Forme optimale de l'habitat

Jimmy Lamboley, Antoine Laurain, Grégoire Nadin, Yannick Privat

Université Paris Dauphine, CEREMADE

ANR Optiform

Modèle biologique : dynamique de population

Fisher - Kolmogorov 1937, Fleming 1975, Cantrell-Cosner 1989

Equation diffusive logistique :

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + \omega u[m(x) - u] & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \partial_n u + \beta u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(0,x) \geq 0, \quad u(0,x) \not\equiv 0 & \text{dans } \overline{\Omega}, \end{cases}$$

où

$$\Omega \subset \mathbb{R}^N, \quad -1 \leq m(x) \leq \kappa \text{ change de signe}, \qquad \beta \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

Condition d'extinction/survie

Cantrell-Cosner 1989, Berestycki-Hamel-Roques 2005

- $\omega \leq \lambda(m) \quad \Longrightarrow \quad u(t,x) \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} 0,$
- $\omega > \lambda(m) \quad \Longrightarrow \quad u(t,x) \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} u^*(x).$

Condition d'extinction/survie

Cantrell-Cosner 1989, Berestycki-Hamel-Roques 2005

- $\omega \leq \lambda(m) \quad \Longrightarrow \quad u(t,x) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0,$
- $\omega > \lambda(m) \quad \Longrightarrow \quad u(t,x) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} u^*(x).$

où

$$\lambda(m) = \inf\left\{ \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 + \beta \int_{\partial\Omega} \varphi^2}{\displaystyle\int_\Omega m\varphi^2}, \quad \varphi \in H^1(\Omega), \ \int_\Omega m\varphi^2 > 0 \right\}.$$

Problème au valeur propre

Avec poids qui change de signe

$\lambda(m)$ est l'unique valeur propre principale ($\Leftrightarrow \varphi > 0$) positive du problème

$$\begin{cases} \Delta\varphi + \lambda m \varphi = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \partial_n \varphi + \beta\varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

Problème au valeur propre

Avec poids qui change de signe

$\lambda(m)$ est l'unique valeur propre principale ($\Leftrightarrow \varphi > 0$) positive du problème

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Delta\varphi + \lambda m\varphi & = & 0 \text{ dans } \Omega, \\ \partial_n\varphi + \beta\varphi & = & 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

Problème d'optimisation :

$$\inf\left\{\lambda(m), \quad -1 \leq m \leq \kappa,\ |\{m > 0\}| > 0,\ \int_\Omega m \leq -m_0|\Omega|\right\}. \qquad \text{(P)}$$

Problème d'optimisation de forme

Proposition

Si m est solution de (P), *alors*

- $\int_\Omega m = -m_0|\Omega|$
- $m = \kappa \mathbb{1}_E - \mathbb{1}_{\Omega\setminus E}$.

$$\inf \left\{ \lambda(E) := \lambda(\kappa \mathbb{1}_E - \mathbb{1}_{\Omega\setminus E}), \quad |E| = c|\Omega| \right\} \tag{P}$$

où $c \in (0,1)$.

Etat de l'art

Non-exhaustif

- Cas $\beta = \infty$, sans changement de signe : symétrisation, régularité [Krein 1955, Friedland 1977, Cox 1990]

Etat de l'art

Non-exhaustif

- Cas $\beta = \infty$, sans changement de signe : symétrisation, régularité [Krein 1955, Friedland 1977, Cox 1990]
- Cas périodique [Hamel-Roques 2007]

Etat de l'art

Non-exhaustif

- Cas $\beta = \infty$, sans changement de signe : symétrisation, régularité [Krein 1955, Friedland 1977, Cox 1990]
- Cas périodique [Hamel-Roques 2007]
- Cas 1D, $\beta = 0$: résolu [Lou-Yanagida 2006]

Etat de l'art

Non-exhaustif

- Cas $\beta = \infty$, sans changement de signe : symétrisation, régularité [Krein 1955, Friedland 1977, Cox 1990]
- Cas périodique [Hamel-Roques 2007]
- Cas 1D, $\beta = 0$: résolu [Lou-Yanagida 2006]
- Cas 1D, $\beta > 0$: optimisation parmis les intervalles [Hintermüller-Kao-Laurain 2012]

Etat de l'art

Non-exhaustif

- Cas $\beta = \infty$, sans changement de signe : symétrisation, régularité [Krein 1955, Friedland 1977, Cox 1990]
- Cas périodique [Hamel-Roques 2007]
- Cas 1D, $\beta = 0$: résolu [Lou-Yanagida 2006]
- Cas 1D, $\beta > 0$: optimisation parmis les intervalles [Hintermüller-Kao-Laurain 2012]
- Cas 2D : régularité [Chanillo-Kenig-To 2008]

Etat de l'art

Non-exhaustif

- Cas $\beta = \infty$, sans changement de signe : symétrisation, régularité [Krein 1955, Friedland 1977, Cox 1990]
- Cas périodique [Hamel-Roques 2007]
- Cas 1D, $\beta = 0$: résolu [Lou-Yanagida 2006]
- Cas 1D, $\beta > 0$: optimisation parmis les intervalles [Hintermüller-Kao-Laurain 2012]
- Cas 2D : régularité [Chanillo-Kenig-To 2008]
- Numérique [C, H-L, H-K-L-L-Y]

Nouveaux résultats

Dimension 1

$$\inf \left\{ \lambda(E) := \lambda(\kappa \mathbb{1}_E - \mathbb{1}_{\Omega \setminus E}), \quad |E| = c|\Omega| \right\} \tag{P}$$

Theorem

Si $\Omega =]0,1[$ *et* E^* *est solution, alors* E^* *est un intervalle.*

$$\inf \left\{ \lambda(E) := \lambda(\kappa \mathbb{1}_E - \mathbb{1}_{\Omega\setminus E}), \quad |E| = c|\Omega| \right\} \tag{P}$$

Theorem

Si $\Omega =]0,1[$ et E^* est solution, alors E^* est un intervalle.

Conséquence : il existe $\beta^* = \beta^*(\kappa, c)$ tel que

- si $\beta > \beta^*$, même solution que $\beta = \infty$,
- si $\beta < \beta^*$, même solution que $\beta = 0$,
- si $\beta = \beta^*$, les solutions sont exactement les intervalles de longueur c,

$$\inf \left\{ \lambda(E) := \lambda(\kappa \mathbb{1}_E - \mathbb{1}_{\Omega \setminus E}), \quad |E| = c|\Omega| \right\} \qquad \text{(P)}$$

Theorem

On suppose que $N \geq 2$, que $\partial\Omega$ est connexe et C^1.
Supposons E ou $\Omega \setminus E$ invariant par rotation centrée en un point fixe O.

Nouveaux résultats

Dimension $N \geq 2$

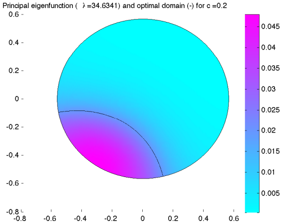
$$\inf \left\{ \lambda(E) := \lambda(\kappa \mathbb{1}_E - \mathbb{1}_{\Omega \setminus E}), \quad |E| = c|\Omega| \right\} \qquad \text{(P)}$$

Theorem

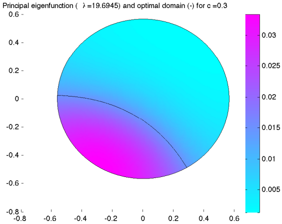
On suppose que $N \geq 2$, que $\partial\Omega$ est connexe et C^1.
Supposons E ou $\Omega \setminus E$ invariant par rotation centrée en un point fixe O.
Alors

- *E critique $\Rightarrow$ Ω est une boule de centre O,*
- *E solution $\Rightarrow$ Ω et (E ou $\Omega \setminus E$) sont des boules concentriques.*

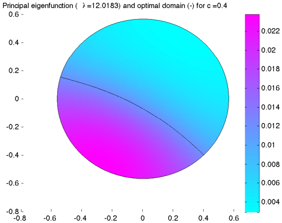
$\Omega = B(0,1), \beta = 0, \kappa = 0.5$



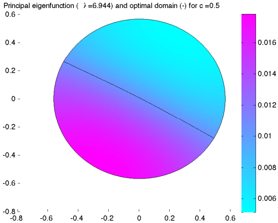
(a) $c = 0.2$



(b) $c = 0.3$

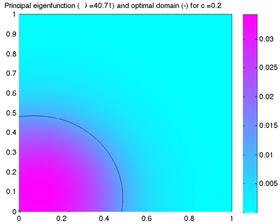


(c) $c = 0.4$

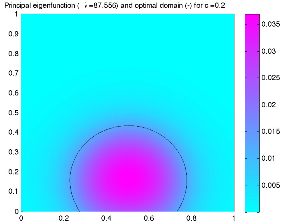


(d) $c = 0.5$

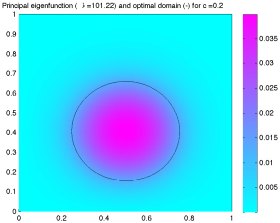
$\Omega = (0,1)^2$, $\kappa = 0.5$, $c = 0.2$



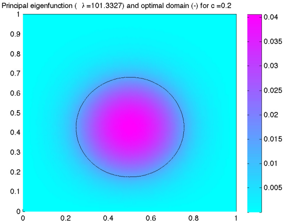
(e) $\beta = 1$



(f) $\beta = 5$



(g) $\beta = 50$



(h) $\beta = 1000$

Questions ouvertes

- Si Ω est une boule, quand $\partial E \cap \Omega$ peut-il être un morceau de sphère ?
- En général, trouver des conditions pour que $\partial E \cap \partial\Omega$ ne soit pas vide (par exemple si $\beta = 0$).