

---

# UN THÉORÈME SUR LES ACTIONS DE GROUPES DE DIMENSION INFINIE

par

Jacques Féjoz & Mauricio Garay

---

Présentée par Maxime Kontsevitch

Reçue le 4 mai 2009 ; acceptée après révision le 26 janvier 2010

**Résumé.** — L'objet de cette Note est de donner, dans un cadre analytique, un critère infinitésimal pour qu'un espace vectoriel soit localement homogène sous l'action d'un groupe. Dans le cas  $C^\infty$ , un tel résultat a été démontré par Sergeraert dans sa thèse, en utilisant un théorème d'inversion locale dans les espaces de Fréchet [4, Théorème 4.2.5 et Corrolaire 4.2.6] (voir également [3, 5]).

Notre approche diffère de celle de Sergeraert par l'usage direct de la structure de groupe sous-jacente. En suivant la méthode itérative utilisée par Kolmogorov et Arnold dans leur démonstration du théorème des tores invariants [2, 1], elle fournit une réponse à l'heuristique donnée par Zehnder [5, Chap. 5].

**Abstract.** — **A theorem on infinite dimensional group actions.**

In this Note we give an infinitesimal criterion, in an analytic setting, for a vector space to be locally homogeneous under some group action. In the  $C^\infty$  case, such a result was obtained by Sergeraert in his thesis, using an inverse function theorem in Fréchet spaces [4, Théorème 4.2.5 et Corrolaire 4.2.6] (see also [3, 5]).

Our approach differs from that of Sergeraert because we directly use the underlying group structure. By following the iterative method used by Kolmogorov and Arnold in the proof of the invariant tori theorem [2, 1], it provides an answer to the heuristic question asked by Zehnder [5, Chap. 5].

1. Une *échelle de Banach*  $(E_s)_{s \in ]0,1[}$ , est une famille décroissante d'espaces de Banach sur  $\mathbb{R}$  telle que les inclusions  $E_{s+\sigma} \subset E_s$ ,  $0 < s < s + \sigma < 1$ , soient de norme  $\leq 1$ .

Un *espace vectoriel échelonné*  $E$  est la donnée d'un espace vectoriel  $E$  et d'une échelle de sous-espaces de Banach  $(E_s)_{s \in ]0,1[}$  de  $E$ , dont  $E$  est la réunion. Nous noterons  $B_s^E$  la boule unité de  $E_s$  centrée en l'origine.

Une application linéaire  $u : E \rightarrow F$  entre espaces vectoriels échelonnés est *k-bornée*,  $k > 0$ , si la quantité

$$N_k(u) := \sup_{s < s + \sigma, x \in E_{s+\sigma}} \sigma^k \frac{|u(x)|_s}{|x|_{s+\sigma}}$$

est finie.

**2.** Soit  $G$  un fermé d'un espace vectoriel échelonné  $F = \bigcup_s F_s$  muni d'une structure de groupe d'élément neutre  $e$ . Par la suite on supposera que les inclusions  $F_{s+\sigma} \rightarrow F_s$  sont compactes. La norme de  $F_s$  induit une distance sur  $G \cap F_s$ ; notons

$$\sigma B_s^G = (e + \sigma B_s^F) \cap G$$

la boule de centre  $e$  et de rayon  $s$ . Nous dirons que  $G$  est un *groupe échelonné par  $F$*  si

$$(G) \quad \forall g \in \sigma B_{s+\sigma}^G, \text{ et } g' \in \sigma' B_s^G, \quad gg' \in (\sigma + \sigma') B_s^G$$

dès que  $0 < s < s + \sigma' < 1$  et  $0 < \sigma < 1$ .

Soient donc  $G$  un groupe échelonné et  $\mathfrak{g} = \bigcup_s \mathfrak{g}_s$  un espace vectoriel échelonné. Une application

$$\varphi : \bigcup_{s,\sigma} (\sigma B_{s+\sigma}^{\mathfrak{g}}) \rightarrow G, \quad \xi \mapsto \varphi(\xi), \quad 0 \mapsto e$$

est  $\kappa$ -échelonnée,  $\kappa \geq 1$ , si

$$(\mathfrak{g}_\kappa) \quad \varphi(\sigma B_{s+\sigma}^{\mathfrak{g}}) \subset \kappa \sigma B_s^G$$

dès que  $0 < s < s + \sigma < 1$ .

**3.** Supposons à présent que  $G$  agisse sur un espace vectoriel échelonné  $E$ . L'action est *échelonnée* si elle induit des applications de classe  $C^1$  :

$$(e + \sigma B_s^F) \times E_{s+\sigma} \rightarrow E_s, \quad (g, x) \mapsto g \cdot x.$$

Une telle action induit une action infinitésimale de  $\mathfrak{g}$  :

$$\xi : E_{s+\sigma} \rightarrow E_s, \quad \xi x := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi(t\xi) x) \quad \text{avec } \xi \in \mathfrak{g}_s.$$

Notons  $0_E$  l'origine de l'espace vectoriel  $E$ . Nous dirons que l'action de  $G$  sur  $E$  est  *$M$ -modérée*,  $M \geq 1$ , par  $\varphi$  si, pour tout  $\xi \in \sigma B_{s+\sigma}^{\mathfrak{g}}$ ,  $(\varphi(\xi))^{-1} \xi 0_E$  appartient à  $E_s$  et satisfait :

$$(A_M) \quad \left| (\varphi(\xi))^{-1} \xi 0_E \right|_s \leq M \sigma^{-1} |\xi|_{s+\sigma}^2, \quad \text{pour tout } \xi \in \sigma B_{s+\sigma}^{\mathfrak{g}}$$

dès que  $0 < s < s + \sigma < 1$ .

**4. EXEMPLE.** Un exemple simple d'action vérifiant ces axiomes est donné par la construction suivante. Soit  $D_s$  le disque fermé de rayon  $s$  centré en l'origine dans  $\mathbb{C}$ . Notons  $E_s$  l'espace des fonctions holomorphes dans l'intérieur de  $D_s$  et continues sur  $D_s$ . L'espace vectoriel  $\mathcal{O}_{\mathbb{C},0} = \bigcup E_s$  des germes à l'origine de fonctions holomorphes est ainsi muni d'une structure d'espace vectoriel échelonné. Considérons le groupe  $G$  des germes de transformations biholomorphes tangentes à l'identité. Notons  $\mathcal{M}_{\mathbb{C},0}^2$  le carré de l'idéal maximal. Le paramétrage  $\mathcal{M}_{\mathbb{C},0}^2 \rightarrow G$ ,  $\xi \mapsto e + \xi$  munit  $G$  d'une structure de groupe échelonné avec  $\kappa = 1$ . Identifions le voisinage d'un germe  $a \in \mathcal{O}_{\mathbb{C},0}$  au voisinage de l'origine par la translation  $y \mapsto y - a$ ,  $y \in \mathcal{O}_{\mathbb{C},0}$ . L'action naturelle de  $G$  sur  $\mathcal{O}_{\mathbb{C},0}$  par composition à droite,  $y \mapsto y \circ g^{-1}$ , est conjuguée via cette translation à l'action

$$gx = (a + x) \circ g^{-1} - a.$$

Cette action est échelonnée et vérifie une condition  $(A_M)$  (la constante  $M$  dépendant de  $a$ ). On peut également considérer l'action à gauche et à droite, ainsi que la conjugaison.

**5. THÉORÈME.** Soit  $F = (F_s)$  un espace vectoriel échelonné dont les inclusions  $F_{s+\sigma} \subset F_s$  sont compactes. Soit  $G$  un groupe échelonné par un espace vectoriel échelonné  $F$ ,

agissant sur un espace vectoriel échelonné  $E$  dont l'action est  $M$ -modérée par une application  $\kappa$ -échelonnée  $\varphi$ . Si l'application linéaire  $\mathfrak{g} \rightarrow E$ ,  $\xi \mapsto \xi 0_E$  possède un inverse à droite  $k$ -borné  $j$ , l'inclusion suivante est satisfaite :

$$\varepsilon B_{s+\delta}^E \subset B_s^G 0_E, \quad \varepsilon := \frac{\delta^{2(k+1)}}{2^{7k+8} \kappa MN_k(j)^2},$$

pourvu que  $MN_k(j) \geq 1$  et  $0 < s < s + \delta < 1$ .

Sous les hypothèses du théorème, l'espace  $E$  est donc localement  $G$ -homogène. On peut toujours choisir la constante  $M$  assez grande dans  $(A_M)$  pour que l'inégalité  $MN_k(j) \geq 1$  soit satisfaite.

**6.** La condition  $(A_M)$  permet de définir l'application

$$\phi : \bigcup_{0 < S < S + \sigma < 1} \sigma B_{S+\sigma}^{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{g}, \quad \xi \mapsto j(\varphi(\xi)^{-1} \xi 0_E).$$

Maintenant, soient  $s$  et  $\delta$  fixés comme dans l'énoncé, puis  $\sigma = \delta/2$ ,  $S = s + \sigma$  et  $x \in \varepsilon B_{s+\delta}^E = \varepsilon B_{S+\sigma}^E$ . Nous allons montrer que les images successives  $\xi_n := \phi^n(j(x))$  de  $j(x)$  par  $\phi$  sont bien définies et convergent rapidement vers  $0_{\mathfrak{g}}$  dans  $B_S^{\mathfrak{g}}$ . Puis, nous montrerons que la suite formée par les produits  $g_n = \varphi(\xi_0) \dots \varphi(\xi_n)$ ,  $n \geq 0$ , possède une valeur d'adhérence  $g \in B_s^G$ . La suite définie par :

$$x_n = \xi_n \cdot 0_E$$

tend alors vers  $0_E$ . Cette suite vérifie

$$x_n = \varphi(\xi_{n-1})^{-1} x_{n-1} = \dots = g_{n-1}^{-1} x.$$

En passant à la limite d'une suite extraite convergente, on obtient :  $x = g 0_E$ . CQFD.

**7.** Posons

$$c_n := \frac{\sigma^{k+1}}{2^{(k+1)(n+2)} MN_k(j)};$$

comme  $\sum_{n \geq 1} 2^{-n} = 1$  et  $\sum_{n \geq 1} n 2^{-n} = 2$ , on a

$$\prod_{n \geq 1} c_n^{2^{-n}} = \frac{\sigma^{k+1}}{2^{4(k+1)} MN_k(j)}.$$

Comme  $\sigma \in ]0, 1[$  et  $MN_k(j) \geq 1$ , on a  $c_n \leq 1$  pour tout  $n \geq 0$ .

LEMME. Pour tous  $n \geq 1$  et  $\xi \in \mathfrak{g}$  tels que

$$|\xi|_{S+2^{-n}\sigma} \leq \left( \frac{\sigma}{4\kappa} \prod_{m \geq n} c_m^{2^{-m}} \right)^{2^{n-1}},$$

l'élément  $\xi$  appartient au domaine définition de  $\phi$  et

$$|\phi(\xi)|_{S+2^{-(n+1)}\sigma} \leq \left( \frac{\sigma}{4\kappa} \prod_{m \geq n+1} c_m^{2^{-m}} \right)^{2^n}.$$

*Démonstration.* — Comme  $c_m \leq 1$ , pour tout  $m \geq 0$ , l'hypothèse sur  $\xi$  donne l'inégalité

$$|\xi|_{S+2^{-n}\sigma} \leq \left( \frac{\sigma}{4\kappa} \right)^{2^{n-1}}$$

et le membre de droite est lui-même majoré par  $2^{-(n+1)}\sigma$  car  $\kappa \geq 1$  et  $\sigma < 1$ .

Donc  $\xi$  appartient au domaine définition de  $\phi$ , et la condition  $(A_M)$  et l'hypothèse sur  $j$  montrent que l'estimation quadratique suivante est satisfaite :

$$|\phi(\xi)|_{S+2^{-(n+1)}\sigma} \leq \frac{2^{(k+1)(n+2)}MN_k(j)}{\sigma^{k+1}} |\xi|_{S+2^{-n}\sigma}^2 = c_n^{-1} |\xi|_{S+2^{-n}\sigma}^2,$$

d'où l'estimation voulue.  $\square$

L'hypothèse du lemme est vérifiée pour  $n = 1$  et  $\xi = \xi_0$ . En effet, l'hypothèse sur  $j$  appliquée à  $\xi_0 = j(x)$  montre qu'on a l'inégalité

$$|\xi_0|_{S+\sigma/2} \leq 2^k N_k(j) \sigma^{-k} |x|_{S+\sigma},$$

et, comme  $|x|_{S+\sigma} \leq \varepsilon$ , l'inégalité voulue est satisfaite (c'est elle qui fixe la valeur de  $\varepsilon$ ). D'après le lemme, la suite  $(\xi_n)$  peut donc être construite de proche en proche et, pour tout  $n \geq 0$  on a

$$|\xi_n|_{S+2^{-(n+1)}\sigma} \leq \left(\frac{\sigma}{4\kappa}\right)^{2^n}.$$

**8.** Pour tout  $n \geq 0$ , d'après l'axiome  $(g_\kappa)$ ,  $\varphi(\xi_n)$  appartient à la boule  $\kappa \left(\frac{\sigma}{4\kappa}\right)^{2^n} B_{S+2^{-(n+2)}\sigma}^G$ , qui est elle-même contenue (voir le début de la démonstration du lemme) dans la boule  $2^{-(n+2)}\sigma B_{S+2^{-(n+2)}\sigma}^G$ .

L'axiome (G) montre donc, par récurrence, que  $g_n := \varphi(\xi_0)\varphi(\xi_1)\cdots\varphi(\xi_n)$  appartient à

$$\left(\sum_{0 \leq m \leq n} 2^{-(m+2)}\sigma\right) B_{S+2^{-(n+2)}\sigma}^G \subset \frac{\sigma}{2} B_S^G.$$

Or, par hypothèse, l'inclusion  $\frac{\sigma}{2} B_S^G \subset \sigma B_s^G$  est compacte. Donc la suite  $(g_n)$  possède une valeur d'adhérence  $g \in \sigma B_s^G$ . Le théorème est démontré.

REMERCIEMENTS. Les auteurs remercient D. van Straten et le rapporteur pour leurs observations.

Le premier auteur a bénéficié d'un financement ANR (Project BLANC07-3-187245, Hamilton-Jacobi and Weak KAM Theory).

## Références

- [1] V. I. Arnold, *Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics*, Uspehi Mat. Nauk **18** (1963), no. 6 (114), 91–192.
- [2] A. N. Kolmogorov, *On conservation of conditionally periodic motions for a small change in Hamilton's function*, Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) **98** (1954), 527–530.
- [3] J. Moser, *A rapidly convergent iteration method and non-linear partial differential equations. I*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **20** (1966), 265–315.
- [4] F. Sergeraert, *Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **5** (1972), 599–660.
- [5] E. Zehnder, *Generalized implicit function theorems with applications to some small divisor problems. II*, Comm. Pure Appl. Math. **29** (1976), no. 1, 49–111.

---

JACQUES FÉJOZ, Université P. & M. Curie, Institut de mathématiques, Analyse algébrique  
Observatoire de Paris, Institut de mécanique céleste, Astronomie et systèmes dynamiques  
E-mail : fejoz@math.jussieu.fr

MAURICIO GARAY, 2A avenue Édouard Herriot, 91440 Bures-sur-Yvette  
E-mail : garay91@gmail.com