_j) **aux variables de Poincaré** $(\xi_j, \eta_j, p_j, q_j)$

On a $\Lambda_j = L_j = M_j\sqrt{a_j}$ $(\mu = 1)$,

$$\Gamma_j = L_j - G_j = \Lambda_j(1 - \sqrt{1 - e_j^2}) = \rho_{1,j},$$

$$Z_j = G_j - H_j = (L_j - \rho_{1,j})(1 - \cos i_j) = (L_j - \rho_{1,j})\, 2\sin^2(i_j/2),$$

donc

$$e_j^2 = \frac{2\rho_{1,j}}{\Lambda_j} - \frac{\rho_{1,j}^2}{\Lambda_j^2},$$

$$2\sin^2(i_j/2) = \frac{\rho_{2,j}}{\Lambda_j\sqrt{1 - e_j^2}},$$

$$\rho_{1,j} = \frac{\xi_j^2 + \eta_j^2}{2} = r_j\bar{r}_j/2,$$

$$\rho_{2,j} = \frac{p_j^2 + q_j^2}{2} = z_j\bar{z}_j/2,$$

$$r_j = \xi_j + i\eta_j = \sqrt{2\rho_{1,j}}\, e^{iw_1}, \quad z_j = p_j + iq_j = \sqrt{2\rho_{2,j}}\, e^{iw_2},$$

$$w_1 = -g_j - \Omega_j, \quad w_2 = -\omega_j.$$

Si a_1/a_2 est petit on développe en séries de Legendre

$$\frac{r_1^2 r_2^2}{\Delta^{1/2}} = r_1^2 r_2 \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\cos S + \frac{r_1^2}{r_2^2}\frac{3\cos^2 S - 1}{2} + O\left(\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3\right)\right).$$

2.2 Problème plan

En intégrant par rapport à v_2 puis à v_1, on obtient[10]

$$\begin{aligned} P_{1,2} &= \frac{1}{a_2}\left[1 + \frac{a_1^2}{8a_2^2}\frac{2 + 3e_1^2}{(1 - e_2^2)^{3/2}} + O\left(\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3\right)\right] \\ &= \frac{1}{a_2}\left[1 + \frac{a_1^2}{8a_2^2}\left(3(e_1^2 + e_2^2) + \frac{9}{2}e_1^2 e_2^2 + \frac{15}{4}e_2^4 + O_6\right) + O\left(\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3\right)\right] \end{aligned}$$

Développement en variables de Poincaré jusqu'à l'ordre 4

$$P_{1,2} = \frac{1}{a_2} + \frac{a_1^2}{a_2^3}\left[\begin{array}{l} \frac{3}{4}\frac{\xi_1^2 + \eta_1^2}{2\Lambda_1} + + \frac{3}{4}\frac{\xi_2^2 + \eta_2^2}{2\Lambda_2} \\ -\frac{3}{8}\frac{(\xi_1^2 + \eta_1^2)^2}{\Lambda_1^2} + \frac{3}{2}\frac{(\xi_2^2 + \eta_2^2)^2}{\Lambda_2^2} \\ +\frac{9}{4}\frac{(\xi_1^2 + \eta_1^2)^2}{\Lambda_1^2}\frac{(\xi_2^2 + \eta_2^2)^2}{\Lambda_2^2} \end{array}\right]$$

[10] Ici, M. Herman donne de nombreuses formules élémentaires utiles dans le calcul qu'il propose. On a en fait intérêt à intégrer par rapport à l'anomalie excentrique intérieure u_1 (et toujours par rapport à l'anomalie vraie extérieure v_2, ce qui ramène le calcul à la quadrature de polynômes trigonométriques ; cf. l'appendice C de J. Féjoz, Quasiperiodic motions in the planar three-body problem, *J. Differential Equations* **183** (2002).

Développement en les coefficients de Laplace

Lemme 2. *Si* $a_1 < a_2$,

$$P_{1,2} = \frac{1}{a_2}\left[\frac{1}{e}b^{(}_{1/2}0)\left(\frac{a_1}{a_2}\right) + \sum_{k=(k_1,k_2)\in\mathbb{N}^2,\ |k|\geq 1} c_k\left(\frac{a_1}{a_2}\right)P_k(g_1-g_2)e_1^{k_1}e_2^{k_2}\right],$$

où c_k *est un polynôme en les coefficients de Laplace et* $P_k(g_1-g_2)$ *un polynôme trigonométrique en* g_1-g_2.

Démonstration.

$$P_{1,2} = \frac{1}{(2\pi)^2 a_1^2 a_2^2 (1-e_1^2)^{1/2}(1-e_2^2)^{1/2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r_1^2 r_2}{(\Delta/r_2^2)^{1/2}}\,dv_1\,dv_2.$$

Comme

$$r_j = \frac{a_j(1-e_j^2)}{1+e_j\cos v_j},$$

on a

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{a_1(1-e_1^2)}{a_2(1-e_2^2)}\frac{(1+e_2\cos v_2)}{(1+e_1\cos v_1)}.$$

Par définition des coefficients de Laplace,[11]

$$\frac{1}{(\Delta/r_2)^{1/2}} = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{1/2}^{(k)}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)\cos(k(v_1-v_2+g_1-g_2))$$

avec $b_{1/2}^{(-k)} = b_{1/2}^{(k)}$.
On développe

$$\frac{r_j}{a_j} = 1 - e_j\cos v_j + O(e_j^2),$$

donc

$$\frac{r_1}{a_1}\frac{a_2}{r_2} = 1 + e_2\cos v_2 - e_1\cos v_1 + ...$$

De plus,

$$b_{1/2}^{(k)}\left(\frac{a_1}{a_2}(1+x)\right) = b_{1/2}^{(k)}\left(\frac{a_1}{a_2}\right) + ... + \frac{x^j}{j!}\left.\frac{d^j}{dx^j}\right|_{x=0} b_{1/2}^{(k)}\left(\frac{a_1}{a_2}(1+x)\right) + ...$$

En substituant, en intégrant et en utilisant la relation

$$\frac{db_s^{(j)}}{d\alpha}(\alpha) = s\left[b_{s+1}^{(j-1)} + b_{s+1}^{(j+1)} - 2\alpha b_{s+1}^{(j)}\right](\alpha).$$

on obtient le lemme. □

Un calcul montre que

$$P_{1,2} = \frac{1}{8}\frac{a_1}{a_2^2}b_{3/2}^{(1)}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)[e_1^2+e_2^2] - \frac{1}{4}\frac{a_1}{a_2^2}b_{3/2}^{(2)}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)e_1 e_2\cos(g_1-g_2)\ ;$$

voir Plummer, chap. XVI, § 177, p. 195–198.

[11] Une autre convention existe (utilisée notamment par Poincaré), qui ne met pas de facteur 1/2.

2.3 Problème spatial

Calcul de $\cos S$ Soit $A_j = D_j C_j B_j$ le produit des rotations de $\mathbb{R}^3$ définies par

$$D_j = \begin{pmatrix} \cos\Omega_j & -\sin\Omega_j & 0 \\ \sin\Omega_j & \cos\Omega_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i_j & -\sin i_j \\ 0 & \sin i_j & \cos i_j \end{pmatrix}$$

et

$$B_j = \begin{pmatrix} \cos(\ell_j + g_j) & -\sin(\ell_j + g_j) & 0 \\ \sin(\ell_j + g_j) & \cos(\ell_j + g_j) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En calculant A_j (c'est plus simple que les formules de trigonométrie sphérique), et en utilisant $\lambda_j = \ell_j + g_j + \Omega_j$,

$$\begin{aligned} \frac{\vec{r_j}}{r_j} = A_j \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos^2(i_j/2)\cos\lambda_j + \sin^2(i_j/2)\cos(\lambda_j - 2\Omega_j) \\ \cos^2(i_j/2)\sin\lambda_j - \sin^2(i_j/2)\sin(\lambda_j - 2\Omega_j) \\ \sin i_j \sin(\lambda_j - \Omega_j) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\ell_j + g_j)\cos\Omega_j - \cos i_j \sin(\ell_j + g_j)\sin\Omega_j \\ \cos(\ell_j + g_j)\sin\Omega_j - \cos i_j \sin(\ell_j + g_j)\cos\Omega_j \\ \sin i_j \sin(\ell_j + g_j) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Après un calcul (un peu long) on trouve (Brumberg, Chapron, Laskar)

$$\cos S_{12} = \frac{\vec{r_1}\cdot\vec{r_2}}{r_1 r_2} = \Re\left(e^{i(\lambda_1-\lambda_2)}a + e^{i(\lambda_1-\lambda_2)}b\right),$$

avec

$$\begin{aligned} a &= \left(\cos\frac{i_j}{2}\cos\frac{i_2}{2} - \bar{\zeta}_1\zeta_2\right)^2 \\ a &= \left(\cos\frac{i_j}{2}\bar{\zeta}_2 - \cos\frac{i_2}{2}\bar{\zeta}_1\right)^2 \\ \zeta_j &= \sin\frac{i_j}{2}\,e^{i\Omega_j} \\ \lambda_j &= \ell_j + g_j + \Omega_j. \end{aligned}$$

D'où

$$\cos S_{12} = \cos(\lambda_1 - \lambda_2) + U$$

avec

$$U = \Re\left[\begin{array}{l} (-\zeta_1\bar{\zeta}_1 - \zeta_2\bar{\zeta}_2 - 2\bar{\zeta}_1\zeta_2)\,e^{i(\lambda_1-\lambda_2)} + \\ (\bar{\zeta}_1^2 + \bar{\zeta}_2^2 - 2\bar{\zeta}_1\bar{\zeta}_2)\,e^{i(\lambda_1+\lambda_2)} + \\ \text{termes d'ordre 4} \end{array}\right].$$

On peut aussi écrire

$$\cos S = \mathbb{R}(Ae^{-i\lambda_2} + Be^{i\lambda_2}$$

avec

$$A = e^{i\lambda_1}a, \quad B = e^{i\lambda_2}b,$$

d'où

$$\cos S = e^{i\lambda_2}\frac{B + \bar{A}}{2} + e^{-i\lambda_2}\frac{A + \bar{B}}{2}.$$

Soit $\tilde{w}_j = v_j + g_j + \Omega_j$ et $\cos\tilde{S}$ l'expression obtenue à partir de $\cos S$ en remplaçant λ_j par $\tilde{w}_j$. Pour calculer les intégrales on utilise que si $\psi = \sum \psi_k e^{ik\theta}$ et $\eta = \sum \eta_k e^{ik\theta}$ sont deux polynômes trigonométriques

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi\eta = \sum_k \psi_k \eta_{-k}.$$

On obtient

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e\cos v_2 \cos^2 \tilde{S}\, dv_2 = 0.$$

En intégrant le développement de Legendre,

$$\begin{aligned} P_{1,2} &= \frac{1}{a_2} + \frac{a_1^2}{2a_2^2}\frac{1+\frac{3}{2}e_1^2}{(1-e_2^2)^{3/2}}\left(\frac{3}{2}(a\bar{a}+b\bar{b})-1\right) \\ &+\frac{3}{4}\frac{a_1^2}{a_2^3}\frac{1}{(1-e_1^2)^{-7/2}}\frac{1}{(1-e_2^2)^{3/2}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{AB+\bar{A}\bar{B}}{(1+e_1\cos v_1)^4}\,dv_1 \\ &+O\left(\frac{a_1^3}{a_2^4}\right) \quad \text{si } a_1/a_2 \to 0. \end{aligned}$$

On a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{AB+\bar{A}\bar{B}}{(1+e_1\cos v_1)^4}\,dv_1 = c_1\bar{r}_1^2 b + c_1 r_1^2\bar{b} + O(r_1^2\zeta^4) + O(r_1^4 b)$$

puisque

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{ei(v_1+g_1+\Omega_1)}}{(1+e_1\cos v_1)^4}\,dv_1 = c_1\bar{r}_1^2 + O(r_1^4), \quad c_1\in\mathbb{R}.$$

Lorsque $a_1/a_2 \to 0$, les termes d'ordre 4 en inclinaisons seulement sont donnés par

$$\frac{3}{4}\frac{a_1^2}{a_2^3}(a\bar{a}+b\bar{b}) = \frac{3}{2}\frac{a_1^2}{a_2^3}\left(\frac{1}{2}-|\zeta_1|^2-|\zeta_2|^2+(\zeta_1\bar{\zeta}_2+\bar{\zeta}_1\zeta_2)+|\zeta_1|^4+|\zeta_2|^4+\ldots\right)$$

Les termes non résonnants en $|r_j|^2 = e_j^2$ et $|\zeta_|^2$ sont

$$-\frac{9}{4}(e_1^2+e_2^2)(|\zeta_1|^2+|\zeta_2|^2-(\zeta_1\bar{\zeta}_2+\zeta_2\bar{\zeta}_1)) + \text{termes d'ordre 6}$$

(on a utilisé que $\cos(i_j/2) = \sqrt{1-\sin^2(i_j/2)}$).

2.4 Développement de $P_{1,2}$

On suppose que a_1/a_2 est petit. On utilise le développement en série de Legendre. On obtient

$$P_{1,2} = \frac{1}{a_2} + \frac{3}{4}\frac{a_1^2}{a_2^3}\left[\frac{1}{2}(e_1^2+e_2^2) - \frac{1}{2}\left(\frac{p_1}{\sqrt{\Lambda_1}}-\frac{p_2}{\sqrt{\Lambda_2}}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{q_1}{\sqrt{\Lambda_1}}-\frac{q_2}{\sqrt{\Lambda_2}}\right)^2\right],$$

où

$$\begin{aligned} z_j &= \sqrt{2}\rho_{2,j}e^{-i\Omega_j} = p_j + iq_j \\ \rho_{2,j} &= 2\Lambda_j\sqrt{1-e_j^2}|\zeta_j|^2, \end{aligned}$$

d'où

$$\bar{\zeta}_j = \sin i_j/2\, e^{-i\Omega_j} = \frac{z_j}{2\sqrt{\Lambda_j}}\frac{1}{(1-e_j^2)^{1/4}},$$

$$\bar{\zeta}_1\zeta_2 + \bar{\zeta}_2\zeta_1 = 2(p_1p_2+q_1q_2),$$

$$|\zeta_1|^2 = \frac{|z_j|^2}{4\Lambda_j}\left(1+\frac{1}{2}e_j^2+O(e_j^4)\right).$$

Termes d'ordre 4 utilisés dans la suite

Problème plan

$$\frac{a_1^2}{a_2^3}\left[\left(-\frac{3}{8}+O\left(\frac{a_1}{a_2}\right)\right)\frac{|r_1|^4}{\Lambda_1^2}+\left(\frac{9}{4}+O\left(\frac{a_1}{a_2}\right)\right)\frac{|r_1|^2|r_2|^2}{\Lambda_1\Lambda_2}+\left(\frac{3}{2}+O\left(\frac{a_1}{a_2}\right)\right)\frac{|r_2|^4}{\Lambda_2^2}\right].$$

Le seul point qu'on utilisera est $-3/8<0$ et $3/2>0$.

Problème plan et dans l'espace

$$\frac{a_1^2}{a_2^3}\left[\begin{array}{l}\left(-\frac{3}{8}+O\left(\frac{a_1}{a_2}\right)\right)\frac{|r_1|^4}{\Lambda_1^2}+c_2\frac{|z_1|^4}{\Lambda_1^2}+2c_3\frac{|r_1|^2|z_1|^2}{\Lambda_1^2}+\\ O\left(\frac{1}{\Lambda_1^{2+1/4}}\right)+\text{termes résonnants en } 1/\Lambda_1^2\end{array}\right],$$

où $4c_2=3/8$ et $4c_3=-3/2$, et $|z_1|^2=p_1^2+q_1^2$. Le seul point qu'on utilisera est $c_2>0$ (la valeur de c_3 n'aura aucune importance).
Il y a seulement 52 termes d'ordre 4 et 26 termes en a_1^2/a_2^3.

Développement en les coefficients de Laplace

$$P_{1,2}=\frac{1}{(2\pi)^2a_1^2a_2^2(1-e_1^2)^{1/2}(1-e_2^2)^{1/2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r_1^2r_2^2}{\Delta^{1/2}}\,dv_1\,dv_2.$$

On écrit

$$\frac{\Delta}{r_2}=\Delta_1-2\frac{r_2}{r_1}U=\Delta_1-U_1,$$

avec

$$\Delta_1=1+\frac{r_1^2}{r_2^2}-2\frac{r_1}{r_2}\cos(v_1-v_2+(g_1+\Omega_1)-(g_2+\Omega_2))$$

et

$$\left(\frac{\Delta}{r_2}\right)^{-1/2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_k(-U_1)^k}{\Delta_1^{k/2}},$$

en notant

$$\left(-\frac{1}{2}\right)_k=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}+k-1\right).$$

En procédant comme dans le problème plan, on obtient le développement en coefficients de Laplace en puissances de e_j et de $\sin\frac{i_j}{2}$ croissantes.

Termes en les carrés des inclinaisons On peut supposer $e_1=e_2$, $r_1=a_1$, $r_2=a_2$. On a

$$\begin{aligned}&\frac{2}{a_2}b_{3/2}^{(1)}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\tilde{S}\cos(\tilde{w}_2-w_2)\,dv_1\,dv_2\\ &=-\frac{1}{8a_2}b_{3/2}^{(1)}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)\left[\left(\frac{p_1}{\sqrt{\Lambda_1}}-\frac{p_2}{\sqrt{\Lambda_2}}\right)^2+\left(\frac{q_1}{\sqrt{\Lambda_1}}-\frac{q_2}{\sqrt{\Lambda_2}}\right)^2\right].\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}P_{1,2}\;=\;&\frac{1}{a_2}\left[\begin{array}{l}b_{1/2}^{(0)}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)+\frac{1}{8}b_{3/2}^{(1)}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)\frac{e_1^2+e_2^2}{2}\\ -\frac{1}{4}b_{3/2}^{(2)}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)e_1e_2\cos(g_1+\Omega_1-g_2-\Omega_2)\end{array}\right]\\ &-\frac{1}{8}b_{3/2}^{(1)}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)\left[\left(\frac{p_1}{\sqrt{\Lambda_1}}-\frac{p_2}{\sqrt{\Lambda_2}}\right)^2+\left(\frac{q_1}{\sqrt{\Lambda_1}}-\frac{q_2}{\sqrt{\Lambda_2}}\right)^2\right].\end{aligned}$$

2.5 Partie séculaire en variables de Poincaré et coef. de Laplace (termes quadratiques de $P_{1,2}$

** Vérifier les facteurs deux et α **
Posant $\alpha = \dfrac{a_1}{a_2}$ $(0 < \alpha < 1)$

$$
\begin{aligned}
P_{1,2} &= \frac{1}{a_2}\left[\begin{array}{l}
\frac{1}{2}b_{1/2}^{(0)}(\alpha) + \frac{1}{8}\alpha b_{3/2}^{(1)}(\alpha)\left(\frac{|r_1|^2}{\Lambda_1} + \frac{|r_2|^2}{\Lambda_2}\right) \\
-\frac{1}{8}b_{3/2}^{(2)}(\alpha)\, 2\left(\frac{\xi_1\xi_2}{\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}} + \frac{\eta_1\eta_2}{\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}}\right) \\
-\frac{1}{8}\alpha b_{3/2}^{(1)}\left(\frac{p_1}{\sqrt{\Lambda_1}} - \frac{p_2}{\sqrt{\Lambda_2}}\right)^2 + \left(\frac{q_1}{\sqrt{\Lambda_1}} - \frac{q_2}{\sqrt{\Lambda_2}}\right)^2
\end{array}\right] \\
&\quad + Q_4 + Q_6 + \ldots
\end{aligned}
$$

La partie moyennisée du problème des $n+1$ corps vaut

$$
-\sum_{1\le j<k\le n} M_j M_k P_{j,k}.
$$

On désigne par $A_{P,n}$ la matrice de la forme quadratique Q_{P_n} et par $A_{I,n}$ celle de $Q_{I,n}$. On écrit $A_{P,n} = (b_{j,k})_{1\le j,k\le n}$. On suppose $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. On a

$$
P_{i,j} = -\frac{1}{\Lambda_j}\left(\begin{array}{l}
\sum_{k=j-1}^{n} M_j M_k \frac{1}{a_k}\frac{a_j}{a_k} b_{3/2}^{(}1)\left(\frac{a_j}{a_k}\right) + \\
\sum_{k=j+1}^{n} M_j M_k \frac{1}{a_j}\frac{a_k}{a_j} b_{3/2}^{(}1)\left(\frac{a_k}{a_j}\right)
\end{array}\right),
$$

$$
\begin{aligned}
b_{j,k} &= \frac{M_j M_k}{\sqrt{\Lambda_j \Lambda_k}}\frac{1}{a_k}\frac{a_j}{a_k} b_{3/2}^{(2)}\left(\frac{a_j}{a_k}\right) \quad \text{si } j<k \\
&= \frac{M_j M_k}{\sqrt{\Lambda_j \Lambda_k}}\frac{1}{a_j}\frac{a_k}{a_j} b_{3/2}^{(2)}\left(\frac{a_k}{a_j}\right) \quad \text{si } j>k.
\end{aligned}
$$

On remarque que $A_{I,n}$ a les mêmes termes diagonaux que $-A_{P,n}$. Ceci implique que

$$
Trace(A_{P,n}) + Trace(A_{I,n}) = 0
$$

et donc, comme $\sigma_{I,n,n} = 0$,

$$
\sum_{j=1}^{n} \sigma_{P,n,j}(\Lambda) + \sum_{j=1}^{n-1} \sigma_{I,n,j}(\Lambda) \equiv 0.
$$

Dans la suite on utilisera cette relation (bien qu'il soit probable que l'on puisse l'éviter).
Pour la suite c'est le seul point où l'on utilise les coefficients de Laplace.
Dans les remarques qui suivent on utilise les coefficients de Laplace.

Lemme 3. *La forme quadratique $Q_{P,n}(\Lambda)$ est définie négative. Cf. [Fé].*

Il n'y a donc pas de racine nulle pour le problème plan: $Q_{P,n}(\Lambda)(\xi) < 0$ si $\xi \neq 0$, et $Q_{I,n}(p) \geq 0$ a un noyau.

Racines doubles (contre-exemple à un "théorème" de Laplace) Pour la suite le problème n'est pas la réduction des formes quadratiques réelles $Q_P(\Lambda)(\xi)$ ou $Q_I(\Lambda)(p)$, mais la dépendance C^ω de $\sigma_{P,n,j}(\Lambda)$ et de $\sigma_{I,n,j}(\Lambda)$ en Λ.

Cas $n+1=3$ On remarque qu'une matrice symétrique 2×2 (sur $\mathbb{R}$) qui a deux valeurs propres égales est diagonale. En utilisant l'expression de $A_{P,2}$ en fonction des coefficients de Laplace, comme $b^{(2)}_{3/2}(\alpha)\neq 0$ si $\alpha\neq 0$, on voit que $A_{P,2}(\Lambda_1,\Lambda_2)$ n'est pas diagonale (si $0<\alpha<1$). *Il n'y a donc pas de racines doubles pour $-A_{P,2}$, ni d'ailleurs pour $A_{I,2}$.*

Cas $n+1=4$ On suppose

$$a_1<a_2<a_3<a_4,\ a_1\ll 1,\ a_2\sim 1,\ a_3\geq 2a_2,\ a_3\sim 2,\ a_4\gg 1,$$

et $M_1=M_4=\epsilon$, $0<\epsilon\ll 1$, $M_2\sim 1$, $M_3\sim 1$. On rappelle que $\Lambda_j=M_j\sqrt{a_j}$ et $\Lambda_j^{1/2}=M_j^{1/2}a_j^{1/4}$.

Proposition 4. *Pour ϵ assez petit, $-A_{P,4}$ a des racines doubles.*

Démonstration.

$$-A_{P,4}=\begin{pmatrix} b_11 & O(\epsilon^{1/2}) & \dots & O(\epsilon^{1/2})\\ O(\epsilon^{1/2}) & \hat{b}_{22}+O(\epsilon^{1/2}) & b_{2,3} & \vdots\\ O(\epsilon^{1/2}) & b_{2,3} & \hat{b}_{33}+O(\epsilon^{1/2}) & O(\epsilon^{1/2})\\ O(\epsilon^{1/2}) & \dots & \dots & b_{44}\end{pmatrix},$$

avec

$$b_{11}=\frac{1}{8}\left(M_2\frac{a_1^2}{a_2^3}+M_3\frac{a_1^2}{a_3^2}+O(\epsilon)+O(a_1^3)\right),$$

$$b_{44}=\frac{1}{8}\left(M_2\frac{a_2^2}{a_4^3}+M_3\frac{a_3^2}{a_4^2}+O(\epsilon)+O(a_4^3)\right)$$

$$b_{1j}=O(\epsilon^{1/2}),\ 2\leq j\leq 4$$

$$b_{j4}=O(\epsilon^{1/2}),\ 1\leq j\leq 3$$

$$b_{22}=\frac{1}{8}\frac{M_3M_2}{\Lambda_2}\frac{1}{a_3}\frac{a_2}{a_3}b^{(1)}_{3/2}\left(\frac{a_2}{a_3}\right)+O(\epsilon)$$

$$b_{33}=\frac{1}{8}\frac{M_3M_2}{\Lambda_3}\frac{1}{a_3}\frac{a_2}{a_3}b^{(1)}_{3/2}\left(\frac{a_2}{a_3}\right)+O(\epsilon)$$

$$b_{23}=b_{32}=-\frac{1}{8}\frac{M_3M_2}{\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}}\frac{1}{a_3}\frac{a_2}{a_3}b^{(2)}_{3/2}\left(\frac{a_2}{a_3}\right)+O(\epsilon).$$

Pour $a_1^2\sim a_4^{-3}$, $b_{11}-b_{44}$ s'annule.

On suppose que $\epsilon\to 0$. Soit $\Delta_1\in SO(2)$ telle que

$${}^t\Delta_1\begin{pmatrix} b_{22} & b_{32}\\ b_{32} & b_{33}\end{pmatrix}\Delta_1=\begin{pmatrix}\delta_2 & 0\\ 0 & \delta_3\end{pmatrix}\ ;$$

on a $|\delta_2-\delta_3|\geq\lambda>0$ si $\epsilon\to 0$. En considérant ${}^t\Delta_2-A_{P,4}\Delta_2$, avec

$$\Delta_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \Delta_1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in M_{4\times 4}(\mathbb{R}),$$

on suppose par l'absurde, pour $0<\epsilon_1\leq a_1\leq 1/200$, $0<\epsilon_2\leq 1/a_4\leq 1/200$, que A_{P_4} n'a pas de racines doubles sur ce domaine compact quand $\epsilon\to 0$. On obtient un développement limité des racines petites (lemme $b_{11}+O(\epsilon)$, $b_{44}+O(\epsilon)$).

On choisit ϵ_1 et ϵ_2 pour que sur le domaine compact $b_{11}-b_{44}$ s'annule en changeant de signe et on conclut que $A_{P,4}$ a forcément des racines doubles pour $\epsilon>0$ assez petit. $\square$

3 Torsion pour le problème plan

Soit $Q_{4,n}$ la somme des termes d'ordre 4 de P_n (il n'y a pas de termes d'ordre 3). Il faut calculer les termes résonnants de $Q_{4,n} \circ B_n$, avec

$$B_n(r,z) = (a_{P,n}(\xi) + ia_{P,n}(\eta), a_{I,n}(p) + ia_{I,n}(q))$$

et

$$B_n(\bar{r},\bar{z}) = \overline{B_n(r,z)}.$$

Posons $\rho_{P,j} = r_j\bar{r}_j$ et $\rho_{I,j} = z_j\bar{z}_j$.
Les termes résonnants donnent une forme quadratique en les $(\rho_{P,j}, \rho_{I,j})$ et on note T_n la matrice $4n \times 4n$ associée. On note $T_{P,n}$ la matrice $2n \times 2n$ pour le problème plan. On veut montrer que $\det T_n \neq 0$ et que $\det T_{P,n} \neq 0$. !!!!!!!!!!!!!!!!!!!! not equivalent

3.1 Principe de prolongement analytique

$SO(n,\mathbb{C})$ est le groupe complexifié de $SO(n,\mathbb{R})$:

$$SO(n,\mathbb{C}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}),\ {}^tAA = Id\}.$$

Soit $M \in M_{n\times n,s} = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}),\ {}^tA = A\}$ dont toutes les valeurs propres (δ_j) sont distinctes.

Lemme 5. *Il existe $b_1 \in SO(n,\mathbb{C})$ tel que*

$${}^tb_1Mb_1 = \begin{pmatrix} \delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_n \end{pmatrix} = \Delta_1$$

et deux solutions b_j, $j = 1,2$ vérifient $b_1 = b_2c$, avec $c \in C = \{Diag(\pm 1, ..., \pm 1)\}$.

Remarque. La matrice symétrique

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable (toutes ses valeurs propres sont nulles).

Démonstration. Il existe $b \in GL(n,\mathbb{C})$ tel que $b^{-1}Mb = \Delta_1$ et bc_1 est aussi une solution si c_1 est une matrice diagonale.
D'autre part, par symétrie ${}^tbM{}^tb^{-1} = \Delta_1$ et donc ${}^tb = c_2b^{-1}$ où c_2 est une matrice diagonale. Soit c_1 une matrice diagonale vérifiant $c_1^2 = c_2$. Alors $bc_1^{-1} = b_1 \in SO(n,\mathbb{C})$ et ${}^tb_1b_1 = id$. D'où $b_1^{-1} = {}^tb_1$ et $b_1^{-1}Mb_1 = \Delta_1$. □

Soit

$$\mathbb{D} = \{\Delta \in M_{n\times n}(\mathbb{C}),\ \Delta = \mathrm{Diag}\,(\delta_1, ..., \delta_n),\ \delta_i \neq \delta_j,\ i \neq j\}.$$

Il suit du lemme que l'application

$$(b,\Delta) \in SO(n,\mathbb{C}) \times \Delta \mapsto {}^tb\Delta b \in M_{n\times n,s}$$

est un revêtement sur son image, la fibre du revêtement étant le groupe fini C.

Proposition 6. *On suppose que sur un ouvert $U \neq \emptyset$, $U \subset D_{n,sd} \cap \mathbb{R}^n$, on a $\det T_{P,n}(a) \neq 0$. Alors, sur un ouvert dense de $D_n \cap \mathbb{R}^n$, $\det T_{P,n} \neq 0$ (sur $D_{n,sd}$, $\det T_{P,n} = 0$ est un ensemble analytique).*

Démonstration. On complexifie et on joint $x_j \in D_{n,sd} \cap \mathbb{R}^n$, $j = 1,2$, par un chemin C^ω dans $D_{n,sd}$. Le fait que $\det T_{P,n}(a) \neq 0$ ne dépend pas des choix de b_1c, $c \in C$ et, si $a \in D_{n,sd} \cap \mathbb{R}^n$, $A_{P,n} \in M_{n\times n,s}(\mathbb{R})$ et $c \in O(n,\mathbb{R})$ et $\bar{b}_1 = b_1 \in SO(n,\mathbb{R})$ il suit que $\det T_{P,n}(a) \equiv 0$ sur un ouvert $V \neq \emptyset$, ce qui est absurde. □

3.2 Cas $n = 2$

On a, si $a_1 \to 0$,

$$a_{P,2}(a_1) - 1 = O(a_1^{1+1/4}). \qquad (+)$$

On regarde les termes de plus bas degré parmi les termes résonnants $R_{4,P,2}$ de $Q_{4,P,2}$ et on obtient une matrice

$$-\hat{T}_{P,2} = M_1 M_2 \begin{pmatrix} a\dfrac{a_1^2}{\Lambda_1^2} & b\dfrac{a_1^2}{\Lambda_1\Lambda_2} \\ b\dfrac{a_1^2}{\Lambda_1\Lambda_2} & c\dfrac{a_1^2}{\Lambda_2^2} \end{pmatrix} + a_1^3 O \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\Lambda_1^2} & \dfrac{1}{\Lambda_1\Lambda_2} \\ \dfrac{1}{\Lambda_1\Lambda_2} & \dfrac{1}{\Lambda_2^2} \end{pmatrix}$$

avec $a = -3/8$, $b = 9/8$ et $c = 3/2$.
Si $d_1 < 0$ et $c_1 > 0$,

$$\det \begin{pmatrix} d_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} = d_1 c_1 - b_1^2 < 0.$$

Donc

$$\det \hat{T}_{P,2} < 0$$

si $a_1 \to 0$.
Soit $B_P(\xi, \eta) = (a_P(\xi), a_P(\eta))$.
On remarque que $R_{4,P,2} \circ B_{P,n,2}(a_1)$ donne des termes résonnants, mais (d'après (+)) de degré minoré par celui de $\dfrac{a_1^2}{\Lambda_1} a_1^{1+1/4} = a_1^{2+1/4}$.
D'autre part, soit T un terme résonnant de $Q_{4,P,n}$. Alors $T \circ B_{P,2}$ donne des termes résonnants, mais (d'après (+)), leur degré est minoré par celui de $\dfrac{a_1^2}{\Lambda_1^2} a_1^{1+1/4} \geq a_1^{2+1/4}$ (en fait on a mieux : T est $O(a_1^3/\Lambda_1)$).
Remarque : Si $a_1 \to 0$, $T_{P,2}$ est indéfinie.

3.3 Récurrence

On suppose que $\det T_{P,n-1}(a)$ n'est pas identiquement nul. On se place sur un ouvert V de $D_{n-1,sd} \cap \mathbb{R}^n$ sur lequel $\det T_{P,n-1}(a) \neq 0$.
Soit $\hat{a}_{P,n-1}(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) = (\xi_1, a_{P,n-1}(\xi_2, ..., \xi_n))$. Si $a_1 \to 0$ on a

$$a_{P,n} = \hat{a}_{P,n} \left(1 + O\left(a_{n,1}^{2-1/4}\right)\right) \in SO(n, \mathbb{R}) \qquad (*).$$

On regarde les termes résonnants de $Q_{4,P,n} \circ \hat{B}_{P,n}$ et sa matrice

$$\hat{T}_n = \begin{pmatrix} \hat{b}_{11} & 0 \\ 0 & T_{n-1} \end{pmatrix} + O\left(\frac{a_{n,1}^2}{\Lambda_{n,1}}\right)$$

avec

$$\hat{b}_{11} = \frac{3}{8} \sum_2^n \frac{M_1 M_k}{\Lambda_{n,1}^2} \frac{a_{n,1}^2}{a_{n,k}^2} + O\left(\frac{a_{n,1}^3}{\Lambda_{n,1}^2}\right) = O(a_{n,1}).$$

En utilisant (*) on obtient que les termes de plus bas degré en $a_{n,1}$ de $\det T_n$, si $a_{n,1} \to 0$, valent

$$\det T_n(a) = \hat{b}_{11} \det T_{n-1}(a) + 0\left(\frac{a_{n,1}^2}{\Lambda_{n,1}}\right) \neq 0.$$

La récurrence suit du principe du prolongement analytique.

4 Torsion pour le problème dans l'espace

Soit

$$K_n = C_x + iC_y = \sum_1^n z_j \sqrt{\Lambda_j - \frac{|r_j|^2}{2} - \frac{|z_j|^2}{4}}$$

l'intégrale du moment cinétique (partie horizontale). Sa norme vaut

$$|K_n|^2 = K_n \bar{K}_n = C_x^2 + c_y^2.$$

Les termes d'ordre deux sont

$$|K|_{2,n}^2 = \left(\sum_1^n z_j \sqrt{\Lambda_j}\right)\left(\sum_1^n \bar{z}_j \sqrt{\Lambda_j}\right).$$

Il n'y a pas de termes de degré impair. Les termes de degré 4 valent

$$\begin{aligned} |K|_{2,n}^2 &= -2\sum_1^n z_i \bar{z}_j (|r_j|^2 + |z_j|^2/2) \\ & \quad -2 \sum_{1\le i<j\le n} \sqrt{\Lambda_i \Lambda_j}(z_i\bar{z}_j + z_j\bar{z}_i)\left(\frac{|r_i|^2}{\Lambda_i} + \frac{|r_j|^2}{\Lambda_j} + \frac{|z_j|^2}{\Lambda_j} + \frac{|z_i|^2}{\Lambda_i}\right) \end{aligned}$$

Pour calculer la torsion de la fonction perturbatrice il faut calculer les termes $Q_{4,n}$ d'ordre 4 de la fonction perturbatrice

$$P_n = -\sum 1 \le j < k \le n M_j M_k P_{j,k},$$

puis

$$Q_{4,n} \circ B_n.$$

Ensuite les coefficients de la matrice symétrique $2n \times 2n$

$$T_n = \begin{pmatrix} |r_1|^4 & ... & \frac{1}{2}|r_1|^2|r_n|^2 & \frac{1}{2}|r_1|^2|z_1|^2 & ... & \frac{1}{2}|r_1|^2|z_n|^2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{2}|r_n|^2|r_1|^2 & ... & |r_n|^4 & \frac{1}{2}|r_n|^2|z_1|^2 & ... & \frac{1}{2}|r_n|^2|z_n|^2 \\ \frac{1}{2}|z_1|^2|r_1|^2 & ... & \frac{1}{2}|z_1|^2|r_n|^2 & |z_1|^4 & ... & \frac{1}{2}|z_1|^2|z_n|^2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{2}|z_n|^2|r_1|^2 & ... & \frac{1}{2}|z_n|^2|r_n|^2 & \frac{1}{2}|z_n|^2|z_1|^2 & ... & |z_n|^4 \end{pmatrix}$$

Pour simplifier le calcul et comme on l'utilisera dans la suite on calcule la torsion de

$$Q_{4,n} + 2\delta|K_{4,n}|^2,$$

qui est celle de $P + 2\delta|K_n|^2$.

Si on compose $a_{P,n}$ par une matrice S_n de permutation on peut supposer que

$$a_{I,n} \circ S_n(e_n) = v_n = \left(\frac{\sqrt{\Lambda_1}}{\sqrt{\Lambda_1 + ... + \Lambda_n}}, ..., \frac{\sqrt{\Lambda_1}}{\sqrt{\Lambda_1 + ... + \Lambda_n}}\right)$$

et donc

$$2\delta|K|_{2,n}^2 \circ a_{I,n} \circ S_n = 2\delta|z_n|^2.$$

Ceci ne change pas la torsion et consiste seulement à faire une permutation sur les indices des variables.

4.1 Cas $n+1=3$

On suppose $a_2 = 1$, $a_1 \to 0$.
On a
$$a_{P,2} - I = O(a^{1+1/4}) \tag{1}$$
et
$$a_{I,2} = \begin{pmatrix} \beta_2 & \alpha_2 \\ -\alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \frac{\sqrt{\Lambda_1}}{\sqrt{\Lambda_1 + \Lambda_2}},\ \beta_2 = \frac{\sqrt{\Lambda_2}}{\sqrt{\Lambda_1 + \Lambda_2}},$$
donc
$$a_{I,2} - 1 = O(a^{1/4}). \tag{2}$$
On regarde les termes résonnants de $Q_{4,2} \circ B_2$ de plus bas degré en a_1 :
$$-T_2 = M_1M_2 \begin{pmatrix} c_1\frac{a_1^2}{\Lambda_1^2} & 0 & c_3\frac{a_1^2}{\Lambda_1^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_3\frac{a_1^2}{\Lambda_1^2} & 0 & c_2\frac{a_1^2}{\Lambda_1^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + O(a_1^{2-1/4}),$$
où $\frac{a_1^2}{\Lambda_1^2} = \frac{a_1}{M_1^2}$. Les points importants sont $c_1 < 0$, $c_2 > 0$. En fait, $c_1 = -3/8$, $4c_2 = 3/8$ et $2c_3 = -3/4$. Le calcul complet des termes d'ordre 4 est horrible (il y a seulement 52 termes). En utilisant (1) et (2), il suit que les termes de taille $O(a_1^2/\Lambda_1^2)$ ne proviennent pas des termes résonnants de même taille de $Q_{4,2}$.
On regarde les termes résonnants de $2\delta|K_4| \circ B_2$ et on obtient la matrice
$$\delta\Delta_2 = \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 & g_1 & g_2 \\ 0 & 0 & g_3 & -1 \\ g_1 & g_3 & g_5 & g_6 \\ g_2 & -1 & g_6 & g_2 \end{pmatrix} + \delta\, O(a_1^{1/4}).$$
Pour calculer les g_j il faut considérer
$$|K|^2_{4,2} \circ B_2 = |K|^2_{4,2}(I, a_{I,2}) + O(a_1^{1+1/4})$$
et, par (2),
$$(z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) \circ a_{I,2} = O(a_1^{1/4}) + \text{termes non résonnants.}$$
Le point est que le facteur
$$-\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}\left(\frac{|z_1|^2}{2\Lambda_1} + \frac{|r_1|^2}{\Lambda_1}\right)$$
contient un facteur $1/\sqrt{\Lambda_1}$ qui devient $O(1)$ quand on le multiplie par (3).
Nous laissons le lecteur vérifier $g_1 = g_3 = 0$, mais on ne l'utilisera pas.

Torsion de $-M_1M_2P_{1,2} - 2\delta|K_2|^2$ $\quad a1 < a_2$, $a_2 = 1$. La torsion est une fonction C^ω de $a_1^{1/4}$. On veut montrer que cette fonction n'est pas identiquement nulle si $a_1 \to 0$. On cherche le terme en $a_1^2\delta^2$ de $\det(T_2 + \delta\Delta_2)$.
La seule façon de l'obtenir en négligeant les termes $\delta^2 O(a_1^{1/4})$ est en démontrant
$$\det \begin{pmatrix} M_1M_2c_1\frac{a_1}{M_1^2} & 0 & M_1M_2c_3\frac{a_1}{M_1^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \\ M_1M_2c_3\frac{a_1}{M_1^2} & 0 & M_1M_2c_2\frac{a_1}{M_1^2} & 0 \\ 0 & \delta & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Puisque

$$\det \begin{pmatrix} c_1 & c_3 \\ c_3 & c_2 \end{pmatrix} = c_1 c_2 - c_3^2 < 0,$$

car $c_1 < 0$ et $c_2 > 0$, la fonction analytique $\det(T_2 + \delta\Delta_2)$ n'est pas identiquement nulle (le coefficient de $a_1^2\delta^2$, quand $a_1 \to 0$ et $\delta \to 0$, est non identiquement nul).

Remarque : J'ignore si $\det T_2(a)$ est identiquement nulle !

Corollaire 7. *Dans l'ensemble $\{(a_{,1}, a_2, \delta),\ 0 < a_1 < a_2\}$ les points où la torsion s'annule est un ensemble analytique (nulle part dense).*

Récurrence Comme la seule chose que nous sachions faire est de faire dépendre tout sur les masses $M_{n,j}$ ($M_{n,j}$ est la masse de la particule en $a_{n,j}$), nous allons supposer que $M_{n,1} \to 0$ et $a_{n,1} \to 0$, avec toujours $\Lambda_{n,1} = M_{n,1}\sqrt{a_{n,1}}$.

On regarde la dépendance en $M_{n,1}$. On ajoute la particule $M_{n,1}$ en

$$a_{n,1} < a_{n,2} = a_{n-1,1} < \ldots$$

Notons

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \ldots & \\ \vdots & \ddots & & \\ & & b_{jj} & \ldots \\ & & \ldots & \end{pmatrix}.$$

b_{11} ne dépend pas de M_1, et $b_{1,j} = M_{n,1}^{1/2} O(a_{n,1}^{2-1/4})$. Il suit que

$$^t\hat{a}_{P,n-1} \cdot a_{P,n} - 1 = O(M_n^{1/2} a_1^{2-1/4})$$

et, de façon similaire, en utilisant l'expression de E_n,

$$^t\hat{a}_{I,n} a_{I,n} - 1 = O(M_{n,1}^{1/2} a_{n,1}^{1/4})$$

(avec nos conventions, $a_{I,n-1}(e_1) = v_{n-1}$, $a_{I,n} = \hat{a}_{I,n} \cdot E_n(e_2) = v_n$).

Dans $-Q_{4,n} \circ B_n$ on considère les termes

$$\sum_{j=2}^{n} M_{n,1} M_{n,j} P_{1,j}.$$

On a

$$\frac{a_{n,1}}{M_{n,1}} \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{M_{n,k}}{a_{n,k}^3} \right) \left(c_1 |r_1|^4 + 2c_3 |z_1|^2 |r_1|^2 + c_2 |z_1|^4 \right)$$

$$+\text{termes avec } a_{n,1}^{1/4+1} M_{n,1}^{1/2} \text{ en facteur},$$

avec[12] $c_1 = -3/8$, $4c_2 = 3/8$ et $4c_3 = -3/2$. Le seul point que nous utiliserons est $c_1 < 0$ et $c_2 > 0$.

On multiplit la première et la $(n+1)$-ième ligne de $T_{n,\delta}$ par $M_{n,1}$. On veut montrer

$$M_{n,1}^2 \det T_{n,\delta} = a_{n,1}^2 \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{M_{n,k}}{a_{n,k}^3} \right)^2 \det \begin{pmatrix} c_1 & c_3 \\ c_3 & c_2 \end{pmatrix} \det \left(T_{n-1,\delta} + O(a_{n,1}^{1/4} M_{n,1}^{1/2}) \right) + O(M_{n,1}^{1/2}),$$

où on a noté

$$T_{n,\delta} = T_n + \delta\Delta_n,$$

[12] Comme précédemment

où Δ_n est la matrice des termes résonnants de $2|K|^2_{4,n} \circ B_n$. Nous allons décrire rapidement la contribution du dernier terme aux termes résonnants

$$2|K|^2_{4,n} \circ B_n = 2|K|^2_{4,n-1} \circ B_{n-1} + O(M_{n,1}^{1/2} a_{n,1}^{1/4}) - \big[(2|z_1|^4 + 2|r_1|^4) +$$

$$2\sum_{j=2}^{n} \sqrt{\Lambda_1 \Lambda_j}(z_1 \bar{z}_j + \bar{z}_1 z_j)\left(-\frac{|r_1|^2}{\Lambda_1} - \frac{|r_j|^2}{\Lambda_j} - \frac{|z_1|^2}{2\Lambda_1} - \frac{|z_j|^2}{2\Lambda_j}\right)\big] \circ B_n. \qquad (*)$$

Les termes résonnants dans la dernière expression sont de la forme $|z_1|^2|r_k|^2$, où $|z_1|^2|r_k|^2 = O(1) + O(a_{n,1}^{1/4} M_{n,1}^{1/4})$.

Si on enlève à $T_{n,\delta}$ la première ligne et la première colonne et les $(n+1)$-ième ligne et colonne on obtient $T_{n-1} + \delta\Delta_{n-1} + O(M_{n,1}^{1/2} a_{n,1}^{1/4})$ et les éléments de Δ_n sur les $(n+1)$-ièmes ligne et colonne sont

$$c_{n+1,j} + O(a_{n,1}^{1/4} M_{n,1}^{1/2}),$$

où les $c_{n+1,j}$ ne dépendent pas de $a_{n,1}$ ni de $M_{n,1}$.

Remarque. Dans le deuxième terme de (*), les termes qui sont $O(1)$ sont ceux qui viennent de $|z_1|^4$, de $|r1|^4$ et de

$$\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_j}(z_1 \bar{z}_j + \bar{z}_1 z_j)\left(-\frac{|r_1|^2}{\Lambda_1} - \frac{|z_1|^2}{2\Lambda_1}\right) = O\left(\frac{1}{M_{n,1}^{1/2} a_{n,1}^{1/2}}\right).$$

On se place sur

$$W_n = \{((M_{n,1}, ..., M_n), a = (a_{n,1}, ..., a_{n,n}), \delta) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \times D_{n,sd} \times \mathbb{R}\}.$$

La torsion de $Q_{4,n} + 2\delta|K_{4,n}|^2$ est une fonction C^ω en les $M_{n,j}^{1/2}$, $a_{n,j}^{1/4}$, méromorphe si $M_{n,j} \to 0$; $M_{n,1}^2 \det T_{n,\delta}$ est une fonction $C\omega$ en δ, $M_{n,j}^{1/2}$, $a_{n,j}^{1/4}$ même en $a_{n,1} = 0$ et $M_{n,1} = 0$.

Pour $n + 1 = 3$, $\det T_{2,\delta} = 0$ est un ensemble analytique nulle part dense. On se place sur un ouvert non vide, d'adhérence compacte, sur lequel $\det T_{n-1,\delta} \neq 0$. Si $M_{n,1} \to 0$ et $a_{n,1} \to 0$, $\det T_{n,\delta}$ a un pôle $\frac{c}{M_{n,1}^2}$,

$$c = \det \begin{pmatrix} c_1 & c_3 \\ c_3 & c_2 \end{pmatrix} \det T_{n-1,\delta} \neq 0$$

(si $a_{n,1} \neq 0$) puisque $-c_1 > 0$ et $c_2 > 0$.

La fonction $det(T_{n,\delta})$ n'est pas identiquement nulle. Par le principe du prolongement analytique, il s'en suit :

Proposition 8. *Sur W_n, $\{\det\ T_{n,\delta} = 0\}$ est un ensemble analytique nulle part dense.*