Université Paris-Dauphine 2016/2017
L3 Maths J. Lamboley
Topologie et Analyse Fonctionnelle

Feuille 1 : Topologie, E.V.N.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On travaille dans l'espace $M_n(\mathbb{R})$, muni de sa topologie naturelle.

1. L'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales est-il un ensemble compact de $M_n(\mathbb{R})$?
2. L'ensemble $SL_n(\mathbb{R})$ des matrices de déterminant 1 est-il un ensemble compact de $M_n(\mathbb{R})$?

Exercice 2. Soit $E = C^0([0,1])$ muni de la norme uniforme.

1. Soit $F = \{f \in E,\ f \geq 0 \text{ sur } [0,1]\}$. Montrer que F est fermé. Décrire le complémentaire de F.
2. Soit $O = \{f \in E,\ f > 0 \text{ sur } [0,1]\}$. Montrer que O est ouvert (on pourra faire deux preuves, une directe, une qui consiste à montrer que O^c est fermé).
3. On remplace E par $E = C_b^0(\mathbb{R}_+)$ (espace des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}_+$), et on considère cette fois-ci $O = \{f \in E,\ f > 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+\}$. Cet ensemble est-il ouvert ?

Exercice 3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et F un s.e.v. de E.

1. Montrer que $\overline{F}$ est un s.e.v. de E.
2. Donner un exemple où $\overline{F} \neq F$ (il faudra choisir E également). Un tel exemple est-il possible si E est de dimension finie ?
3. Montrer l'équivalence
$$\mathring{F} \neq \emptyset \Leftrightarrow F = E.$$

Exercice 4. Soit $E = C^1([0,1])$ l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On définit

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_{C^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_{C^1}$ est une norme.
2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E, et $f \in E$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f au sens de la norme C^1 si et seulement si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f et $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f'.
3. Montrer que $(C^1([0,1]), \|\cdot\|_{C^1})$ est un espace de Banach.

Exercice 5. Soit $c_0 = c_0(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites réelles qui converge vers 0.

1. Montrer que c_0 est un s.e.v. fermé de $(\ell^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|)$ (c'est donc un espace de Banach).
2. Montrer que l'ensemble des suites à support fini (c'est-à-dire constantes égales à 0 à partir d'un certain rang) est dense dans c_0.

Exercice 6. *[Norme d'application linéaire, Mars 2016]* Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E vers F.

1. Rappeler une définition de la norme d'une application linéaire continue $T \in \mathcal{L}(E,F)$, qu'on note $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.
2. Montrer que $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ est bien une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$.
3. Rappeler (sans démonstration) les conditions sur les espaces E et F pour que l'espace $\mathcal{L}(E,F)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ soit complet.

4. Dans le cas $E = F$, on note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que si $(T, S) \in \mathcal{L}(E)^2$, alors

$$\|T \circ S\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(E)}\|S\|_{\mathcal{L}(E)}.$$

5. On définit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, et $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n, pour $n \in \mathbb{N}$.

   (a) On pose, si $P = \displaystyle\sum_{n=0}^{deg(P)} a_n X^n$, $\|P\| = \displaystyle\sup_{0 \leq i \leq deg(P)} |a_i|$ *(par convention si $P = 0$ alors $deg(P) = -\infty$, et le précédent* sup *est considéré égal à 0).* Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

   Dans les questions suivantes, on munit les espaces $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{R}_n[X]$ de cette norme $\|\cdot\|$.

   (b) On pose Δ l'application de dérivation sur les polynômes :

$$\Delta : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}.$$

   Montrer que Δ est bien définie et linéaire. L'application Δ est-elle continue ? Si oui, calculer sa norme dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$.

   (c) Etant donné $n \in \mathbb{N}$, on considère Δ_n la restriction de Δ à $\mathbb{R}_n[X]$:

$$\Delta_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}.$$

   Montrer que Δ_n est bien définie. L'application Δ_n est-elle continue ? Si oui, calculer sa norme dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

Exercice 7. 1. Soit $E = \mathbb{R}[X]$, muni de la norme $\|P\|_\infty := \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$.

   (a) Justifier qu'il s'agit bien d'une norme.

   (b) Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère $\delta_a : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par $\forall P \in E, \delta_a(P) = P(a)$. Déterminer pour quels $a \in \mathbb{R}$ la forme linéaire δ_a est continue, et calculer $\|\delta_a\|$ dans ce cas.

2. Soit $E = C^0([0, 1])$.

   (a) Montrer que l'application $\delta_0 : f \in E \mapsto f(0) \in \mathbb{R}$ est continue si on munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$, mais n'est pas continue si on munit E de la norme $\|\cdot\|_1$.

   (b) On munit E de la norme uniforme. Soit $\phi : E \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par

$$\forall f \in E, \quad \phi(f) := \int_0^{1/2} f(t)dt - \int_{1/2}^1 f(t)dt.$$

   Montrer que ϕ est continue, calculer sa norme, et montrer que cette norme n'est pas atteinte, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de fonction $f \in E$ telle que $\|f\|_\infty = 1$ et $|\phi(f)| = \|\phi\|$.

   (c) Refaire la question précédente en munissant E de la norme $\|\cdot\|_1$.

Exercice 8. On travaille dans $\ell^\infty := \ell^\infty(\mathbb{N}^*)$ muni de la norme uniforme. On considère $T : \ell^\infty \to \ell^\infty$ défini par

$$\forall x \in \ell^\infty, \quad T(x) = T(x_1, x_2, x_3, \ldots) := (x_1/1, x_2/2, x_3/3, \ldots) = (x_n/n)_{n \in \mathbb{N}^*}.$$

1. Montrer que T est bien défini, et linéaire continu avec $\|T\| = 1$.
2. Montrer que T est injectif, mais non surjectif.

Exercice 9. *[Mars 2015]* On travaille dans $E = \mathbb{R}[X]$. On rappelle qu'un polynôme peut toujours s'écrire $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ où il n'y a qu'un nombre fini de $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ qui sont non nuls. On pose alors $\|P\| := \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k|$.

1. Montrer que l'application $\|\cdot\|$ est bien définie et est une norme sur E.
2. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n = X^n$. La suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|$? Est-elle convergente ?

Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, on définit $\delta_{x_0} : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P(x_0) \in \mathbb{R}$, qui est clairement bien définie et linéaire.

3. Montrer que si $x_0 \in [0, 1[$, δ_{x_0} est continue, et calculer sa norme. Montrer que si $x_0 \in [1, \infty[$, δ_{x_0} n'est pas continue.
4. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $Q_n = X^n/n!$. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} Q_n$ est absolument convergente, mais n'est pas convergente dans E. Que peut-on en déduire sur l'espace $(E, \|\cdot\|)$?

Exercice 10. Soit $E = C^0([0, 1])$ muni de la norme uniforme. Montrer qu'une forme linéaire $T : E \to \mathbb{R}$ positive (c'est-à-dire satisfaisant $\forall f \in E, f \geq 0 \Rightarrow T(f) \geq 0$) est continue.

Exercice 11. 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles est un ouvert dense de $M_n(\mathbb{R})$ (muni de sa topologie naturelle).

2. Soit E un espace de Banach. On considère $\mathcal{L}(E)$ l'espace des endomorphismes continus de E, muni de sa norme induite.
   (a) Montrer que si $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $\|u\| < 1$, alors $Id - u$ est inversible, et que de plus
   $$\|(Id - u)^{-1}\| \leq (1 - \|u\|)^{-1}.$$
   (b) Montrer que l'ensemble des endomorphismes inversibles de $\mathcal{L}(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 12. Soit $E = C^0([0, 1])$ muni de la norme uniforme. On définit $T : E \to E$ par
$$\forall f \in E, \quad \forall x \in [0, 1], \quad T(f)(x) := \int_0^x f(t)dt.$$

1. Montrer que T est bien défini, linéaire continu, et calculer $\|T\|$.
2. Montrer que,
   $$\forall f \in E, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0, 1], \quad |T^n(f)(x)| \leq \frac{x^n}{n!}\|f\|_\infty.$$
   En déduire la valeur de $\|T^n\|$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\lambda Id - T$ est inversible, et que $\|(\lambda Id - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda|}e^{1/|\lambda|}$. Que peut-on dire pour $\lambda = 0$?

Exercice 13. Soit (E, d) un espace métrique.

1. (a) Montrer qu'un ensemble $U \subset E$ est dense si et seulement si U rencontre tout ouvert non vide de E.
   (b) Etant donné U et V deux ouverts denses de E, montrer que $U \cap V$ est aussi un ouvert dense de E. Est-ce encore vrai si U et V ne sont plus nécessairement ouverts ?

On suppose désormais l'espace (E, d) complet.

2. *[Théorème des fermés emboîtés]* Soit (F_n) une suite de fermés non vides de E. On suppose que la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion, et que le diamètre de F_n converge vers 0 quand n tend vers l'infini. Montrer que l'intersection des $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non vide, réduite à un singleton.
3. (*) *[Théorème de Baire]* Montrer qu'une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.
4. En déduire qu'une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.
5. *[Une application classique]* Montrer que $\mathbb{R}[X]$ n'est complet pour aucune norme.

Exercice 14. *[Problème d'optimisation en dimension infinie].* On pose $E = C^0([0,1])$, que l'on munit de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$. On définit

$$\begin{array}{rccl} G: & E & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 |f(x)|dx \end{array}$$

1. Montrer G est bien définie et continue.
2. On pose $F = \{f \in E,\ \|f\|_\infty \leq 2,\ f(0) = 1\}$. Montrer que F est fermé et borné.
3. Montrer que F n'est pas compact.
4. Etudier la question d'existence pour le problème de minimisation suivant :

$$\inf_{f \in F} G(f).$$

Exercice 15. *[Cas particulier du théorème de Cauchy-Lipschitz].* On pose $E = C^0([0,1])$, que l'on munit de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$. On définit

$$\begin{array}{rccl} T: & E & \to & E \\ & f & \mapsto & T(f) \text{ définie par : } \ \forall\, x \in [0,1],\ \ T(f)(x) = 1 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x \sin(f(t))dt \end{array}$$

1. Montrer T est bien définie, et qu'il existe un unique élément $y \in E$ tel que $T(y) = y$.
2. Montrer que y est de classe C^1 et vérifie l'équation différentielle $y' = \frac{1}{2}\sin(y)$, et $y(0) = 1$.
3. Montrer que si z est une fonction C^1 satisfaisant $z' = \frac{1}{2}\sin(z)$ et $z(0) = 1$, alors $T(z) = z$. En déduire $z = y$.

Exercice 16. Soit d une métrique sur $\mathbb{R}^{[0,1]}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$C_n = B\left(0, \frac{1}{n}\right)^c = \left\{f \in \mathbb{R}^{[0,1]},\ \ d(f,0) \geq \frac{1}{n}\right\}.$$

1. Montrer qu'il existe n_0 tel que C_{n_0} contient une infinité de fonctions qui sont indicatrices d'un singleton.
2. Montrer qu'on peut choisir une suite dans C_{n_0} qui converge simplement vers 0.
3. En déduire qu'il n'existe pas de métrique sur $\mathbb{R}^{[0,1]}$ telle que la convergence pour cette métrique soit équivalente à la convergence simple sur $[0,1]$.

Exercice 17. On considère l'espace $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. On pose
$$\forall f, g \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ \ d(f,g) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \min(1, \|f - g\|_{\infty,[-n,n]}).$$
Montrer que d est une métrique, et que la convergence pour d équivaut à la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}, d(\lambda f, 0) < \varepsilon$.
3. En déduire qu'il n'existe pas de norme sur $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que la convergence pour cette norme soit équivalente à la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Université Paris-Dauphine 2016/2017
L3 Maths J. Lamboley
Topologie et Analyse Fonctionnelle

Feuille 2 : Espaces L^p

Sauf précision contraire, Ω désigne un borélien de $\mathbb{R}^N$, on travaille avec la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$, et la tribu considérée est celle des boréliens.

Exercice 1. Soient f et $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables. On considère les fonctions f^+, f^- définies par :

$$f^+(x) = \max(0, f(x)), \quad f^-(x) = \max(0, -f(x)).$$

1. Montrer que f^+, f^- sont mesurables, et que pour tout x de Ω, $f^+(x)f^-(x) = 0$ et $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ (les fonctions f^+ et f^- sont appelées respectivement partie positive et partie négative de f). Exprimer $|f|$ en fonction de f^+ et f^-.
2. Montrer que les définitions de f^+ et f^- sont légitimes et que les mêmes propriétés restent vraies presque partout si f, g sont des classes d'équivalence de fonctions (disons $f, g \in L^1(\Omega)$).

Exercice 2. *[Mars 2013]*

1. (a) Pour quelles valeurs de $p \in [1, \infty]$ les fonctions suivantes sont-elles dans l'espace $L^p(\mathbb{R})$?

$$f_1 : x \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) \qquad f_2 : x \mapsto e^{-x} \qquad f_3 : x \mapsto x\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$

$$f_4 : x \mapsto \frac{1}{x}\mathbb{1}_{]0,\infty[}(x) \qquad f_5 : x \mapsto \frac{1}{x^3}\mathbb{1}_{]1,\infty[}(x).$$

   (b) Dans chaque cas, calculer les valeurs des normes L^p pour tout $p \in [1, \infty]$.

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \sqrt{n}.e^{-\frac{n^2x^2}{2}}.$$

   (a) Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (i.e. dire si la suite de fonctions converge simplement et si oui, identifier la limite).

   (b) Montrer que

$$f_n \longrightarrow 0 \text{ dans l'espace } L^1(\mathbb{R}).$$

   (c) Calculer $\|f_n\|_2$ pour $n \in \mathbb{N}$, et montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 3. *[Inclusion des espaces $L^p(\Omega)$ où Ω est de mesure finie]*

1. Montrer que si Ω est borné alors $|\Omega| := \int_\Omega 1\,\mathrm{d}x < \infty$. Donner un exemple de Ω non borné tel que $|\Omega| < +\infty$. Et Ω un *ouvert* non borné tel que $|\Omega| < \infty$?

On suppose désormais que $|\Omega| < +\infty$. Soit $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ tel que $1 \leq p \leq q \leq +\infty$.

2. Montrer les inclusions

$$L^\infty(\Omega) \subset L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega).$$

   (On pourra donner une solution qui n'utilise pas l'inégalité de Hölder).

3. Montrer que si $u \in L^q(\Omega)$, alors $u \in L^p(\Omega)$ et

$$||u||_p \leq (|\Omega|)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}||u||_q.$$

   En déduire que l'injection de $L^q(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ est continue (et donc que la convergence dans $L^q(\Omega)$ implique la convergence dans $L^p(\Omega)$).

4. Soit $u \in L^\infty(\Omega)$, montrer que $\lim_{p\to+\infty} ||u||_p = ||u||_\infty$.
5. On ne suppose plus que Ω est de mesure finie. Montrer que pour tout $1 \le p \le +\infty$ on a
$$L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega).$$
6. Montrer qu'aucune inclusion entre $L^p(\mathbb{R})$ et $L^q(\mathbb{R})$ (pour $p \neq q$) n'est satisfaite.

Exercice 4. *[Espaces de suite, Mars 2013]* Pour $p \in [1, \infty[$, on pose
$$\ell^p(\mathbb{N}) = \left\{ a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}, \ \ \|a\|_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$
et pour $p = \infty$ on pose
$$\ell^\infty(\mathbb{N}) = \left\{ a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}, \|a\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < \infty \right\}.$$

1. Montrer que pour tout $1 < p < q < \infty$, $\ell^1(\mathbb{N}) \subset \ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^q(\mathbb{N}) \subset \ell^\infty(\mathbb{N})$ et que
$$\forall a \in \mathbb{R}^\mathbb{N}, \|a\|_\infty \le \|a\|_q \le \|a\|_p \le \|a\|_1.$$
2. Montrer que les inclusions $\ell^1(\mathbb{N}) \subset \ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^q(\mathbb{N}) \subset \ell^\infty(\mathbb{N})$ (avec $1 < p < q < \infty$) sont strictes.
3. On définit
$$T : \begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \ell^1(\mathbb{N}) \\ a & \longmapsto & (\frac{a_n}{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$
Montrer que T est bien défini et linéaire continu (on munit naturellement les espaces $\ell^1(\mathbb{N})$ et $\ell^2(\mathbb{N})$ des normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ respectivement). Calculer $\|T\|_{\mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}),\ell^1(\mathbb{N}))}$.

Exercice 5. *[Inégalité de Hölder généralisée]* On considère des réels p, q et r tels que $p \ge 1$, $q \ge 1$ et $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$. Montrer que $fg \in L^r(\Omega)$ et que
$$||fg||_r \le ||f||_p ||g||_q.$$

Exercice 6. Soit $p \in [1, \infty[$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $L^p(\Omega)$, et $f \in L^p(\Omega)$.

1. Est-il vrai que si $\|f_n\|_p \underset{n\to\infty}{\to} \|f\|_p$, alors f_n converge vers f dans $L^p(\Omega)$? Et la réciproque ?
2. Est-il vrai que si $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ *p.p.*, alors f_n converge vers f dans $L^p(\Omega)$?
3. Montrer que si on suppose $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée dans $L^p(\Omega)$ et $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ *p.p.*, alors $f \in L^p(\Omega)$.
4. On suppose ici $p = 1$, $f_n \to f$ *p.p.* et $\|f_n\|_1 \to \|f\|_1$ quand $n \to \infty$. Montrer que $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ dans $L^1(\Omega)$. *(On pourra introduire $g_n = |f_n| + |f| - |f_n - f|$).*

Exercice 7. *[Mars 2012]* Soient $p \in]1, +\infty[$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $L^p(\Omega)$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $L^{p'}(\Omega)$. On suppose qu'il existe $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ tels que
$$f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f \text{ dans } L^p(\Omega) \quad \text{ et } \quad g_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g \text{ dans } L^{p'}(\Omega). \tag{1}$$

1. Montrer que la fonction fg, ainsi que les fonctions $f_n g_n$ avec $n \in \mathbb{N}$, sont dans $L^1(\Omega)$.
2. Montrer que la suite $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la fonction fg dans $L^1(\Omega)$.
3. On suppose dans cette question que Ω est borné. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in L^1(\Omega)$, et que f_n converge vers f dans $L^1(\Omega)$.

4. Soit $q \in]1, \infty[$ avec $q \neq p$. On suppose, en plus de (1), que pour tout n, $f_n \in L^q(\Omega)$ et que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^q(\Omega)$. Montrer que f est dans $L^q(\Omega)$ et que f_n converge vers f dans $L^q(\Omega)$.

Exercice 8. *[Mars 2012]* On pose, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \;\; \alpha_n(x) = \frac{1}{2n}\mathbb{1}_{[-n,n]}(x)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, et que $\alpha_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite dans $L^1(\mathbb{R})$.
3. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \; \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = f(x) - I\alpha_n(x)$ où $I = \int_{\mathbb{R}} f(y)dy$. Montrer que $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ dans $L^2(\mathbb{R})$.
4. On pose
$$A = \left\{ f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}), \;\; \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 0 \right\}.$$
Montrer que A est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.
5. Montrer que A n'est pas dense dans $L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 9. Soit $p \in [1, +\infty[$.

1. Montrer que $L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ et que pour tout $f \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$
$$||f||_p \leq (||f||_1)^{\frac{1}{p}} (||f||_\infty)^{1-\frac{1}{p}}.$$
2. Soit $f \in L^p(\Omega)$. Montrer qu'il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers f dans $L^p(\Omega)$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, g_n \in L^\infty(\Omega)$ et g_n est à support compact.
(Ici on demande de répondre à la question sans utiliser le résultat de densité de $C_c^0(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$)
3. En déduire que $L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ et que $L^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$.

Exercice 10. *[Mai 2012]* Soit $1 \leq p \leq +\infty$. Etant donné $f \in L^p(]0, +\infty[)$, on pose
$$\forall x \in]0, +\infty[, \;\; F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

1. Montrer que F est bien définie et continue sur $]0, +\infty[$.
2. Dans le cas $p = +\infty$, montrer que F est lipschitzienne.
3. Dans le cas $1 < p < +\infty$, montrez que F est γ-hölderienne pour un certain exposant $\gamma \in]0, 1[$ qu'on donnera explicitement en fonction de p.

(Etant donné $\gamma \in]0, 1]$, on dit qu'une fonction $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est γ-hölderienne s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall x, y \in]0, +\infty[^2, \;\; |g(x) - g(y)| \leq M|x - y|^\gamma.$$
Si $\gamma = 1$, on retrouve la définition d'une fonction lipschitzienne.)

4. Dans le cas $p = 1$, montrer que F est continue.

Exercice 11. *[Loi des grands nombres L^4]* Soient $X_1, X_2 \ldots, X_n, \ldots$ des v.a.r.i.i.d. centrées admettant un moment d'ordre 4. On note $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

1. Calculer $\mathbb{E}(S_n^4)$ en fonction des moments d'ordre 2 et 4 des X_i.
2. En déduire que S_n/n converge vers 0 dans L^4 et dans L^1.
3. Montrer que
$$\mathbb{E}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{S_n}{n}\right)^4 \right) < \infty.$$
et en déduire que S_n/n converge p.s. vers 0

4. Montrer que si les v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont plus équidistribuées, mais toujours centrées et telles que $(\mathbb{E}(X_n^4))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée uniformément en n (on dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^4), le résultat reste vrai.

Exercice 12. *[Lemme de Riemann-Lebesgue]* Soit $f \in L^1(0, 2\pi)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$I_n = \int_0^{2\pi} f(t)e^{int}\,\mathrm{d}t$$

Montrer que $I_n \to 0$ quand $n \to \infty$.

Exercice 13. *[Inégalité de Hardy, Mai 2013]* Soit $p \in]1, +\infty[$. Pour $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, on définit

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad H(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

1. On suppose dans cette question que f est une fonction continue à support compact dans $]0, +\infty[$. On pose $F = H(f)$.
   (a) Montrer que F est bien définie, et appartient à $L^p(]0, +\infty[)$.
   (b) Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et satisfait
   $$\forall x \in]0, +\infty[, \quad xF'(x) + F(x) = f(x).$$
   (c) En déduire l'égalité :
   $$\int_0^\infty F(x)^p dx = \frac{p}{p-1}\int_0^\infty F(x)^{p-1} f(x)dx.$$
   (d) On suppose, en plus des hypothèses précédentes, que f est positive. Montrer :
   $$\|F\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p.$$
   (e) Généraliser l'inégalité précédente dans le cas où l'on ne suppose plus $f \ge 0$.
2. Montrer que l'application $H : (C_c^0(]0, +\infty[), \|\cdot\|_p) \to (L^p(]0, +\infty[), \|\cdot\|_p)$ est linéaire continue.
3. Montrer que H se prolonge de manière unique en un endomorphisme continu de $L^p(]0, +\infty[)$ et satisfait alors (en notant encore H ce prolongement) :
   $$\forall f \in L^p(]0, +\infty[), \quad \|H(f)\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p.$$

Exercice 14. *[Mars 2016]* On travaille dans l'ouvert $]0, 1[$ muni de la tribu des boréliens, et de la mesure de Lebesgue. Soit $p \in]1, \infty[$.

1. Montrer que si $f \in L^p(0, 1)$, alors $|f|^{p-1} \in L^{p'}(0, 1)$.
2. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $L^p(0, 1)$ qui converge vers $f \in L^p(0, 1)$ en norme L^p, et si $\varphi \in L^{p'}(0, 1)$, alors
   $$\int_0^1 f_n(x)\varphi(x)dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)\varphi(x)dx.$$

On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \bigcup_{k=0}^{n-1} \left]\frac{2k}{2n}, \frac{2k+1}{2n}\right[\\ -1 & \text{si} \quad x \in \bigcup_{k=0}^{n-1} \left]\frac{2k+1}{2n}, \frac{2k+2}{2n}\right[\end{cases}.$$

3. Dessiner g_3.
4. Soit $\varphi \in C^0([0,1])$.
   (a) Montrer que
$$\int_0^1 g_n(x)\varphi(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{2k}{2n}}^{\frac{2k+1}{2n}} \left[\varphi(x) - \varphi\left(x + \frac{1}{2n}\right)\right] dx.$$
   (b) En déduire que
$$\int_0^1 g_n(x)\varphi(x)dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$
5. (a) Montrer que pour tout $\varphi \in L^{p'}(0,1)$,
$$\int_0^1 g_n(x)\varphi(x)dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$
   (b) Montrer que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans $L^p(0,1)$ *(on pourra commencer par montrer que si (g_n) avait une limite dans $L^p(0,1)$, alors celle-ci serait nulle presque partout).*

Exercice 15. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$. Considérons $K \in L^2([a,b] \times [a,b])$ tel que
$$\|K\|^2_{L^2([a,b]^2)} = \int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < 1.$$
1. Soit $h \in L^2([a,b])$. Montrer que $\left(x \mapsto \int_a^b K(x,y)h(y)\,\mathrm{d}y\right)$ est bien définie et appartient à $L^2([a,b])$.
2. On définit la fonctionnelle
$$T \;:\; L^2([a,b]) \longrightarrow L^2([a,b])$$
comme suit : pour $h \in L^2([a,b])$, Th est la fonction :
$$\left(x \mapsto Th(x) = \int_a^b K(x,y)h(y)\,\mathrm{d}y\right)$$
Montrer que T est une application linéaire continue.
3. Soit $g \in L^2([a,b])$. Montrer qu'il existe un unique $h \in L^2([a,b])$ tel que
$$h - Th = g.$$

Exercice 16. 1. Soient λ et μ deux nombres réels. Montrer que les fonctions $f : x \mapsto e^{\lambda x}$ et $g : x \mapsto e^{\mu x}$ n'admettent jamais de produit de convolution.
2. On pose $f : x \mapsto e^x$ et $g : x \mapsto e^{-2|x|}$. Calculer $f * g$.
3. On pose $f : x \mapsto \sin(\pi x)$ et $g : x \mapsto \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$. Calculer $f * g$.
4. Montrer que si f est à support compact et g est T-périodique, $T \in \mathbb{R}$, alors $f * g$ existe et est T-périodique.

Exercice 17. Soient $f \in L^p(\mathbb{R})$ avec $p \in [1,\infty]$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$ où q est le conjugué de p.
1. Montrer que la fonction $x \mapsto (f * g)(x)$ est bien définie en tout point de $\mathbb{R}$, et est continue, bornée, et que $||f * g||_\infty \leq ||f||_p||g||_q$.
2. Montrer que si $p \in]1,\infty[$, alors $f * g(x) \to 0$ quand $x \to \pm\infty$.
   Indication : pensez d'abord aux fonctions continues à support compact.
3. Si $p \in \{1,\infty\}$, a-t-on encore $f * g(x) \to 0$ quand $x \to \pm\infty$?

Exercice 18. *[Mars 2015]* Soit $p \in]1, \infty[$, $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^p(\mathbb{R})$. On pose pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} |f(t)g(x-t)|dt.$$

1. En notant p' l'exposant conjugué de p, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt\right)^{1/p'} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)g(x-t)|^p dt\right)^{1/p}.$$

2. En déduire

$$\|\varphi\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

3. En déduire que $f * g(x)$ est bien définie pour presque tout x, et que

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

Exercice 19. *[Continuité des translations dans L^p]* Soient $p \in [1, +\infty[$, f et $g \in L^p(\mathbb{R})$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on définit la fonction $\tau_a f \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \tau_a f(x) = f(x-a)$ pour presque tout x.

1. Montrer que la définition de $\tau_a f$ est légitime.
2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que :

$$||\tau_a f||_p = ||f||_p, \quad ||\tau_a f - \tau_b f||_p = ||\tau_{a-b} f - f||_p, \quad ||\tau_a f - \tau_a g||_p = ||f - g||_p.$$

3. La fonction f étant fixée dans $L^p(\mathbb{R})$, on considère l'application $\Lambda_f : \mathbb{R} \longrightarrow L^p(\mathbb{R})$, définie par $\Lambda_f(a) = \tau_a f$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. On suppose que $f \in C_c^0(\mathbb{R})$, montrer alors que Λ_f est uniformément continue.
4. En déduire que lorsque $f \in L^p(\mathbb{R})$, Λ_f est uniformément continue.

Exercice 20. *[Construction d'une identité approchée C^∞ à support compact]*

1. On définit g sur $\mathbb{R}$ par $\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) := e^{-1/t} \mathbb{1}_{t>0}$. Démontrer que g est C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}^N$ par $h(x) = g(1 - \|x\|^2)$, où $\|\cdot\|$ est la norme Euclidienne, est C^∞.
3. Soit une suite de nombres (ε_n) strictement positifs convergeant vers 0. Montrer qu'en posant $C = \int_{\mathbb{R}^N} h(x)dx$, la suite de fonctions définies par

$$\rho_n(x) := (C\varepsilon_n^N)^{-1} h(\varepsilon_n^{-1} x)$$

   est une identité approchée.
4. Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. On suppose que f est continue en un point $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \rho_n * f(x_0) = f(x_0).$$

Exercice 21. Soit A et B deux borélien de $\mathbb{R}$, de mesures (de Lebesgue) finies non nulles.

1. Donner un exemple de borélien de $\mathbb{R}$ de mesure finie non nulle, et d'intérieur vide.
2. Montrer que la fonction $\mathbb{1}_A * \mathbb{1}_B$ est bien définie, continue, intégrable, et calculer son intégrale sur $\mathbb{R}$.
3. On définit $A+B = \{a+b, a \in A, \ b \in B\}$. Déduire de ce qui précède que $A+B$ est d'intérieur non vide.

Exercice 22. *[Non densité de C_c^0 dans L^∞]*

1. Montrer que $C_c^0(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans $L^\infty(\mathbb{R})$.
2. Identifier l'adhérence de $C_c^0(\mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ (qui est donc un espace de Banach).

Exercice 23. *[Différentiabilité de la norme $\|\cdot\|_p$, Mai 2016]* Soit $p \in]1,\infty[$, et $(u,v) \in L^p(\Omega)$.

1. On pose $\forall t \in \mathbb{R}^*,\ \ g(t) = |t|^p$. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0, et que la fonction prolongée, encore dénotée g, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) = p|t|^{p-1}\text{signe}(t),$$
où $\text{signe}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$.
(Dans la suite, on utilisera avec un léger abus la notation $t \in \mathbb{R} \mapsto |t|^p$ pour faire référence à la fonction g prolongée par continuité)
2. On pose, pour $x \in \Omega$ fixé :
$$\varphi(t) = |u(x) + tv(x)|^p.$$
   (a) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer $\varphi'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (b) En appliquant le théorème des accroissement finis, montrer que pour tout $t \in [-1,1] \setminus \{0\}$,
   $$\frac{|\varphi(t) - \varphi(0)|}{|t|} \leq p\left[|u(x)| + |v(x)|\right]^{p-1}|v(x)|.$$
   (c) On pose $h(x) = \left[|u(x)| + |v(x)|\right]^{p-1}|v(x)|$ pour presque tout $x \in \Omega$. Montrer que $h \in L^1(\Omega)$.
   (d) Conclure que
   $$\frac{1}{t}\int_\Omega \Big[|u(x) + tv(x)|^p - |u(x)|^p\Big]dx \xrightarrow[t\to 0]{} p\int_\Omega |u(x)|^{p-1}\text{signe}(u(x))v(x)dx.$$
3. On suppose que u n'est pas nulle (en tant que classe de fonction). Montrer que l'application
$$N : t \in \mathbb{R} \mapsto \|u + tv\|_p$$
est dérivable en 0, et calculer $N'(0)$.

Exercice 24. *[Preuve du théorème de Weierstrass par la convolution, Mai 2013]*
Soit $a < b$ deux réels. On travaille dans l'espace des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme uniforme : $(C^0([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$. On cherche à montrer que l'ensemble des polynômes est dense dans cet espace. Soit $f \in C^0([a,b])$.

1. Montrer qu'on peut trouver P_0 un polynôme de degré 1 tel que $P_0([-1/2,1/2]) = [a,b]$.

Ainsi on peut poser $g = f \circ P_0 \in C^0([-1/2,1/2])$.

2. Montrer qu'on peut trouver un polynôme P_1 tel que l'application $g - P_1$ soit nulle en $-1/2$ et en $1/2$.

Ainsi on peut prolonger par continuité cette fonction par 0 en dehors de l'intervalle $[-1/2,1/2]$: plus précisément, on pose $h = (g - P_1)\mathbb{1}_{[-1/2,1/2]} \in C^0(\mathbb{R})$.

3. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $p_n(x) = \alpha_n(1-x^2)^n\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$ où $\alpha_n = \left(\int_{-1}^1(1-x^2)^n dx\right)^{-1}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n est une fonction positive, continue, à support compact, et telle que $\int_\mathbb{R} p_n(x)dx = 1$.
4. Montrer que pour tout $\delta > 0$,
$$\lim_{n\to\infty}\int_{|x|>\delta} p_n(x)dx = 0.$$

(On pourra montrer et utiliser la majoration $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \alpha_n \leq n+1$.)

5. Montrer que $(p_n * h)_{n\in\mathbb{R}}$ est une suite de fonctions qui converge vers h uniformément sur $\mathbb{R}$ *(ici on demande une redémonstration, et non une application directe du cours)*.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la restriction à $[-1/2,1/2]$ de $p_n * h$ est une fonction polynomiale.
7. Conclure en montrant qu'il existe une suite de polynômes $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

Université Paris-Dauphine 2016/2017
L3 Maths J. Lamboley
Topologie et Analyse Fonctionnelle

Feuille 3 : Transformation de Fourier

On définit la transformée de Fourier d'une fonction intégrable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x}\, dx$$

Exercice 1.

1. Calculer la transformée de Fourier des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = e^{-|x|}, \qquad f_2(x) = e^{-a|x|}, a > 0,$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x| \leq 1/2 \\ 0 & \text{si} \quad |x| > 1/2 \end{cases}, \quad f_4(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si} \quad |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad |x| > 1 \end{cases},$$

$$f_5(x) = e^{-x^2}, \qquad f_6(x) = e^{-ax^2},\ a > 0.$$

(pour f_5, on pourra trouver une équation différentielle satisfaite par $\widehat{f_5}$).

2. Calculer $f_3 * f_3$, et en déduire un nouveau calcul de $\widehat{f_4}$.

Exercice 2. *[Lien entre régularité de f et comportement en l'infini de $\widehat{f}$, et vice-versa]*

1. Soit f une fonction réelle dans $C^1_c(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\widehat{f'}\,(\xi) = i\xi \widehat{f}(\xi),\ \forall \xi \in \mathbb{R},$$

et en déduire $\widehat{f}(\xi) = \underset{|\xi|\to\infty}{o}\left(\frac{1}{|\xi|}\right)$.

2. Même question en supposant seulement $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ et $f' \in L^1(\mathbb{R})$.
3. Généraliser la question précédente à l'ordre k où $k \in \mathbb{N}^*$.
4. Donner une condition suffisante sur f pour avoir $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.
5. Montrer que si $f \in L^1(\mathbb{R})$, et si $g : x \mapsto xf(x)$ est aussi dans $L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f}$ est de classe C^1 et

$$\widehat{f}\,'(\xi) = -i\ \widehat{g}(\xi).$$

Généraliser à l'ordre $k \in \mathbb{N}$.

6. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que la fonction $\xi \mapsto \xi \widehat{f}(\xi)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$. Montrer que f coïncide presque partout avec une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
7. Tester ces résultats sur les fonctions $(f_i)_{1\leq i\leq 6}$ et $(\widehat{f_i})_{1\leq i\leq 6}$ de l'exercice 1.

Exercice 3. *[Equation différentielle à retard, Mars 2013]* Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f'(x) = f(x + c)$$

1. Montrer que $f' \in L^1(\mathbb{R})$.
2. Etablir l'équation satisfaite par $\widehat{f}$.
3. En conclure que $f = 0$.
4. Dans le cas $c = 0$, décrire l'ensemble des fonctions $y \in C^1(\mathbb{R})$ qui satisfont $y' = y$ sur $\mathbb{R}$, et expliquer la différence avec le résultat de la question précédente.

Exercice 4. On définit l'ensemble de fonctions $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ par :

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}), \forall\,(n,m) \in \mathbb{N}^2, \exists\, C_{n,m}, \forall\, x \in \mathbb{R}, |x^n f^{(m)}(x)| \leq C_{n,m}\}.$$

1. Montrer que $C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R})$, et que $x \mapsto e^{-x^2} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que pour tout $p \in [1,\infty]$, $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ pour $p \in [1,\infty[$.
3. Soit $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, montrer que f' et $x \mapsto xf(x)$ sont également dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. En déduire que pour tout n et m dans $\mathbb{N}$, $x^n f^{(m)}(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.
4. Montrer que si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.
5. Montrer que l'application $\left\{ \begin{array}{llll} \mathcal{F}: & \mathscr{S}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{S}(\mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & \widehat{f} \end{array} \right.$ est une bijection.

Exercice 5. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $e \in L^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}), \;\; e * f = f.$$

(on dit que l'algèbre $(L^1(\mathbb{R}), +, \cdot, *)$ *n'a pas d'élément unité pour la convolution).*

Exercice 6. *[Extension à* $L^2(\mathbb{R})$*]* Dans cet exercice, on généralise à $L^2(\mathbb{R})$ des propriétés connues pour des fonctions de $L^1(\mathbb{R})$.

1. Montrer que, si $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\widehat{\tau_\alpha f}(\xi) = e^{-i\xi\alpha}\widehat{f}(\xi)$ pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^2(\mathbb{R})$, la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, que la fonction $f * g$ est bien définie presque partout, et que $f * g \in L^2(\mathbb{R})$ avec $\|f * g\|_2 \leq \|f\|_1 \|g\|_2$.
3. Montrer que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^2(\mathbb{R})$,

   $$\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi}\,\widehat{f}\,\widehat{g} \;\; p.p.$$

   Cette formule a-t-elle un sens si $f, g \in L^2(\mathbb{R})$?

Exercice 7. *[Mai 2016]* Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f_a = \mathbb{1}_{[-a,a]}$.

1. Justifier sans calcul que $\widehat{f_a}$, la transformée de Fourier de f_a, appartient à $L^2(\mathbb{R})$ mais pas à $L^1(\mathbb{R})$.
2. Calculer $\widehat{f_a}$.
3. En déduire la valeur de

   $$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 dx.$$

Exercice 8. *[Transformation de Fourier sur* $\mathbb{R}^N$*]* Pour une fonction $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ de classe C^2, on définit $\Delta u = \sum_{n=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$. Calculer $\widehat{\Delta u}$ pour $u \in C_c^2(\mathbb{R}^N)$.

Exercice 9. *[Équation de la chaleur.]* On se propose de résoudre le problème suivant : trouver une fonction $(t,x) \mapsto u(t,x)$ définie pour $(t,x) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R}$ qui vérifie l'équation suivante :

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \forall (t,x) \in]0,\infty[\times\mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

1. On suppose que u est solution de $(*)$, et on pose $\widehat{u}(t,\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(t,x)e^{-i\xi x}\,dx$. Ecrire formellement le système satisfait par $\widehat{u}$ et le résoudre. En déduire une expression de u sous forme de convolution.

2. On définit u la fonction obtenue formellement à la question précédente. Montrer que $u \in C^\infty(]0,\infty[\times\mathbb{R})$ si $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que si $u_0 \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, alors $\lim_{t\to 0} u(t,x) = u_0(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et qu'on peut ainsi prolonger u par continuité à $[0,\infty[\times\mathbb{R}$. Ainsi u est une solution de $(*)$.

Exercice 10. *[Equation fonctionnelle : Mars 2012]* On cherche à trouver toutes les fonctions $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *intégrables* qui satisfont l'équation fonctionnelle

$$\Phi(2x) + \Phi(2x-1) = \Phi(x) \qquad \text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

1. Montrer que $\mathbb{1}_{[0,1]}$ est une solution de (2), et calculer la transformée de Fourier de $\mathbb{1}_{[0,1]}$.

Dans la suite de l'exercice, on prend $\Phi \in L^1(\mathbb{R})$ une solution de (2).

2. Exprimer les transformées de Fourier des fonctions

$$\Phi_1 : x \mapsto \Phi(2x) \quad \text{et} \quad \Phi_2 : x \mapsto \Phi(2x-1)$$

en fonction de $\widehat{\Phi}$.

3. En déduire que $\widehat{\Phi}$ satisfait :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \;\; \widehat{\Phi}(\xi) = \frac{1+e^{-i\xi/2}}{2}\widehat{\Phi}(\xi/2).$$

4. Montrer l'identité :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \;\; \prod_{k=1}^{N} \frac{1+e^{-i\xi/2^k}}{2} = \exp\left(-i\sum_{k=1}^{N}\frac{\xi}{2^{k+1}}\right)\frac{1}{2^N}\frac{\sin(\frac{\xi}{2})}{\sin(\frac{\xi}{2^{N+1}})} \quad \text{pour presque tout } \xi \in \mathbb{R}.$$

Rappels : $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$, $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$, $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$

5. En déduire

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^*, \quad \widehat{\Phi}(\xi) = \widehat{\Phi}(0)e^{-i\xi/2}\frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2}.$$

6. Conclure en déterminant toutes les fonctions $\Phi \in L^1(\mathbb{R})$ solutions de (2).

Exercice 11. *[Fonction caractéristique]* Si X est une variable aléatoire réelle, on définit sa fonction caractéristique :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \;\; \varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}).$$

1. Expliquer que φ_X ne dépend que de la loi de X. On peut donc parler de la fonction caractéristique de la loi d'une variable aléatoire.
2. Calculer la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$. *(On pourra utiliser l'exercice 1.)*
3. Calculer la loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes ayant pour lois respectives $\mathcal{N}(m_1,\sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(m_2,\sigma_2^2)$. *(On rappelle que la fonction caractéristique caractérise la loi : si $\varphi_X = \varphi_Y$ alors X et Y ont même loi)*
4. Montrer que si X a un moment d'ordre $k \in \mathbb{N}$, alors φ_X est de classe C^k, et écrire un développement limité de φ_X à l'ordre k en 0.

Exercice 12. *[Mai 2012]* On étudie l'équation fonctionnelle

$$f * f = f.$$

1. Trouver toutes les solutions $f \in L^1(\mathbb{R})$.
2. Montrer qu'il existe une infinité de solutions dans $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 13. *[Polynômes de Hermite et Transformée de Fourier, Juillet 2013]* On pose $\forall x \in \mathbb{R}, \ \ \psi(x) = e^{-x^2}$. On définit également

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \ H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \psi^{(n)}(x).$$

1. Calculer H_0, H_1, H_2.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme de degré n.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $\forall x \in \mathbb{R}, \ \ h_n(x) = H_n(x)e^{-x^2/2}$. Montrer que $h_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.
4. Exprimer h_n' en fonction de h_n et h_{n+1}, pour $n \in \mathbb{N}$.
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\widehat{h_n} = (-i)^n h_n.$$
(On rappelle et on ne demande pas de démonstration du fait suivant : si $\varphi : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x^2/2}$, alors $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{\varphi} = \varphi$).

Exercice 14. *[Equation de convolution, Mars 2013]* Etant donné $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, on cherche à résoudre l'équation fonctionnelle suivante, d'inconnue $u \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(x) = e^{-|x|} + \beta \int_{\mathbb{R}} u(t)e^{-|x-t|}dt. \tag{3}$$

On pose $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = e^{-|x|}$.

1. Ecrire (3) sous forme d'une équation faisant intervenir le produit de convolution.
2. Calculer $\widehat{h}$, et constater en particulier que $\widehat{h}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que si $u \in L^1(\mathbb{R})$ est solution de (3), alors il existe une fonction $g_\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que l'on déterminera explicitement, telle que
$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{u}(\xi) g_\beta(\xi) = \widehat{h}(\xi).$$
4. Montrer que si $\beta > 1/2$, l'équation (3) n'a pas de solution (on pourra voir que g_β s'annule et en déduire une contradiction).
5. Montrer que si $\beta \in]0, 1/2[$, l'équation a une unique solution que l'on déterminera.
(On pourra utiliser sans démonstration que si $\lambda > 0$ et $\mu_\lambda f : x \mapsto f(\lambda x)$, alors $\widehat{\mu_\lambda f}(\xi) = \frac{1}{\lambda}\widehat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$).

Université Paris-Dauphine 2016/2017
L3 Maths J. Lamboley
Topologie et Analyse Fonctionnelle

Feuille 4 : Séries de Fourier

On définit les coefficients de Fourier d'une fonction localement intégrable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique par

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx$$

On définit aussi

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad e_n(x) := e^{inx}, \quad \text{et} \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad S_N(f) := \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) e_n.$$

Exercice 1. Soit $T \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ T-périodique, localement intégrable. Montrer que

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \quad \int_a^{a+T} f(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Exercice 2. Soit $f \in L^1([0, 2\pi])$.

1. On pose $\widetilde{f}(t) = f(-t)$. Montrer que $\widehat{\widetilde{f}}(n) = \widehat{f}(-n)$ et que $\widehat{\overline{f}}(n) = \overline{\widehat{f}(-n)}$.
2. Supposons f paire. Montrer que
$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt)\, \mathrm{d}t, \qquad S_N(f)(t) = \widehat{f}(0) + 2 \sum_{n=1}^{N} \widehat{f}(n) \cos(nt)$$
3. On suppose f impaire. Montrer que
$$\widehat{g}(n) = -\frac{i}{\pi} \int_0^{\pi} g(t) \sin(nt)\, \mathrm{d}t, \qquad S_N(g)(t) = \widehat{g}(0) + 2i \sum_{n=1}^{N} \widehat{g}(n) \sin(nt).$$
4. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\tau_a f(x) = f(x-a)$. Montrer que $\widehat{\tau_a f}(n) = e^{-ina} \widehat{f}(n)$ et $\widehat{e_k f}(n) = \widehat{f}(n-k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3.
1. Calculer la série de Fourier des deux fonctions 2π-périodiques suivantes : $f(x) = x$ sur $[-\pi, \pi]$; $g(x) = 1$ si $x \in [0, \pi[$ et $g(x) = -1$ si $x \in [-\pi, 0[$.
2. Calculer la série de Fourier de la fonction périodique définie par $f(x) = x^2$ sur $[-\pi, \pi[$. En déduire le calcul des séries
$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}.$$

Exercice 4. Soit f une fonction continue par morceaux et 2π-périodique.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{|\widehat{f}(n)|}{n}$ est convergente.
2. On suppose que la série de Fourier de f converge uniformément. Montrer que cette convergence a lieu vers f (qu'en déduit-on sur f ?)

3. On suppose que f est continue et C^1 par morceaux. Montrer que la série de Fourier de f converge uniformément.

Exercice 5. Soit f une fonction continue 2π-périodique.

1. Si $f \in C^1$, montrer que $\widehat{(f')}(n) = in\widehat{f}(n)$.
2. Si $f \in C^k$, montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} n^k \widehat{f}(n) = 0$.
3. Pour $k \geq 2$, on suppose qu'il existe $C > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tels que $|\widehat{f}(n)| \leq \frac{C}{|n|^k}$ si $|n| \geq n_0$. Montrer que $f \in C^{k-2}$.

Exercice 6. *[Mai 2015]* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable, 2π-périodique, et intégrable sur $[0, 2\pi]$. Montrer que

$$f \text{ a un représentant } C^\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \widehat{f} = \left(\widehat{f}(n)\right)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathscr{S},$$

où

$$\mathscr{S} = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}},\ \forall p \in \mathbb{N},\ \ u_n \underset{|n|\to\infty}{=} o\left(\frac{1}{|n|^p}\right)\right\}.$$

Exercice 7. Soit la fonction f définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = x(\pi - x)$.

1. Déterminer deux suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ telles que

$$\forall x \in [0, \pi],\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

2. En déduire $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$, $k = 1, 2, 3$.

Exercice 8. Pour $\varepsilon \in]0, \pi[$, on définit $\sigma_\varepsilon(t) = 1$ si $|t| \leq \varepsilon$ et 0 si $\varepsilon < |t| \leq \pi$. On prolonge σ_ε sur $\mathbb{R}$ en une fonction 2π-périodique.

1. Calculer $\widehat{\sigma_\varepsilon}$ et $S_N(\sigma_\varepsilon)$.
2. Montrer que $\lim\limits_{N\to\infty} S_N(\sigma_\varepsilon)(\varepsilon) = 1/2$.
3. En déduire que $\sum_1^{+\infty} \frac{\sin(na)}{n} = \frac{\pi - a}{2}$, où $0 < a < 2\pi$.

Exercice 9. *[Septembre 2012]*
On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$ sur $[-\pi, \pi[$ et prolongée par 2π-périodicité sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la fonction f est continue.
2. Montrer, sans la calculer, que la suite $(\widehat{f}(n) = c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ des coefficients de Fourier de f est dans $\ell^1(\mathbb{Z})$.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\widehat{f}(n) = \widehat{f}(-n)$. Définir $(S_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ la série de Fourier de f et montrer l'égalité :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \ S_N(f)(x) = \widehat{f}(0) + 2\sum_{n=1}^{N} \widehat{f}(n)\cos(nx).$$

4. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos(nx) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2},$$

où la convergence des séries a lieu en norme $\|\cdot\|_{L^\infty(-\pi,\pi)}$ et $\|\cdot\|_{L^2(-\pi,\pi)}$.

5. En déduire les valeurs de :
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

Exercice 10 (Équation de la chaleur)**.** Soit $Q = [0, +\infty[\times]0, L[$; $(t, x) \in Q$. Soit $h \in C^1([0, L])$ telle que $h(0) = h(L) = 0$. On considère le problème suivant : trouver une fonction $(t, x) \mapsto u(t, x)$ dans $C^0(\overline{Q}) \cap C^\infty(Q)$ telle que :

(1) $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \ \forall (t, x) \in]0, \infty[\times]0, L[,$

(2) $u(t, 0) = u(t, L) = 0$, $\forall t \geq 0$,

(3) $u(0, x) = h(x)$, $\forall x \in [0, L]$.

1. Trouver une suite de fonctions solutions de (1) et (2) sous la forme $u_n(t, x) = f(t)g(x)$.
2. Ces solutions satisfont-elles (3) en général ?
3. Montrer que pour toute suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la fonction $\sum_{n=0}^N a_n u_n(t, x)$ est solution de (1) et (2).
4. En déduire une solution de (1), (2) et (3) par un choix convenable de $(a_n)_n$.

Exercice 11. *[Formule de Poisson, Mai 2012] Pour éviter toute confusion, on conseille (mais on n'oblige pas) dans cet exercice de noter $\widehat{f}$ la transformée de Fourier d'une fonction de $f \in L^1(\mathbb{R})$, et $(c_n(g))_{n\in\mathbb{Z}}$ les coefficients de Fourier d'une fonction g 2π-périodique localement intégrable.*

1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que la somme
$$\widetilde{f}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t + 2\pi n)$$
est bien définie pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, et que la fonction $\widetilde{f}$ ainsi définie est 2π-périodique et appartient à $L^1(0, 2\pi)$.

Indication : On pourra commencer par montrer que la fonction $t \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(t + 2\pi n)|$ appartient à $L^1(0, 2\pi)$.

2. Calculer les coefficients de Fourier de $\widetilde{f}$ en fonction de $\widehat{f}$, la transformée de Fourier de f.
3. Montrez que si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| < \infty$, alors
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t + 2\pi n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{int} \quad \text{pour presque tout } t \in \mathbb{R}.$$
4. Montrez que si $A \in \mathbb{R}_+$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall |t| \leq A, \ \forall |n| \geq n_0, \ \frac{1}{(1 + |t + 2\pi n|)^2} \leq \frac{1}{(1 + 2\pi|n| - A)^2}.$$
5. En déduire que si
$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \ |f(t)| \leq \frac{M}{(1 + |t|)^2}, \tag{H1}$$
alors la série $t \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t + 2\pi n)$ converge uniformément (en t) sur tout intervalle $[-A, A]$ où $A \in \mathbb{R}_+$, et en déduire que dans ce cas $\widetilde{f}$ est une fonction continue.
6. Montrez que si f vérifie $f \in C^2(\mathbb{R})$ et $(f, f', f'') \in L^1(\mathbb{R})^3$, alors
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| < \infty. \tag{H2}$$
7. Montrez que si f vérifie (H1) et (H2), alors
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n). \tag{4}$$

8. En appliquant la formule (4) à la fonction $f : x \mapsto e^{-a|x|}$ pour $a \in]0, \infty[$ (on justifiera en particulier la validité de cette application), en déduire que,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{a^2+n^2} = \frac{\pi}{a}\frac{1+e^{-2\pi a}}{1-e^{-2\pi a}}.$$

Exercice 12. *[Inégalité de Poincaré-Wirtinger, Juillet 2013] Dans cet exercice, si $n \in \mathbb{Z}$, on note $\widehat{g}(n)$ le n-ième coefficient de Fourier d'une fonction 2π-périodique g. Il est autorisé d'utiliser la notation $c_n(g)$ à la place.*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique, de classe C^1, et telle que

$$\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0.$$

1. Enoncer le théorème de Parseval.
2. Rappeler et démontrer le lien entre les coefficients de Fourier $\widehat{f}(n)$ et $\widehat{f'}(n)$, pour $n \in \mathbb{Z}$.
3. En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$|f(t)| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{|n|}|\widehat{f'}(n)|.$$

4. En déduire l'inégalité suivante :

$$\|f\|_\infty \leq \sqrt{\frac{\pi}{6}}\|f'\|_2.$$

(On prend ici la convention $\|g\|_2 = \sqrt{\int_0^{2\pi} g(t)^2dt}$. On rappelle également que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$).

5. L'inégalité précédente reste-t-elle valable si on ne suppose plus $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$?

Université Paris-Dauphine 2016/2017
L3 Maths J. Lamboley
Topologie et Analyse Fonctionnelle

Feuille 5 : Espaces de Hilbert

Exercice 1. *[Identité du parallélogramme]* Soit H un espace de Banach (sur $\mathbb{R}$ pour simplifier) dont la norme $\|\cdot\|$ vérifie l'identité du parallélogramme, c'est à dire pour tout $u, v \in H$ on a :

$$\|u - v\|^2 + \|u + v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

Montrer que H est un Hilbert.

Exercice 2. Montrer que les espaces $L^p(\mathbb{R})$ ne sont pas des espaces de Hilbert si $p \in [1, \infty] \setminus \{2\}$.

Exercice 3. *[Mai 2012]*

1. Soit $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X), (Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ deux espaces de Hilbert (avec pour corps de base $\mathbb{R}$). On suppose qu'il existe une isométrie linéaire et surjective $L : X \to Y$ (le caractère isométrique signifie $\|L(x)\|_Y = \|x\|_X, \ \forall x \in X$).
   Montrer que L est bijective, et que
   $$\forall (x_1, x_2) \in X^2, \ \ \langle L(x_1), L(x_2)\rangle_Y = \langle x_1, x_2\rangle_X.$$
2. On suppose que $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de X. Montrer que la famille $(L(e_n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de Y.

Exercice 4. *[Mai 2013]* On travaille dans $L^2\left(\mathbb{R}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx\right)$ (on considère ici les fonctions à valeurs réelles).

1. Rappeler la définition de cet espace, et son produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
2. Calculer les 6 premiers moments de la loi normale centrée réduite.
3. Trouver 4 polynômes (P_0, P_1, P_2, P_3) tels que
   $$\forall (i, j) \in [\![0, 3]\!], \ \ \langle P_i, P_j\rangle = \delta_{i,j}, \quad \deg(P_i) = i.$$
4. En déduire 4 fonctions qui forment une famille orthonormée de $L^2(\mathbb{R}, dx)$.

Exercice 5. On considère l'espace $\ell^2(\mathbb{C})$. Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |a| < 1$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit la suite f_k par
$$f_k = (1, a^k, a^{2k}, a^{3k}, \cdots, a^{nk}, \cdots).$$

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f_k \in \ell^2(\mathbb{C})$.
2. Montrer que l'espace $Vect(f_k, k \in \mathbb{N}^*)$ est dense dans $\ell^2(\mathbb{C})$.

Exercice 6. *[Polynômes de Tchebycheff]* On définit la fonction θ sur $[-1, 1]$ par $\theta(x) = \arccos(x)$, puis on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ les fonctions T_n et U_n (toujours sur $[-1, 1]$) par

$$T_n(x) = \cos(n\theta(x)) \quad \text{et} \quad U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\theta(x))}{\sin(\theta(x))}$$

1. Calculer T_n et U_n pour $n = 0, 1, 2, 3$.

2. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad \forall\, x \in [-1,1]$$

et que

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x) \quad \forall\, x \in [-1,1].$$

En déduire que T_n et U_n sont des polynômes de degré n et ont la même parité que n. Les T_n et les U_n sont appelés respectivement polynômes de Tchebycheff de première et de seconde espèce.

3. Vérifier que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (respectivement $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$) est une suite de polynômes orthogonaux dans $L^2([-1,1],p)$ où le poids p est défini par $p(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ (respectivement par $p(x) = \sqrt{1-x^2}$).

Exercice 7. *[Polynômes de Legendre]* Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère la fonction polynômiale P_n définie pour $x \in [-1,1]$ par

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left((x^2-1)^n\right)$$

1. Calculer P_0, P_1 et P_2.
2. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n$. Montrer que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système orthonormal de $L^2([-1,1])$.
3. Montrer que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2([-1,1])$.
4. Trouver les valeurs des réels a, b et c qui minimisent l'intégrale

$$I = \int_{-1}^{1}\left(x^3 - ax^2 - bx - c\right)^2\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 8. *[Critère de densité des polynomes orthogonaux, Mai 2015]* On considère $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable, strictement positive, et telle que

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+, \quad \int_{\mathbb{R}} e^{\alpha|x|}\rho(x)dx < \infty. \tag{H}$$

1. Rappeler le produit scalaire usuel de l'espace $L^2(\mathbb{R},\rho(x)dx)$ *(on se restreint aux fonctions à valeurs réelles).*
2. Montrer que $\mathbb{R}[X] \subset L^2(\mathbb{R},\rho(x)dx)$.
3. Soit $f \in L^2(\mathbb{R},\rho(x)dx)$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \int_{\mathbb{R}} f(x)x^n\rho(x)dx = 0$. On pose

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \ F(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{zx}\rho(x)dx.$$

   (a) Montrer que F est bien définie et continue sur $\mathbb{C}$.

   (b) Après avoir rappelé le développement en série entière de la fonction exponentielle, montrer que F est développable en série entière autour de 0, avec un rayon de convergence infini (autrement dit, il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que $F(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$), puis que la fonction F est nulle (sur $\mathbb{C}$).

   (c) En déduire que f est nulle (presque partout sur $\mathbb{R}$).

   (d) En déduire que l'espace $\mathbb{R}[X]$ est dense dans $L^2(\mathbb{R},\rho(x)dx)$.

4. On pose $I =]0,+\infty[$ et on suppose maintenant que $\forall x \in I,\ \rho(x) = x^{-\ln(x)}$ *(pour laquelle ce qui précède ne s'applique pas : elle n'est pas définie sur $\mathbb{R}$, mais surtout ne satisfait pas l'hypothèse* (H)*, ce que nous ne demandons pas de vérifier).*

   (a) Montrer que $\mathbb{R}[X] \subset L^2(I,\rho(x)dx)$.

(b) On pose $\forall x \in I,\ f(x) = \sin(2\pi \ln(x))$. Montrer que $f \in L^2(I, \rho(x)dx)$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_I x^n f(x)\rho(x)dx = 0.$$

(c) Que peut-on en déduire ?

Exercice 9. *[L'espace de Sobolev $h^1(\mathbb{N})$]* On travaille dans

$$\ell^2(\mathbb{N}) := \left\{ u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ tel que } \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2 < \infty \right\}$$

que l'on munit de son produit scalaire usuel. On pose

$$h^1(\mathbb{N}) := \left\{ u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ \text{ tel que } \ \sum_{n\in\mathbb{N}} n^2 u_n^2 < \infty \right\}.$$

On note

$$\forall\, (a,b) \in h^1(\mathbb{N})^2, \quad \langle a, b\rangle_{h^1(\mathbb{N})} = \sum_{n=0}^{+\infty} (1+n^2) a_n b_n.$$

1. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la suite $\left(\frac{1}{(n+1)^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle dans $\ell^2(\mathbb{N})$? Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ est-elle dans $h^1(\mathbb{N})$?
2. Montrer que l'espace $h^1(\mathbb{N})$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{h^1(\mathbb{N})}$ est un espace de Hilbert. La norme associée à ce produit scalaire est-elle équivalente à la norme $\|\cdot\|_{\ell^2(\mathbb{N})}$?
3. Montrer que $h^1(\mathbb{N})$ est un sous-espace dense de $\ell^2(\mathbb{N})$.
4. Calculer la distance $d(u, h^1(\mathbb{N}))$ pour $u \in \ell^2(\mathbb{N})$.
5. (*) Soit $B_{h^1(\mathbb{N})}(0,1) = \{a \in h^1(\mathbb{N}) \ ,\ \|a\|_{h^1(\mathbb{N})} \leq 1\}$. Montrer que $B_{h^1(\mathbb{N})}(0,1)$ est un compact de $\ell^2(\mathbb{N})$.

Exercice 10. *[Dualité sur les espaces L^p, cas particuliers, Mai 2015]* Pour $p \in [1,\infty]$, on notera p' son exposant conjugué. On travaille sur l'intervalle $I =]0,1[$ (muni de la tribu des boréliens et de la mesure de Lebesgue), et toutes les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in L^{p'}(I)$, on définit l'application

$$T_f : \begin{array}{ccc} L^p(I) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \longmapsto & \displaystyle\int_I f(x)\varphi(x)dx \end{array}.$$

1. Montrer que pour tout $p \in [1,\infty]$ et tout $f \in L^{p'}(I)$, l'application T_f est bien définie, et linéaire continue.
2. On s'intéresse dans cette question au cas $p = 2$ ($p' = 2$).
   (a) Pour $f \in L^2(I)$, calculer la norme de T_f.
   (b) Montrez que pour toute application $T : L^2(I) \to \mathbb{R}$ linéaire continue, il existe une unique fonction $f \in L^2(I)$ telle que $T = T_f$.
3. On s'intéresse dans cette question au cas $p = 1$ ($p' = \infty$).
   (a) Pour $f \in L^\infty(I)$, calculer la norme de T_f.

   (On pourra, lorsque f est non nulle, considérer les fonctions $\varphi_n := signe(f)\mathbb{1}_{A_n}$ où $A_n = \left\{|f| \geq \|f\|_\infty - \frac{1}{n}\right\}$).

   (b) Soit $T : L^1(I) \to \mathbb{R}$ linéaire continue. Montrer qu'il existe $f \in L^\infty(I)$ telle que $T = T_f$.

   (On pourra commencer par montrer qu'il existe $f \in L^2(I)$ telle que $T = T_f$ sur $L^2(I)$, puis montrer que $|f|$ est essentiellement majorée (par exemple par $1 + \|T\|_{\mathcal{L}(L^1(I),\mathbb{R})}$), et enfin conclure).

Exercice 11. *[Espaces de Sobolev périodiques, Mai 2016]* On rappelle que $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, et qu'une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ est la donnée d'une fonction 2π-périodique. De plus

$$L^2(\mathbb{T}) = \left\{ f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}, \ \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < \infty \right\},$$

et si $f \in L^2(\mathbb{T})$, $\widehat{f}$ désigne la suite des coefficients de Fourier de f.

On pose, pour $s \in \mathbb{R}_+$,

$$H^s(\mathbb{T}) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}), \ \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{2s} |\widehat{f}(n)|^2 \ < \ +\infty \right\}.$$

1. Identifier l'espace $H^0(\mathbb{T})$.
2. Soit $s \in \mathbb{R}_+$.
   (a) Montrer que l'application
   $$\begin{array}{ccc} H^s(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (f,g) & \longmapsto & \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1+|n|^{2s}) \widehat{f}(n) \overline{\widehat{g}(n)} \end{array}$$
   est bien définie, et est un produit scalaire sur l'espace $H^s(\mathbb{T})$.
   (b) Donner une expression de la norme associée à ce produit scalaire, que l'on note $\|\cdot\|_{H^s(\mathbb{T})}$ et montrer que $H^s(\mathbb{T})$ est complet pour cette norme.
   (c) Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{T})$, l'ensemble des polynômes trigonométriques, est dense dans $H^s(\mathbb{T})$.
3. Pour $s_1 < s_2$ où $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}_+^2$, y a-t-il une inclusion entre $H^{s_1}(\mathbb{T})$ et $H^{s_2}(\mathbb{T})$? Justifier.
4. Montrer que si $s > \frac{1}{2}$, et $f \in H^s(\mathbb{T})$, alors $\widehat{f} \in \ell^1(\mathbb{Z})$, f a un représentant continu (que l'on note f), et il existe une constante C_s indépendante de f telle que
   $$\|f\|_\infty \leq C_s \|f\|_{H^s(\mathbb{T})}.$$
5. Soit $s \in \mathbb{R}_+$. On pose (on rappelle que $\mathcal{P}(\mathbb{T})$ est l'ensemble des polynômes trigonométriques) :
   $$T : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathbb{T}) & \longrightarrow & H^s(\mathbb{T}) \\ P & \longmapsto & P' \end{array}.$$
   Montrer que T se prolonge en une application linéaire continue de $H^{s+1}(\mathbb{T})$ vers $H^s(\mathbb{T})$ (que l'on munit de leurs normes respectives).