

## Mémoire d'habilitation à diriger des recherches

Présenté par

**LAMBOLEY Jimmy**

Spécialité :

**Mathématiques**

Coordinateur : CARLIER Guillaume

---

## Optimisation de forme : Régularité, singularités, stabilité, convexité

---

soutenu le 01 décembre 2016 après avis de

BÉTHUEL Fabrice	Professeur à l'université Pierre et Marie Curie
FUSCO Nicola	Professeur à università di Napoli
TERRACINI Susanna	Professeur à università di Torino

devant le jury composé de

ALLAIRE Grégoire	Professeur à l'école Polytechnique
BÉTHUEL Fabrice	Professeur à l'université Pierre et Marie Curie
BUCUR Dorin	Professeur à l'université de Savoie
BUTTAZZO Giuseppe	Professeur à università di Pisa
CARLIER Guillaume	Professeur à l'université Paris-Dauphine
DOLBEAULT Jean	Directeur de recherche CNRS - Université Paris-Dauphine
PIERRE Michel	Professeur émérite à l'ENS Rennes
TERRACINI Susanna	Professeur à università di Torino

---



# Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier chaleureusement Guillaume Carlier d'avoir accepté de coordonner cette habilitation. Il a toujours apporté soutien et encouragement pour mes recherches, et je suis ravi qu'il ait accompagné cette nouvelle étape.

Fabrice Béthuel, Nicola Fusco et Susanna Terracini ont accepté de relire ce manuscrit et d'apporter leurs regards experts sur mes travaux. Je leur en suis très reconnaissant, c'est un grand honneur que mes recherches aient pu susciter ainsi leur intérêt. Merci également à Susanna qui a accepté de faire le déplacement depuis Milan pour faire partie du jury, et à Fabrice, qui vient d'un peu moins loin !

Je remercie bien particulièrement Michel Pierre, de participer à ce jury mais également bien sûr d'avoir encadré ma thèse et d'avoir poursuivi nos collaborations depuis lors. J'ai appris tellement à ses côtés (depuis près de 15 ans), ce manuscrit et l'ensemble de mes travaux lui doivent énormément, et sa façon d'aborder la recherche, avec passion et humilité, continuera de m'inspirer pour l'ensemble de ma carrière.

Grégoire Allaire, Dorin Bucur, Giuseppe Buttazzo, Jean Dolbeault ont également accepté de faire partie du jury, je les en remercie : ils sauront certainement reconnaître à quel point ils ont contribué à ce manuscrit. En particulier, Giuseppe m'a "donné" un problème qui aura nécessité pas moins de sept ans (et de brillants co-auteurs) pour être résolu ; quant à Dorin, ses idées très riches et les intuitions qu'il a toujours volontiers partagées, m'ont largement guidé dans mon travail.

Mes nombreux collaborateurs ont bien sûr eu un fort impact sur mes recherches, et ils ont tous à leur manière une contribution aux lignes qui suivent et à ma compréhension des problèmes que nous avons abordés. Je les remercie d'avoir partagé mon intérêt et mon enthousiasme pour ces problèmes, et en particulier Arian, Perialberto, Ilaria & Filippo, Marc, Evans, Antoine H., pour leur accueil dans leurs laboratoires respectifs.

J'ai passé un peu plus de sept ans au Ceremade. C'est avec beaucoup de plaisir que j'y ai trouvé une excellente atmosphère de travail, et je remercie l'ensemble de mes collègues, et en particulier les "camarades" du 6ème. J'ai une pensée très particulière pour Olivier Glass, qui est arrivé la même année que moi et avec qui j'ai partagé un bureau (qui était alors "feu la salle café" pour nos nouveaux collègues) cette même année : en tant que directeur, il a largement œuvré à ce que le laboratoire soit un lieu d'échange et de débat. Qu'il soit sûr que son investissement a largement contribué à mon plaisir de venir travailler, sans oublier nos agréables conversations moins professionnelles mais non moins intéressantes. Je remercie François Simenhaus avec qui je partage le B640 depuis plus de 6 ans, pour notre respectueuse cohabitation, nos débats enflammés du vendredi après-midi, et pour son ouverture d'esprit. Il a certainement subtilement contribué à ce que je puisse mieux identifier mes opinions. Un dernier merci particulier à François Bolley, pour nos maladroites parties de tennis, nos trop rares séances d'escalade, et pour avoir contribué à la difficulté d'intégrer l'orthographe de mon nom pendant mes premières années à Dauphine.

Je remercie également les collègues du département MIDO, qui œuvrent sans compter pour faciliter et améliorer notre travail d'enseignant. Je remercie Pierre et Patricia pour leur confiance en me confiant la responsabilité du L3, à Mathieu qui a accompagné mes premiers pas dans cette nouvelle tâche et a rendu celle-ci bien plus confortable, et à Marc et Samira plus fraîchement arrivés. Merci aussi à Yannick qui m'a passé le flambeau et pour son investissement indéniable.

Enfin, je remercie tous ceux qui, même s'ils sont bien plus distants de Dauphine ou des mathématiques, accompagnent ma vie parisienne, qu'ils soient "pisans", danseurs, ou assimilés, ils ont permis de rendre mes moments en dehors du bureau très agréables, ce qui m'est certainement nécessaire pour travailler avec sérénité et plaisir. Leurs contributions au présent manuscrit est probablement plus difficilement identifiable, mais assurément non négligeable.



# Table des matières

Préambule	3
Résumé	5
Introduction	7
Notations	11
<b>1 Contrainte de convexité et fonctionnelles localement concaves ([A6,A8,A11], [A10, Section 4] et [A18, Section 5])</b>	<b>15</b>
1.1 Exemples de problèmes d'optimisation	15
1.1.1 Problème de Newton	15
1.1.2 Conjecture de Mahler	16
1.1.3 Conjecture de Pólya-Szegő	18
1.1.4 Problèmes isopérimétriques inverses	18
1.1.5 Problèmes de Faber-Krahn inverses	19
1.2 Saturation de la contrainte de convexité	19
1.2.1 Résultat principal	19
1.2.2 À propos de la preuve de la Proposition 1.1	20
1.2.3 Améliorations	22
1.3 Cas de fonctionnelles globalement concaves	23
1.4 Dimension 2 : Solutions polygonales	25
1.5 Dimension supérieure	27
1.6 Estimation des dérivées secondes	28
1.6.1 Approche 2-dimensionnelle, domaines convexes	29
1.6.2 Approche en toute dimension, cas des domaines Lipschitz	30
1.7 Problèmes ouverts, perspectives	31
<b>2 Régularité sous contrainte de convexité ([A1] et [A10, Section 3])</b>	<b>33</b>
2.1 Cas 2-dimensionnel	33
2.1.1 Théorème Principal	33
2.1.2 Applications	34
2.2 Perspectives : Cas multi-dimensionnel	35
2.2.1 Remarques sur le cadre du Calcul de variations	35
2.2.2 Cas de l'optimisation de forme, quasi-minimiseurs du périmètre	36
2.3 Problèmes ouverts	37
<b>3 Régularité de formes optimales en présence d'un terme de périmètre/longueur ([A2,A5])</b>	<b>39</b>
3.1 Problèmes isopérimétriques	39
3.1.1 Introduction et état de l'art	40
3.1.2 Nouveaux résultats	41
3.1.3 Stratégie et résultats intermédiaires	42
3.2 Problème de résistance optimale	44

3.2.1	Introduction et principaux résultats . . . . .	44
3.2.2	Stratégie et résultats intermédiaires . . . . .	45
3.3	Perspectives . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Stabilité en optimisation de forme ([A3,A7])</b>	<b>49</b>
4.1	Approche par dérivées secondes . . . . .	50
4.1.1	État de l'art, motivations . . . . .	50
4.1.2	Théorème principal . . . . .	51
4.1.3	À Propos de la preuve du Théorème 4.1, résultats intermédiaires . . . . .	53
4.1.4	Applications . . . . .	55
4.2	Optimisation de la valeur propre Wentzell . . . . .	55
4.2.1	Introduction, conjecture . . . . .	55
4.2.2	Nouveaux résultats . . . . .	56
4.2.3	Dérivation de $\lambda_{1,\beta}$ et preuve du Théorème 4.3 . . . . .	57
4.3	Perspectives . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Modèle de dynamique des populations ([A4])</b>	<b>61</b>
5.1	Introduction . . . . .	61
5.1.1	Le modèle . . . . .	61
5.1.2	Problème d'optimisation . . . . .	62
5.1.3	Modèles similaires et références . . . . .	63
5.2	Nouveaux résultats . . . . .	63
5.2.1	Résolution en dimension 1 . . . . .	63
5.2.2	La boule est-elle solution ? . . . . .	64
5.2.3	La boule centrée est-elle solution ? . . . . .	65
5.3	Perspectives . . . . .	66
	<b>Perspectives</b>	<b>69</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>79</b>

# Préambule

Ce manuscrit contient le résumé d'une partie de mes activités de recherche depuis mon arrivée au laboratoire Ceremade de l'université Paris-Dauphine, en 2009. En particulier les articles issus de ma thèse de doctorat ([A12 à A16]<sup>1</sup> ci-dessous) ne sont pas présentés dans ce mémoire, certains seront néanmoins mentionnés dans le corps du texte. Précisément, on présente dans ce manuscrit les résultats des articles [A1 à A8] et [A10-A11], les autres travaux étant plus isolés thématiquement, et on évoquera brièvement [A18] qui est un chapitre d'ouvrage.

## Publications<sup>1</sup>

### Prépublications

- [A1] Lamboley J., Regularity in calculus of variations and shape optimization under convexity constraint, *En cours de finalisation*
- [A2] Chambolle A., Lamboley J., Lemenant A., Stepanov E., Regularity for the optimal compliance problem with length penalization, *Soumis*
- [A3] Dambrine M., Lamboley J., Stability in shape optimization with second variation, *Soumis*

### Publications dans des revues internationales à comité de lecture

- [A4] Lamboley J., Laurain A., Nadin G., Privat Y., Properties of minimizers of the principal eigenvalue with indefinite weight and Robin conditions, *Calc. Var. and Partial Differential Equations*, (2016)
- [A5] De Philippis G., Lamboley J., Pierre M., Velichkov B., Regularity of minimizers of shape optimization problems involving perimeter, *J. Math. Pures Appl.*, (2016)
- [A6] Lamboley J., Novruzi A., Pierre M., Estimates of first and second order shape derivatives in nonsmooth multidimensional domains and applications, *J. Funct. Anal.*, 270(7), (2016), 2616–2652
- [A7] Dambrine M., Kateb D., Lamboley J., An extremal eigenvalue problem for the Wentzell-Laplace operator, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 33(2), (2016), 409–450
- [A8] Harrell E.M., Henrot A., Lamboley J., On the local minimizers of the Mahler volume, *J. Convex Anal.*, 22(3), (2015), 809–825
- [A9] Lamboley J., Sicbaldi P., New examples of extremal domains for the first eigenvalue of the Laplace-Beltrami operator in a Riemannian manifold with boundary, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (18), (2015), 8752–8798
- [A10] Lamboley J., Novruzi A., Pierre M., Regularity and singularities of optimal convex shapes in the plane, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 205(1), (2012), 311–343
- [A11] Bucur D., Fragalà I., Lamboley J., Optimal convex shapes for concave functionals, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 18(3), (2012), 693–711
- [A12] Lamboley J., About Hölder-regularity of the convex shape minimizing  $\lambda_2$ , *Appl. Anal.*, 90(2), (2011), 263–278
- [A13] Fragalà I., Gazzola F., Lamboley J., Pierre M., Counterexamples to symmetry for partially overdetermined elliptic problems, *Analysis (Munich)*, 29(1), (2009), 85–93

---

1. La numérotation ne reprend pas celle de la bibliographie générale, que l'on trouve en fin de manuscrit. Nous utiliserons la numérotation [Ax] (avec  $x \in \mathbb{N}^*$ ) de cette page dans l'introduction et dans les titres de chaque chapitre. Dans le corps du texte, nous ferons référence à la bibliographie générale, de la forme [x] et qui contient également les articles de ce Préambule.

- [A14] Lamboley J., Novruzi A., Polygons as optimal shapes with convexity constraint, *SIAM J. Control Optim.*, 48(5), (2009/10), 3003–3025
- [A15] Briançon T., Lamboley J., Regularity of the optimal shape for the first eigenvalue of the Laplacian with volume and inclusion constraints, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 26(4), (2009), 1149–1163
- [A16] Lamboley J., Pierre M., Structure of shape derivatives around irregular domains and applications, *J. Convex Anal.*, 14(4), (2007), 807–822

### Autres publications

- [A17]<sup>2</sup> Fragalà I., Gazzola F., Lamboley J., Sharp bounds for the  $p$ -torsion of convex planar domains, in *Geometric properties for parabolic and elliptic PDE's*, volume 2 of *Springer INdAM Ser.*, 97–115, Springer, Milan (2013)
- [A18] Lamboley J., Pierre M., Regularity of Optimal Spectral domains, *Chapitre du livre “Shape Optimization and Spectral Theory” édité par A. Henrot et publié par De Gruyter*

---

2. Cette publication est un acte de conférence, mais qui contient des résultats originaux



# Résumé

Dans ce mémoire, nous présentons différents résultats dans le domaine de l'optimisation de forme, c'est-à-dire l'étude des problèmes d'optimisation dont l'inconnue est un ensemble de  $\mathbb{R}^d$ . On peut donner la formulation générale suivante :

$$\min \{J(\Omega), \Omega \in \mathcal{A}\}, \quad (0.1)$$

où  $\mathcal{A}$  est une classe d'ensembles de  $\mathbb{R}^d$ , et  $J : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  est appelée fonctionnelle de forme. Nous étudions de nombreux exemples et situations, et l'objectif principal de nos travaux consiste à comprendre les propriétés qualitatives des solutions de (0.1). Les exemples considérés sont tantôt issus de modélisation appliquées (physiques ou biologiques), tantôt de nature académique.

Dans les Chapitres 1 et 2, nous nous intéressons à la situation où  $\mathcal{A}$  est l'ensemble des ouverts *convexes* de  $\mathbb{R}^d$  (éventuellement avec d'autres contraintes plus classiques). C'est une situation assez particulière du point de vue de l'optimisation, car elle rend difficile la comparaison de  $\Omega^*$  solution de (0.1) avec ses "voisins". En effet, si le domaine  $\Omega^*$  possède une zone non-strictement convexe (on dira que  $\Omega^*$  sature la contrainte de convexité), alors une perturbation, même régulière, de  $\Omega^*$  peut très bien ne plus être convexe, et on ne peut pas l'utiliser pour comparer son énergie à celle de  $\Omega^*$  ; nous verrons qu'une telle situation de saturation de la contrainte de convexité est très fréquente pour ces problèmes. Via une paramétrisation des ensembles convexes par leurs fonctions jauges, nous transformons (0.1) en un problème de calcul de variations parmi les fonctions convexes, et nous utiliserons tantôt des méthodes de calcul différentiel (conditions d'optimalité) prenant en compte la contrainte de convexité, tantôt la construction de compétiteurs convexes bien choisis. Nous identifions ainsi, selon les propriétés de  $J$ , des propriétés très différentes des solutions de (0.1) : on montrera que si la fonctionnelle  $J$  satisfait une propriété qu'on intitulera "*concavité locale*", alors les formes optimales souhaitent saturer "partout" la contrainte de convexité, et font ainsi apparaître des singularités (par exemple en dimension 2, ce sont des polygones), et si au contraire  $J$  satisfait une propriété de convexité, alors les solutions sont de classe  $C^{1,1}$ , qui est la régularité optimale qu'on peut espérer dans cette situation. Nous donnons de nombreux exemples de chaque situation : nous verrons en particulier que si la fonctionnelle  $J$  contient un terme de périmètre (et d'autres termes sans incidence sur les propriétés qualitatives), alors on est dans la seconde situation (où les formes optimales sont  $C^{1,1}$ ), et si au contraire  $J$  contient un terme qui est l'opposé du périmètre (on appellera ces situations "isopérimétrie inverse"), alors on est dans la première situation, avec des formes optimales localement extrémales, et singulières.

Dans le Chapitre 3, nous présentons deux résultats de régularité des solutions de (0.1), qu'on peut comparer à deux exemples célèbres du domaine, à savoir l'étude de la régularité des solutions du problème isopérimétrique d'une part, et la régularité pour le problème de Mumford-Shah d'autre part. Plus précisément, dans le premier travail, nous identifions des hypothèses générales sur une fonctionnelle  $\mathcal{G}$  pour que les solutions de (0.1), lorsque  $J = P + \mathcal{G}$  et  $\mathcal{A} = \{\Omega \text{ ouvert, } |\Omega| = m_0\}$ , soient des quasi-minimiseurs du périmètre. Par la théorie désormais classique sur la régularité de ces ensembles, ceci permet de conclure que les solutions ont un bord régulier, à un ensemble de co-dimension 8 près. Nous montrons que l'énergie de Dirichlet  $\Omega \mapsto E_f(\Omega)$  (associée à une fonction  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ), ou les valeurs propres du Laplacien-Dirichlet  $(\lambda_k(\Omega))_{k \in \mathbb{N}^*}$ , satisfont ces conditions, et donc on peut les choisir comme fonction  $\mathcal{G}$ . Dans le second travail, on étudie un modèle de résistance optimale pour une membrane dont on peut fixer une zone, ce qui se formule par le problème suivant, où  $D$  est un ouvert fixé de  $\mathbb{R}^2$  :

$$\min \{ \mathcal{H}^1(\Sigma) - E_f(D \setminus \Sigma), \Sigma \text{ fermé connexe de } D \}, \quad (0.2)$$

où  $\mathcal{H}^1(\Sigma)$  désigne la longueur, et  $E_f(D \setminus \Sigma)$  représente la résistance de la membrane  $D$  soumise à la force  $f$ , et collée sur la zone  $\Sigma$ . Nous démontrons des propriétés qualitatives et de régularité sur les solutions de ce problème : en particulier, on montre que si  $\Sigma^*$  est solution de (0.2), alors  $\Sigma^*$  ne contient pas de boucle, et qu'il est constitué

d'un nombre fini de courbes régulières, qui ne peuvent s'intersecter que par 3 et en formant des angles de  $120^\circ$ . Pour ce faire, nous démontrons en particulier un lien de dualité entre (0.2) et le problème de Mumford-Shah évoqué précédemment.

Dans le Chapitre 4, nous abordons la question de la stabilité des formes optimales pour (0.1). Dans un premier travail, nous faisons le point par l'approche par dérivation de forme (définie via les déformations de domaine par difféomorphismes de  $\mathbb{R}^d$ ) : la question est de savoir si, supposant que  $\Omega^*$  est un point critique stable (c'est-à-dire qu'en un certain sens, la dérivée première s'annule, et la dérivée seconde est strictement positive) de la fonctionnelle  $J$ , on peut en déduire qu'il en est minimum local. Nous établissons un cadre général pour lequel un tel énoncé est possible, et nous vérifions que ce cadre et cet énoncé s'appliquent à de nombreux exemples : nous retrouvons ainsi plusieurs résultats de la littérature, et en apportons de nouveaux. Malgré le degré de généralité envisagé, nous simplifions significativement les preuves. Dans un second travail, nous abordons la question de la maximisation de la première valeur propre non triviale d'un opérateur de Laplace avec condition au bord de type Wentzell. Ces valeurs propres sont une interpolation de celles de Steklov et de celles de Laplace-Beltrami, et donc la question posée serait une généralisation de deux inégalités issues de ces cas extrêmes, et respectivement dues à Brock et à Hersch (cette dernière étant restreinte aux ouverts de  $\mathbb{R}^3$  homéomorphes à une boule). Afin d'étudier la question dans le cas général des conditions de Wentzell, nous prouvons que les boules de  $\mathbb{R}^3$  est un point critique stable (sous contrainte de volume).

Dans le 5ème et dernier chapitre, nous étudions un problème issu d'un modèle de dynamique de population : la question est d'étudier l'arrangement spatial optimal entre les régions favorables et défavorables, pour assurer au mieux la survie de l'espèce. Ce problème se ramène à l'optimisation d'une fonctionnelle de type valeur propre, à savoir

$$\lambda(m) = \inf \left\{ \frac{\int_D |\nabla \varphi|^2 + \beta \int_{\partial D} \varphi^2}{\int_D m \varphi^2}, \varphi \in H^1(D), \int_D m \varphi^2 > 0 \right\}.$$

où  $D$  est la zone étudiée (un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ ), et  $\beta$  modélise une condition au bord de type Robin. L'optimisation se fait parmi les fonctions  $m$  à valeurs dans  $[-1, \kappa]$  (où  $\kappa > 0$  est un paramètre du problème) et d'intégrale fixée. Il est classique que la solution sera de la forme  $m^* = \kappa \mathbb{1}_{E^*} - \mathbb{1}_{D \setminus E^*}$  pour un certain ensemble  $E^*$ , d'où une formulation optimisation de forme parmi les ensembles mesurables  $E \subset D$ , avec la contrainte  $|E| = c|D|$  où  $c \in ]0, 1[$ . La solution dépend donc des paramètres  $(D, \kappa, \beta, c)$ . Avec des méthodes de symétrisation, nous résolvons en premier lieu le problème lorsque  $d = 1$  et  $D$  est un intervalle, et de pour toute valeur des autres paramètres. Ensuite, nous établissons une condition nécessaire sur les paramètres pour que la solution optimale  $E^*$  puisse être une boule de  $\mathbb{R}^d$  (lorsque  $d \geq 2$ ). Nous montrons que c'est une situation exceptionnelle, en particulier, nécessairement  $D$  doit être également une boule de même centre. Nous montrons que ces conditions ne sont pas suffisantes, en prouvant que dans le cas où  $\beta = 0$  et  $D$  est une boule de  $\mathbb{R}^d$  avec  $d \in \{2, 3, 4\}$ , alors la solution  $E$  n'est pas une boule.

Nous concluons le manuscrit par des perspectives générales et des projets de recherche.

# Introduction

Dans ce travail, on aborde le domaine de l'optimisation de forme, c'est-à-dire l'étude de problèmes d'optimisation qui s'écrivent :

$$\min \{J(\Omega), \Omega \in \mathcal{A}\}, \quad (0.3)$$

où  $\mathcal{A}$  est une classe d'ensembles de  $\mathbb{R}^d$  ( $d \in \mathbb{N}^*$ ), et  $J$  est appelée fonctionnelle de forme.

## Les questions :

Les questions étudiées pour le problème (0.3) sont les questions habituelles du calcul de variations :

- **Y a-t-il existence d'une forme optimale**, c'est-à-dire  $\Omega^* \in \mathcal{A}$  telle que  $J(\Omega^*) = \inf\{J(\Omega), \Omega \in \mathcal{A}\}$  ? Cette question est en général difficile, et nécessite souvent de considérer des classes  $\mathcal{A}$  de domaines autorisant des irrégularités, mais elle est désormais bien comprise, au moins pour deux types de fonctionnelles : celles faisant intervenir un terme de périmètre via la formulation de De Giorgi (voir (0.5)), et celles faisant intervenir des fonctionnelles d'EDP elliptiques avec condition de bord de Dirichlet, avec le Théorème de Buttazzo-Dal Maso [44] dans le cas où les domaines sont confinés dans une boîte bornée  $D$ , et les développements plus récents de D. Bucur [36, 38] pour aborder les cas non bornés, où l'auteur utilise des propriétés de régularité faible afin d'établir des résultats d'existence. *Dans cette direction, nous apporterons une contribution au Paragraphe 3.1, où on montrera en particulier un résultat d'existence non classique, qui s'associe à l'étude des propriétés de régularité des formes optimales, voir le **Théorème 3.1**.*
- **Quelles informations peut-on obtenir sur les formes optimales ?** Cette question est évidemment très vaste, et la situation la plus aboutie consiste à savoir identifier exactement la/les forme(s) optimale(s) : c'est une situation évidemment satisfaisante, mais également assez rare, et le plus souvent (sauf peut-être dans le cas planaire  $d = 2$ ) la description se ramène à des domaines "simples", comme les boules (euclidiennes ou non), auquel cas on peut espérer que des méthodes de symétrisation s'appliquent. Lorsque ça n'est pas le cas, que l'on ait un candidat explicite à l'optimalité ou non, il est souvent utile pour étudier les formes  $\Omega^*$  solutions de (0.3), d'écrire des conditions d'optimalité. La première difficulté consiste alors à définir un cadre de calcul différentiel sur l'ensemble des domaines, ce qui peut se faire par exemple à l'aide des "dérivées de forme" (voir Page 14) ; la seconde est de montrer que l'optimalité de  $\Omega^*$  induit des propriétés de régularité de son bord. Ces deux difficultés sont en quelque sorte étroitement liées : d'une part, on s'attend à ce que les conditions d'optimalité induisent de la régularité sur  $\partial\Omega^*$  (voir la fin du Paragraphe 3.1.2, et le point (vi) du Théorème 3.2), d'autre part ces conditions nécessitent le plus souvent, pour avoir un sens, que le domaine  $\Omega^*$  soit déjà un peu régulier. On distingue ainsi deux types de résultats de régularité : ceux qui peuvent s'obtenir uniquement avec l'équation d'Euler-Lagrange, et ceux qui utilisent l'optimalité à travers la construction de compétiteurs adaptés. Il peut arriver de combiner les deux approches, en cherchant d'abord à obtenir un peu de régularité sur  $\Omega^*$  par la construction de compétiteurs (c'est souvent l'étape la plus difficile), puis en écrivant les conditions d'optimalité pour améliorer cette régularité. Notons que cette distinction existe également dans le calcul de variations, voir le début du Paragraphe 2.2.

*La plupart des contributions de ce manuscrit sont liées à l'écriture des conditions d'optimalité, la construction de compétiteurs, et leur utilisation pour obtenir des informations sur les formes optimales. Nous donnerons plusieurs résultats de régularité, en particulier aux Chapitres 2 et 3. Au Chapitre 1 nous étudierons des problèmes du type (0.3) qui amènent à des formes optimales irrégulières, et on devra alors prendre en compte ces irrégularités dans*

*l'écriture des conditions d'optimalité : on en déduira des informations sur la géométrie des domaines optimaux. Notons que dans ce dernier cas, l'utilisation des conditions d'optimalité d'ordre 2 est centrale. Au Chapitre 5, nous donnerons des résultats de symétrie et de non-symétrie des formes optimales, qui reposent également sur les conditions d'optimalité et la construction de compétiteurs. Enfin, au Chapitre 4, nous prendrons un point de vue inverse : on se demandera si une forme optimale  $\Omega^*$  satisfaisant des conditions d'optimalité (d'ordre 1 et 2) est un minimum local pour (0.3).*

- **Comment calculer numériquement les formes optimales ?** Cette question constitue un axe de recherche à part entière, que nous aborderons peu dans ce manuscrit : nous utiliserons néanmoins au Paragraphe 4.2 et au Chapitre 5 l'outil numérique, afin de tester certaines conjectures. En ce qui concerne la contrainte de convexité, la question numérique constitue également une perspective intéressante (voir [63, 140] et les travaux plus récents [167, 168]), qu'on évoquera au Paragraphe 1.7.

## Les fonctionnelles :

Dans ce travail, on peut distinguer deux types de résultats :

- Ceux qui s'attachent à l'étude d'un problème de la forme (0.3) pour une fonctionnelle  $J$  et une classe  $\mathcal{A}$  bien particulières : au Paragraphe 3.2 on étudie un problème de résistance optimale, au Paragraphe 4.2 on montre la stabilité de la boule euclidienne pour la première valeur propre (non nulle) de l'opérateur de Wentzell (qui interpole les valeurs propres de Steklov et de Laplace-Beltrami), et au Chapitre 5, on étudie la minimisation d'une valeur propre pour un problème d'évolution lié à un modèle de dynamique des populations.
- Ceux pour lesquels on cherche à obtenir des hypothèses générales sur les fonctionnelles, et qui s'appliquent donc à une large classe de problèmes. Aux Chapitres 1 et 2, on donnera de nombreux exemples qui amènent à des phénomènes similaires pour les formes optimales, au Paragraphe 3.1 on identifiera des conditions générales sur la fonctionnelle  $\mathcal{G}$  pour que les minimiseurs de  $J = P + \mathcal{G}$  (où  $P$  est la fonction périmètre) sous contrainte de volume soient des quasi-minimiseurs du périmètre, et au Paragraphe 4.1 on abordera de façon générale la question de la stabilité en optimisation de forme.

## Les résultats :

Aux **Chapitres 1 et 2**, on étudie des problèmes sous contrainte de convexité, soit de la forme

$$\min \{ J(\Omega), \Omega \in \mathcal{A}, \Omega \text{ convexe} \}, \quad (0.4)$$

où  $\mathcal{A}$  prend en compte les autres contraintes du problème (contrainte de volume, d'inclusion dans une boîte...). Nous verrons qu'un tel problème peut se formuler comme un problème de calcul de variations :

$$\min \{ F(u), u \in \mathcal{S}, u \text{ convexe} \},$$

où  $u : \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow ]0, \infty[$  correspond à un domaine  $\Omega$ ,  $F$  représente l'énergie  $J$  via cette correspondance, et  $\mathcal{S}$  (qui dépend de  $\mathcal{A}$ ) est un ensemble de fonctions sur la sphère<sup>3</sup>  $\mathbb{S}^{d-1}$ . Pour ces problèmes, des résultats d'existence sont en général relativement faciles à obtenir, car la convexité amène de la compacité forte. Néanmoins, l'étude des minimiseurs, par exemple à l'aide des conditions d'optimalité, devient difficile, car on souhaite par exemple faire des variations du type  $u_0 + tv$  où  $u_0$  est un minimiseur,  $t$  est petit (sans signe a priori), et  $v$  est une direction de dérivation. Mais afin d'écrire  $F(u_0) \leq F(u_0 + tv)$  et de tirer parti d'un développement limité, on doit avoir que  $u_0 + tv$  reste convexe pour  $t$  petit (si c'est le cas pour  $t$  positif, on obtient l'inégalité d'ordre 1  $F'(u_0).(v) \geq 0$ , et si c'est le cas quelque soit le signe de  $t$ , alors on obtient les conditions habituelles d'ordre 1 et 2, à savoir  $F'(u_0).(v) = 0$  et  $F''(u_0).(v, v) \geq 0$ ). Ceci n'est pas du tout automatique, et dans un cadre régulier, on peut le comprendre en regardant si  $D^2u_0$  est strictement positive (en tant que forme quadratique), ou si elle a une valeur propre nulle, auquel cas on dira que  $u_0$  sature la contrainte de convexité. On peut reformuler ceci heuristiquement par le fait que si on minimise sur un ensemble fortement compact (ici, l'ensemble des domaines convexes), alors ce dernier est d'intérieur vide, et ceci explique qu'il est difficile de trouver des perturbations admissibles.

3. On dit qu'une fonction sur la sphère est convexe si son extension positivement 1-homogène est convexe sur  $\mathbb{R}^d$ .

Le but des travaux que nous avons menés dans cette direction est donc de comprendre comment tenir compte de la contrainte de convexité : au **Chapitre 1**, nous abordons des problèmes de la forme (0.4) qui amènent les formes optimales à saturer “partout” la contrainte de convexité. On montrera que ceci est dû à des propriétés de non-convexité, voire de concavité de la fonctionnelle  $J$ . Ces situations se rencontrent rarement pour des problèmes d’optimisation/calcul de variations “classiques”, car souvent il n’y a pas existence d’un optimum sans une certaine convexité de la fonctionnelle à minimiser. Du fait de la compacité donnée par la contrainte de convexité, nous avons bien existence sans convexité de  $J$ , et c’est ce qui amène à considérer ces problèmes “inhabituels” : on évoquera, entre autres, le problème de Newton, deux conjectures célèbres liés à la convexité, à savoir la conjecture de Mahler et la conjecture de Pólya-Szegő, des problèmes d’isopérimétrie inverse, et enfin, de type Faber-Krahn inverse, voir la **Proposition 1.1** qui énonce le phénomène de saturation pour tous ces problèmes. Dans certains cas, nous obtenons une description bien plus précise de la géométrie des minimiseurs : les résultats les plus aboutis dans cette direction sont les **Théorèmes 1.2 et 1.3**, le premier (issu de [A10]<sup>4</sup>) affirmant que sous une hypothèse de concavité locale de la fonctionnelle  $J$  (voir (1.18)), les formes optimales planaires sont polygonales, et le second (issu de [A6]) qui généralise au cas de la dimension supérieure et affirme que l’espace des déformations (1.23) (via la paramétrisation utilisée) est de dimension finie. Nous montrerons que ces résultats s’appliquent aux problèmes de type isopérimétrie inverse (1.9) et (1.10), voir les **Propositions 1.4 et 1.6**.

Au **Chapitre 2**, on revient à des fonctionnelles  $J$  plus “classiques”, c’est-à-dire attestant d’une certaine convexité : un exemple typique de telle fonctionnelle est la fonction périmètre  $P$ , et plus généralement nous donnons des conditions générales sur une fonctionnelle  $\mathcal{G}$  pour que nos résultats s’appliquent à  $J = P + \mathcal{G}$ . Dans ce cas, on s’attend à un phénomène de régularisation, mais qui est limité à  $C^{1,1}$  du fait des possibles “recollements” entre des parties strictement convexes, et des parties qui saturent la convexité. Nous présentons deux approches, qui suivent la distinction indiquée au début de cette introduction et qui amènent d’une part à un résultat de régularité uniquement basé sur la condition d’optimalité d’ordre 1, et qui s’applique dans le cas planaire (voir le **Théorème 2.1** issu de [A10]), et d’autre part à un résultat de régularité utilisant l’optimalité à proprement parler, et dont la preuve consiste en la construction d’un compétiteur convexe bien choisi. Cette dernière approche (issue de [A1]) s’applique en toute dimension, et permet de considérer une plus grande classe de fonctionnelles, voir le **Paragraphe 2.2**. En particulier, on peut appliquer cette approche pour analyser la régularité des quasi-minimiseurs du périmètre sous contrainte de convexité, voir (2.7).

Dans le **Chapitre 3**, on aborde la question évoquée en Page 7 de la régularité des formes optimales (cette fois sans contrainte de convexité) : on traite d’abord au **Paragraphe 3.1** une classe de problèmes qui consistent à minimiser  $P + \mathcal{G}$  parmi les ouverts de volume donné, où  $P$  est le périmètre, et  $\mathcal{G}$  est une fonctionnelle faisant intervenir des énergies de type Dirichlet. On démontre que les minimiseurs sont des quasi-minimiseurs du périmètre, et on en déduit le **Théorème 3.1** (issu de [A5]) de régularité des formes optimales ; aussi, comme on l’a évoqué précédemment, on donne (dans le même théorème) un résultat d’existence, non classique en l’absence de boîte de confinement. Au **Paragraphe 3.2**, on étudie la minimisation de la fonctionnelle  $\mathcal{H}^1 + \mathcal{C}$  parmi les ensembles  $\Sigma$  connexes et 1-dimensionnels de  $D$  (un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ ), où  $\mathcal{H}^1(\Sigma)$  désigne la longueur de  $\Sigma$ , et  $\mathcal{C}(\Sigma)$  est sa souplesse<sup>5</sup>, soit l’opposé de l’énergie de Dirichlet de  $D \setminus \Sigma$  avec condition de Dirichlet. L’existence ici repose sur la présence de la contrainte de connexité, et si du point de vue des équations d’Euler-Lagrange cette contrainte ne pose pas de problème, du point de vue de la construction de compétiteurs on retrouvera comme pour la contrainte de convexité la difficulté de construire des compétiteurs connexes. Nous obtenons des résultats sur la topologie et sur la régularité des solutions, voir le **Théorème 3.2** issu de [A2]. Ici on expliquera qu’on ne peut pas se ramener à la théorie des quasi-minimiseurs de la longueur, et on devra en particulier reproduire la preuve de régularité pour notre problème ; entre autres étapes intermédiaires, on démontrera une formule de monotonie, et on établira par un argument de dualité un lien avec le problème de Mumford-Shah, ce qui nous permettra de classifier les “blow-up”. Pour les deux problèmes étudiés dans ce chapitre, la difficulté consiste à contrôler la variation de la fonctionnelle EDP ( $\mathcal{G}$  ou  $\mathcal{C}$ ) pour des domaines a priori très irréguliers.

Le **Chapitre 4** s’intéresse à la question de la stabilité des formes optimales, sujet qui a retrouvé un gain

4. La numérotation [Ax] fait référence à la bibliographie de la Page 3, alors que la numérotation [x] renvoie à la bibliographie générale, en fin de manuscrit.

5. “compliance” en anglais

d'intérêt dans les dix dernières années. *On fait d'abord le point sur l'approche par dérivées seconde de forme, en identifiant les hypothèses générales qui permettent de montrer qu'un point critique stable est un minimum local (voir le **Théorème 4.1** issu de [A3]), et on aborde ensuite un problème original d'optimisation de valeur propre (la première non triviale), faisant intervenir l'opérateur de Wentzell. En particulier, afin de tester la conjecture que la boule maximise cette valeur propre sous contrainte de volume (parmi les domaines homéomorphes à une boule de  $\mathbb{R}^3$ ), on montre la stabilité (linéaire) de celle-ci, voir le **Théorème 4.3** tiré de [A7].*

Le **dernier Chapitre** s'intéresse à un modèle classique de dynamique des populations, qui permet de représenter les possibilités de survie d'une espèce en fonction de l'agencement de son environnement. La maximisation des chances de survie se ramène à la minimisation de la valeur propre principale d'une EDP elliptique faisant intervenir une fonction de répartition des ressources. Il est classique que par optimalité, cette dernière sera une fonction indicatrice, et on est ramené à la recherche de la forme optimale des zones favorables de l'environnement (dont le volume est contraint). On aborde plusieurs conditions sur le bord de l'environnement, à savoir Dirichlet, Neumann, et plus généralement Robin. On apporte plusieurs contributions faisant intervenir des procédés de symétrisation. A priori ces procédés ne s'appliquent pas classiquement, du fait des conditions de bord mais *on montre qu'une adaptation des méthodes classiques combinée à plusieurs arguments nouveaux permettent de résoudre explicitement le problème uni-dimensionnel (**Théorème 5.1**), et d'étudier la possibilité d'une forme optimale à symétrie de rotation ; en particulier, on montre que la boule n'est presque jamais solution pour ce problème, voir les **Théorèmes 5.2 et 5.3**. Tous ces résultats sont issus de [A4].*

Chaque chapitre s'accompagne de diverses **perspectives** liées aux problèmes étudiés et aux questions ouvertes suggérées par nos résultats. Nous ajoutons en fin de manuscrit un paragraphe de perspectives plus générales, liées à des projets qui s'inscrivent également dans le cadre de l'optimisation de forme, mais abordent des problèmes et des questions non évoqués dans les différents Chapitres. Une adaptation des techniques développées dans ce manuscrit pourront certainement donner des éléments de réponse pour ces problèmes, mais de nouvelles idées devront également être apportées.

# Notations

## Notations générales

$d$	: entier naturel non nul, dimension de l'espace de travail
$\mathcal{K}^d$	: ensemble des domaines convexes compacts de $\mathbb{R}^d$
$\mathcal{K}_0^d$	: ensemble des corps convexes (convexes compacts d'intérieur non vide) de $\mathbb{R}^d$
$m_0$	: valeur donnée à la contrainte de volume
$\mathcal{H}^s$	: mesure de Hausdorff de dimension $s$ dans $\mathbb{R}^d$ , $s \in [0, d]$
$\dim_{\mathcal{H}}$	: dimension de Hausdorff
$\int_A f d\mu$	: $\frac{1}{\mu(A)} \int_A f d\mu$
$f^+$	: $\max\{f, 0\}$ (où $f$ est un réel ou une fonction)
$(r, \theta)$	: coordonnées polaires, dans $[0, +\infty[ \times \mathbb{T}$ ou $[0, +\infty[ \times \mathbb{S}^{d-1}$ suivant la dimension

## Domaines, géométrie

$\Omega$	: désigne un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ , souvent ouvert, parfois seulement mesurable
$K$	: désigne un sous-ensemble convexe compact de $\mathbb{R}^d$
$\Omega^*, K^*$	: solution d'un problème d'optimisation de forme
$D$	: ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^d$ , appelé "boîte", et qui désigne en général une contrainte d'inclusion
$\mathbb{D}$	: disque unité de $\mathbb{R}^2$ ; pour la conjecture de Pólya-Szegö, on sera amené à voir ce disque dans $\mathbb{R}^3$
$\mathbb{S}^{d-1}$	: sphère unité de $\mathbb{R}^d$
$\mathbb{T}$	: $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ; les fonctions définies sur $\mathbb{T}$ seront vues comme des fonctions sur $\mathbb{R}$ et $2\pi$ -périodiques
$B^d$	: boule euclidienne de $\mathbb{R}^d$
$Q^d$	: hypercube $] -1, 1[^d$
$O_d$	: octaèdre $(Q^d)^\circ$
$\overset{\circ}{A}, \bar{A}$	: intérieur, adhérence d'un ensemble $A$
$B(x, r)$	: boule de centre $x$ et de rayon $r$
$\mathbf{n}_{\partial\Omega}$	: vecteur unitaire normal extérieur à $\partial\Omega$ , lorsque celui-ci existe
$H_{\partial\Omega}$	: courbure moyenne de $\partial\Omega$ (somme des courbures sectionnelles), lorsqu'elle est bien définie
$\mathbf{B}_{\partial\Omega}$	: seconde forme fondamentale de $\partial\Omega$ , lorsqu'elle est bien définie
$\nabla_\tau$	: gradient tangentiel
$\partial_{\mathbf{n}}$	: dérivée normale extérieure

## Convexité

On renvoie à [190] pour les démonstrations des assertions classiques de ce paragraphe. Etant donné  $K \in \mathcal{K}^d$ , on définit :

- sa fonction support  $h_K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$h_K(x) := \sup \{ \xi \cdot x, \xi \in K \}.$$

Il est classique que  $h_K$  caractérise le corps convexe  $K$ , et est (positivement) 1-homogène et convexe. De plus, toute fonction  $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  1-homogène convexe est la fonction support d'un ensemble convexe.

On confondra souvent la donnée d'une fonction  $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  1-homogène avec sa restriction à la sphère  $\mathbb{S}^{d-1}$ . En particulier, une fonction  $h : \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$  sera dite convexe si son extension 1-homogène est convexe.

- Si  $0 \in \overset{\circ}{K}$ , la fonction jauge  $u_K : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow ]0, \infty[$  de  $K$  est définie par :

$$u_K(x) = \inf \{ \lambda \geq 0, x \in \lambda K \}$$

et est également 1-homogène et convexe, et caractérise  $K$ .

Si  $u$  est une fonction strictement positive sur  $\mathbb{S}^{d-1}$ , alors on définit

$$\Omega_u := \left\{ (r, \omega) \in [0, \infty) \times \mathbb{S}^{d-1} ; r < \frac{1}{u(\omega)} \right\}.$$

Ainsi,  $\Omega_u$  est convexe si et seulement si  $u$  est convexe, et  $u$  est alors la fonction jauge de  $\overline{\Omega_u} \in \mathcal{K}_0^d$ . Si  $J$  est une fonctionnelle de forme, alors on considèrera souvent  $j(u) := J(\Omega_u)$ .

- la “*surface area measure*” de  $K$  est la mesure  $\mu_K$  sur la sphère définie par :

$$\mu_K(\omega) = \mathcal{H}^{d-1}(n_{\partial K}^{-1}(\omega)), \quad \forall \omega \subset \mathbb{S}^{d-1}$$

- le dual de  $K$ , est

$$K^\circ := \{ \xi \in \mathbb{R}^d / \forall x \in K, x \cdot \xi \leq 1 \}.$$

Remarquons que la définition est valable si  $K$  n'est pas supposé convexe.

- Enfin, si  $A$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^d$ , on note  $\text{Conv}(A)$  le plus petit convexe qui contient  $A$ .

## Espaces fonctionnels

Ici  $\Omega$  désigne un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  :

$C^k(\Omega)$	: espace des fonctions $k$ fois continûment différentiables sur $\Omega$ , $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$
$C_c^k(\Omega)$	: espace des fonctions $C^k$ à support compact dans $\Omega$
$C^{k,\alpha}(\Omega)$	: espace des fonctions $C^k$ à dérivée $k$ -ième $\alpha$ -hölderienne, $\alpha \in ]0, 1[$
$W^{m,p}(\Omega)$	: si $m \in \mathbb{N}$ , espace de Sobolev des fonctions dont la $m$ -ième différentielle (au sens des distributions) est dans $L^p(\Omega)$ ; on peut généraliser à $m \in \mathbb{R}_+$
$H^s(\Omega)$	: $W^{s,2}(\Omega)$
$H_0^1(\Omega)$	: adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ , pour la norme $H^1$
$\mathcal{M}(\Omega)$	: espace des mesures de Radon
$\mathcal{M}_P(\Omega)$	: ensemble des mesures de probabilité sur $\Omega$

## Fonctionnelles de formes

Etant donné  $\Omega$  un sous-ensemble mesurable de  $\mathbb{R}^d$ , on considèrera :



- **Volume** :  $\text{Vol}(\Omega) = |\Omega|$  désigne la volume de  $\Omega$ , c'est-à-dire sa mesure de Lebesgue  $d$ -dimensionnelle.
- **Périmètre** : (on réfère par exemple à [164] pour plus de détails) on définit le périmètre en utilisant la formulation de De Giorgi, à savoir :

$$P(\Omega) := \sup \left\{ \int_{\Omega} \text{div} \phi \, dx : \phi \in C_c^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d), |\phi| \leq 1 \text{ on } \mathbb{R}^d \right\}. \quad (0.5)$$

On rappelle que dans ce cadre l'ensemble  $\Omega$  est considéré à un ensemble de mesure nulle près, et on peut choisir un représentant tel que le bord topologique satisfait

$$\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d, 0 < |\Omega \cap B_r(x)| < |B_r|, \forall r > 0\}. \quad (0.6)$$

On choisira toujours ce représentant, notamment les résultats de régularité sont valables pour ce représentant, voir par exemple (3.3). Si  $\Omega$  est à périmètre fini, soit  $P(\Omega) < \infty$ , alors on peut définir son bord réduit  $\partial^*\Omega$  comme l'ensemble des points  $x \in \mathbb{R}^d$  tel que

$$\text{la limite } \mathbf{n}_{\partial\Omega}(x) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\nabla \mathbb{1}_{\Omega}(B_r(x))}{|\nabla \mathbb{1}_{\Omega}|(B_r(x))} \text{ existe et est telle que } |\mathbf{n}_{\partial\Omega}(x)| = 1,$$

où  $|\nabla \mathbb{1}_{\Omega}|$  est la variation totale de  $\nabla \mathbb{1}_{\Omega}$ , qui est une mesure vectorielle. De plus  $\partial^*\Omega$  est un sous-ensemble dense de  $\partial\Omega$  et  $P(\Omega) = \mathcal{H}^{d-1}(\partial^*\Omega)$ .

Dans le Chapitre 1, on sera amené à utiliser une autre définition du périmètre, mieux adaptée aux domaines convexes de  $\mathbb{R}^3$ , à savoir, si  $K \in \mathcal{K}_3$  :

$$P(K) = \begin{cases} \mathcal{H}^2(\partial K) & \text{si } \overset{\circ}{K} \neq \emptyset, \\ 2\mathcal{H}^2(K) & \text{sinon} \end{cases} \quad (0.7)$$

Les valeurs diffèrent du périmètre de De Giorgi si  $K$  est d'intérieur vide, mais comme il y a peu de confusion possible, nous utiliserons la même notation.

- **Volumes de Mahler** : si  $K \in \mathcal{K}_0^d$ , alors on définit

$$M(K) = |K||K^\circ|, \quad \mathcal{P}(K) = \inf\{|K|(K-z)^\circ|, z \in \overset{\circ}{K}\}$$

(attention à ne pas confondre ici le dual  $K^\circ$  et l'intérieur  $\overset{\circ}{K}$ ) qui sont respectivement les volumes de Mahler et de Mahler non-symétrique (l'infimum ci-dessus est atteint en un point unique  $z = s(K)$  intitulé point de Santaló de  $K$  (voir [188])).

- **Largeur moyenne** : si  $K \in \mathcal{K}^d$ , on pose

$$\mathcal{W}(K) := 2 \int_{\mathbb{S}^{d-1}} h_K \left( = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} [h_K(\mathbf{n}) + h_K(-\mathbf{n})] \right)$$

qui est la largeur moyenne de  $K$ .

- **Capacité électrostatique** : si  $K \in \mathcal{K}^3$ , on définit

$$\text{Cap}(K) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w|^2, w \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3) \text{ tel que } w = 1 \text{ sur } K \right\}, \quad (0.8)$$

et on a  $\text{Cap}(K) = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus K} |\nabla w_K|^2$  où  $w_K$  est le potentiel électrostatique, c'est-à-dire l'unique solution de l'équation d'Euler-Lagrange pour (0.8), à savoir :

$$\Delta w_K = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^3 \setminus K, \quad w_K = 1 \text{ sur } \partial K, \quad w_K(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0. \quad (0.9)$$

- **Energie de Dirichlet** : étant donné  $f \in L^2(\Omega)$ , on considère l'EDP elliptique (on suppose pour simplifier que  $\Omega$  est ouvert)

$$w_\Omega \in H_0^1(\Omega), \quad -\Delta w_\Omega = f \text{ dans } \Omega, \quad (0.10)$$

et on définit l'énergie de Dirichlet par

$$\begin{aligned} E_f(\Omega) &:= \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla w_{\Omega}|^2 - f w_{\Omega} \right) = \min \left\{ \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla w|^2 - f w \right), w \in H_0^1(\Omega) \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w_{\Omega}|^2 = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} w_{\Omega} f. \end{aligned}$$

Dans le cas où  $f \equiv 1$ , l'énergie de Dirichlet est liée à la rigidité torsionnelle  $T(\Omega)$ , par la formule  $T(\Omega) = -2E_1(\Omega)$ .

- **Valeurs propres du Laplacien-Dirichlet :** On définit  $\lambda_1(\Omega) \leq \lambda_2(\Omega) \leq \dots$  les valeurs propres de l'opérateur Laplacien avec condition de Dirichlet sur  $\partial\Omega$ .

Avec la paramétrisation en fonction jauge, on définira

$$m(u) = |\Omega_u|, \quad p(u) = P(\Omega_u), \quad e_f(u) = E_f(\Omega_u).$$

## Dérivations de forme

Etant donné  $J$  une fonctionnelle de forme, définie sur une classe de domaine invariante par difféomorphismes lipschitziens, on fixe  $\Omega$  et on s'intéresse aux différentielles premières et secondes en 0 (par défaut, au sens de Fréchet) de la fonction

$$\mathcal{J}_{\Omega} : \theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \mapsto J((Id + \theta)(\Omega)).$$

Ainsi on note

$$J'(\Omega).\xi = \mathcal{J}'_{\Omega}(0).\xi, \quad J''(\Omega).(\xi, \xi) = \mathcal{J}''_{\Omega}(0).(\xi, \xi),$$

quand cela est bien défini. Si on note  $\Theta = W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ , alors  $J'(\Omega)$  est une forme linéaire continue sur  $\Theta$ , et  $J''(\Omega)$  est une forme bilinéaire, symétrique et continue sur  $\Theta$ .

On rappelle les propriétés de structure, observées par Hadamard dans le cas des dérivées premières, et dans [177] pour les dérivées secondes : sous réserve de régularité suffisante sur  $\Omega$ , il existe  $\ell_1 = \ell_1^J(\Omega)$  forme linéaire et  $\ell_2 = \ell_2^J(\Omega)$  forme bilinéaire symétrique telles que

$$\begin{aligned} \forall \xi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d), \quad J'(\Omega).\xi = \ell_1(\xi \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega}), \quad J''(\Omega).(\xi, \xi) = \ell_2(\xi \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega}, \xi \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega}) + \ell_1(Z_{\xi}) \\ \text{où } Z_{\xi} = \mathbf{B}_{\partial\Omega}(\xi_{\tau}, \xi_{\tau}) - 2\nabla_{\tau}(\xi \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega}) \cdot \xi_{\tau}, \quad (0.11) \end{aligned}$$

où  $\xi_{\tau} = \xi - (\xi \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega})\mathbf{n}_{\partial\Omega}$  est la composante tangentielle de la déformation, et  $\mathbf{B}_{\partial\Omega}$  est la seconde forme fondamentale de  $\partial\Omega$ .

Ainsi, si  $\varphi \in W^{1,\infty}(\partial\Omega)$ , on définit  $\xi_{\varphi}$  une extension Lipschitz à  $\mathbb{R}^d$  de  $\varphi\mathbf{n}_{\partial\Omega}$  qui constitue une déformation normale, et alors

$$J'(\Omega).\xi_{\varphi} = \ell_1(\varphi), \quad J''(\Omega).(\xi_{\varphi}, \xi_{\varphi}) = \ell_2(\varphi, \varphi).$$

On appellera différentielle de forme de  $J$  en  $\Omega$ , tantôt  $J'(\Omega)$ ,  $J''(\Omega)$ , tantôt  $\ell_1^J(\Omega)$ ,  $\ell_2^J(\Omega)$ , suivant le contexte.

Concluons par un exemple : si  $\Omega$  est de classe  $C^2$ , alors pour tout  $\varphi$  définie sur  $\partial\Omega$ ,

$$\ell_1^{\text{Vol}}(\varphi) = \int_{\partial\Omega} \varphi, \quad \ell_2^{\text{Vol}}(\varphi) = \int_{\partial\Omega} H_{\partial\Omega} \varphi^2.$$

# Chapitre 1

## Contrainte de convexité et fonctionnelles localement CONCAVES ([A6,A8,A11], [A10, Section 4] et [A18, Section 5])

Dans ce chapitre, on présente les résultats de [40, 118, 151], [150, Section 4] et [152, Section 5]. On s'intéresse à des problèmes d'optimisation de forme du type

$$\min \{J(\Omega), \Omega \in \mathcal{A}, \Omega \text{ convexe} \}, \quad (1.1)$$

où  $\mathcal{A}$  est une classe d'ouverts ou une classe de fermés<sup>1</sup> de  $\mathbb{R}^d$ .

Dans ce contexte, un résultat d'existence pour le problème (1.1) est en général relativement facile à démontrer, car la contrainte de convexité apporte de la compacité : intuitivement, elle empêche des phénomènes d'oscillations qui obligent en général à considérer des topologies faibles, et le fait que ces oscillations soient interdites permet d'envisager des propriétés de compacité forte. En conséquence, on peut s'intéresser à des problèmes d'optimisation "inhabituels" ; en effet, si on a seulement compacité faible, on doit en général demander une certaine convexité de l'énergie à minimiser pour avoir existence. Dans le cadre d'une compacité forte, on peut envisager des problèmes non-convexes ; on verra même que dans plusieurs problèmes d'optimisation, incluant des conjectures célèbres, les fonctionnelles qui interviennent ne sont nulle-part convexes, ou même attestent d'une certaine concavité. *L'objectif de ce chapitre est de clarifier ces notions, et de voir que de nombreux problèmes rentrent dans ce cadre*<sup>2</sup>.

### 1.1 Exemples de problèmes d'optimisation

Dans ce paragraphe, on liste des problèmes d'origines très variées, mais qui sont tous de la forme (1.1) ; on verra dans les paragraphes suivants que les fonctionnelles à minimiser partagent des propriétés communes, et en conséquence leurs minima également.

#### 1.1.1 Problème de Newton

Historiquement, il est naturel de débiter avec le problème de résistance minimale de Newton, qui consiste à chercher la forme à donner à un corps se déplaçant à vitesse constante (en direction et en vitesse) dans un gaz rare, afin de minimiser sa résistance. Newton modélise ce problème en se restreignant à des ensembles convexes, dont la base est un disque fixe orthogonal à la vitesse, et de hauteur donnée. On peut donc voir ces ensembles comme des graphes sur le disque de fonctions concaves, et on arrive au problème de calcul de variations suivant :

$$\min \left\{ F(u) := \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{1 + |\nabla u|^2}, \quad u : \mathbb{D} \rightarrow [0, M] \text{ concave} \right\}, \quad (1.2)$$

où  $\mathbb{D} = \{(x, y), x^2 + y^2 < 1\}$ ,  $M \in \mathbb{R}_+^*$  est une hauteur fixée, et  $F(u)$  modélise la résistance du domaine délimité par  $\mathbb{D}$  et le graphe de  $u$ . Newton se restreint alors aux formes à symétrie axiale, c'est à dire aux graphes des

---

1. En général on notera  $\Omega$  pour un ouvert, et  $K$  pour un fermé. Pour les fonctionnelles géométriques, il ne sera pas gênant de confondre un ensemble avec son adhérence ou son intérieur, sauf si cet ensemble est un fermé d'intérieur vide (voir (0.7)). Lorsqu'une fonctionnelle fera intervenir une EDP, on considèrera dans ce chapitre que l'EDP est posée sur un ouvert.

2. On prévient le lecteur, afin d'éviter toute confusion, que les mots *convexe/concave* feront tantôt référence aux propriétés des ensembles admissibles (ou des fonctions qui les paramètrent), qui représentent la variable d'optimisation dans (1.1), tantôt aux propriétés de la fonctionnelle à optimiser  $J$ .

fonctions  $u : \mathbb{D} \rightarrow [0, M]$  qui sont radiales. Il trouve un candidat explicite pour l'optimalité, qui se décrit par une fonction radiale  $u_M$  ayant un plateau, c'est-à-dire telle que  $u_M(x) = M$  pour  $|x| \in [0, r_M]$  (où  $r_M \in ]0, 1[$ ) et qui est strictement concave sur  $[r_M, 1]$  avec  $u_M = 0$  sur  $\partial\mathbb{D}$  (il donne une caractérisation explicite de  $u_M$  et  $r_M$ ). Ce domaine se trouve en effet être optimal parmi les formes à symétrie axiale. Il faudra attendre 1996 avec [116] et [35] pour avoir deux preuves que la solution de Newton n'est pas optimale sans restriction de symétrie, autrement dit le problème (1.2) témoigne d'un phénomène de brisure de symétrie. Dans la première référence, P. Guasoni exhibe (pour certaines valeurs de  $M$ ) un domaine dont la résistance est inférieure à celle de la solution de Newton, dans la seconde, Brock-Ferone-Kawohl, sur une idée de H. Brézis, observent que la solution de Newton ne satisfait pas la condition d'optimalité d'ordre 2, qui pourtant devrait être légitime là où  $u_M$  est strictement concave (cette preuve est valable pour toute valeur de  $M$ ) : autrement dit, il existe  $v : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\left[ u_M + tv \text{ est concave et } 0 \leq u_M + tv \leq M \right] \text{ pour tout } |t| \text{ petit, et } F''(u_M).(v, v) < 0,$$

et ceci contredit l'optimalité de  $u_M$ .

Dans les années qui suivent, plusieurs travaux ([141, 142, 61, 59, 143, 144, 76, 77, 62, 63, 145, 78, 60]), principalement menés par T. Lachand-Robert et co-auteurs (M. Comte, G. Carlier, B. Maury, M. Peletier), amènent une meilleure compréhension du problème de Newton, et de la contrainte de convexité en général. Ces lignes s'inspirent d'ailleurs du mémoire d'habilitation [139] de T. Lachand-Robert, et le travail décrit dans la suite de cette partie est fortement inspiré de ces travaux. On reviendra d'ailleurs sur certains de ceux-ci dans la suite.

Cet exemple du problème de Newton permet de voir se dessiner les principales particularités d'un problème d'optimisation sous contrainte de convexité. Comme on l'a dit précédemment, un résultat d'existence est facile à obtenir, et on observe que si on supprime la contrainte de convexité des ensembles (i.e. la concavité des fonctions  $u$  dans (1.2)), le problème n'a pas de minimum : il suffit de prendre une fonction  $u$  très oscillante pour voir que l'infimum est nul<sup>3</sup>. On peut lier cette remarque au fait que la fonctionnelle  $F$  n'est pas convexe ; on verra même par la suite que  $F$  est en fait "nulle par convexe".

### 1.1.2 Conjecture de Mahler

On rappelle (voir aussi la page de Notation en début de manuscrit) que  $\mathcal{K}^d$  désigne l'ensemble des convexes compacts de  $\mathbb{R}^d$ , et  $\mathcal{K}_0^d$  l'ensemble des corps convexes<sup>4</sup> de  $\mathbb{R}^d$ . Si  $K \in \mathcal{K}_0^d$ , on considère le *volume de Mahler*  $M(K)$  de  $K$  comme le produit du volume de  $K$  et de celui de son dual polaire :

$$M(K) := |K||K^\circ|.$$

On dit également que  $K$  est symétrique si  $-K = K$ . Dans ce cas, on peut interpréter  $K$  comme la boule unité fermée d'une norme de  $\mathbb{R}^d$ , et  $K^\circ$ , également symétrique, est alors la boule unité de la norme duale.

#### Version symétrique :

La version symétrique de la conjecture de Mahler consiste à savoir si l'inégalité suivante est valable pour tout corps convexe symétrique  $K$  :

$$M(Q^d) \leq M(K), \tag{1.3}$$

où  $Q^d$  est le cube unité de  $\mathbb{R}^d$  ; autrement dit, on demande si le cube est solution de

$$\min \left\{ |K||K^\circ|, K \in \mathcal{K}_0^d, -K = K \right\}, \tag{1.4}$$

ce qui signifie que la norme infinie (dont  $Q^d$  est la boule unité) a un volume de Mahler minimal parmi les normes de  $\mathbb{R}^d$ .

Dans [26] un résultat important affirme que l'inégalité est valable à un facteur exponentiel près. Dans [138], Kuperberg améliore la constante du facteur exponentiel et montre :

$$\forall K \text{ corps convexe symétrique de } \mathbb{R}^d, (\pi/4)^{d-1} M(Q^d) \leq M(K).$$

3. C'est une remarque déjà faite par Legendre en critique des travaux de Newton ; il est à noter que dans le cas d'une fonction  $u$  oscillante, la valeur  $F(u)$  ne représente plus la résistance du domaine délimité par  $\mathbb{D}$  et le graphe de  $u$  dans la modélisation de Newton, mais est quand même bien définie, si on s'affranchit de la question physique initiale.

4. compact convexe d'intérieur non vide

En dimension  $d = 2$ , une preuve de (1.3) est donnée dans le papier original de Mahler [165]. Il a également été montré par Reisner dans [183] que le cas d'égalité dans (1.3) est atteint si et seulement si  $K$  est un parallélogramme. En dimension supérieure, et donc même en dimension 3, (1.3) reste une question ouverte.

Il est intéressant de remarquer ici que  $Q^d$  n'est pas le seul minimiseur attendu. Premièrement, le volume de Mahler est invariant par dualité ( $M(K) = M(K^\circ)$ ) et donc  $O_d := (Q^d)^\circ$  (octaèdre de dimension  $d$ ) a une énergie égale à celle du cube. Ensuite  $M$  est aussi invariant par affinité, au sens où si  $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  est une application linéaire inversible, alors  $M(T(K)) = M(K)$ . Ceci explique qu'en dimension 2, tout parallélogramme est solution. Enfin, et ceci est plus difficile à appréhender, il y a une sorte d'invariance avec la dimension, dans le sens où on peut montrer :

$$M(Q^{d_1} \times O_{d_2}) = \frac{M(Q^{d_1})M(O_{d_2})}{\binom{d_1 + d_2}{d_1}} = M(Q^{d_1 + d_2}),$$

puisque  $M(Q^d) = \frac{4^d}{d!}$ . Ainsi le produit de cubes et d'octaèdres, le dual d'un produit de cubes et d'octaèdres, etc... seront aussi des minimiseurs si la conjecture est valide, ce qui augmente le nombre de candidats avec la dimension. On appelle les domaines ainsi construits les polytopes de Hanner. Néanmoins, en dimension 2, le carré est le seul minimiseur (à transformation linéaire près), puisque son dual lui est linéairement équivalent, et en dimension 3, seuls le cube et son dual l'octaèdre sont les minimiseurs attendus, à transformation linéaire près.

On peut également faire les remarques suivantes (voir également [197]) :

- on montre facilement existence d'un convexe optimal : il suffit de tirer parti de l'invariance par application linéaire et de considérer grâce au Théorème de John les convexes  $K$  tels que  $B^d \subset K \subset d.B^d$  : on borne ainsi les ensembles admissibles et on évite également les phénomènes d'aplatissement.
- Si on se passe de la contrainte de convexité, du fait que  $K^\circ = \text{Conv}(K)^\circ$ , il est facile de construire  $K$  tel que  $|K||K^\circ|$  soit proche de 0, donc il n'y a pas de minimum.
- Le problème de maximisation revient à l'inégalité de Blaschke-Santalò, qui dit que

$$\forall K \text{ corps symétrique convexe, } M(K) \leq M(B^d),$$

où  $B^d$  désigne la boule unité euclidienne, et le cas d'égalité n'est possible que si  $K$  est un ellipsoïde. C'est donc la norme euclidienne qui maximise le volume de Mahler. Ici on a un problème d'optimisation sans réelle contrainte de convexité : en constatant que  $M(K) \leq M(\text{Conv}(K))$ , on voit que l'inégalité est valable si  $K$  n'est pas supposé convexe.

- Afin de supporter la conjecture, il est démontré que les candidats à l'optimalité sont des minimiseurs locaux<sup>5</sup> : cela a été fait d'abord pour le cube dans [174] puis dans [131] pour tous les autres minimiseurs conjecturés (polytopes de Hanner).

### Version non symétrique :

On peut aussi poser une version non-symétrique de la conjecture de Mahler, peut-être plus facile à analyser puisque le phénomène de multiplicité des minimiseurs avec la dimension n'apparaît pas : précisément, afin de donner une propriété d'invariance par translation du problème, on introduit le volume de Mahler non-symétrique :

$$\mathcal{P}(K) = \inf\{|K||K - z|^\circ, z \in \overset{\circ}{K}\},$$

(attention à ne pas confondre ici le dual  $K^\circ$  et l'intérieur  $\overset{\circ}{K}$ ) et en notant  $\Delta_d$  un simplexe non dégénéré de  $\mathbb{R}^d$  (la valeur de  $\mathcal{P}$  est indépendante du choix du simplexe), il est conjecturé (voir [165, 132]) que  $\Delta_d$  est l'unique solution (à transformation affine près) de

$$\min\{\mathcal{P}(K), K \in \mathcal{K}_0^d\}. \tag{1.5}$$

On peut faire les mêmes remarques que pour la version symétrique du problème, en particulier il est montré dans [132] que le simplexe est un minimiseur local.

---

5. pour la distance de Banach-Mazur

### 1.1.3 Conjecture de Pólya-Szegö

Ici on s'intéresse à une inégalité qui lie un terme géométrique (le périmètre) avec un terme de type EDP (la capacité électrostatique). Plus précisément, si  $K \in \mathcal{K}^3$ , on considère  $P$  le périmètre de  $K$  défini par :

$$P(K) = \begin{cases} \mathcal{H}^2(\partial K) & \text{si } \overset{\circ}{K} \neq \emptyset \\ 2\mathcal{H}^2(K) & \text{sinon} \end{cases},$$

où l'extension au cas d'intérieur vide permet d'avoir  $P$  continu sur  $\mathcal{K}^3$  pour la distance de Hausdorff, et on définit  $\text{Cap}(K)$  par

$$\text{Cap}(K) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w|^2, w \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3) \text{ tel que } w = 1 \text{ sur } K \right\},$$

qui représente la capacité électrostatique de  $K$  (liée à la théorie du potentiel).

La conjecture de Pólya-Szegö consiste à savoir si l'inégalité suivante est valable pour tout convexe compact de  $\mathbb{R}^3$  tel que  $\mathcal{H}^2(K) > 0$  (afin d'avoir  $P(K) > 0$ ) :

$$\frac{\text{Cap}(K)^2}{P(K)} \geq \frac{\text{Cap}(\mathbb{D})^2}{P(\mathbb{D})},$$

où  $\mathbb{D} = \{(x, y), x^2 + y^2 \leq 1\} \times \{0\}$ . Autrement dit, la question est de savoir si le disque 2-dimensionnel est solution du problème

$$\min \left\{ \frac{\text{Cap}(K)^2}{P(K)}, K \in \mathcal{K}^3 \text{ tel que } \mathcal{H}^2(K) > 0 \right\}. \quad (1.6)$$

L'énergie considérée étant invariante par homothétie, ce problème est équivalent<sup>6</sup> à la minimisation de la capacité parmi les corps convexes de périmètre donné, ou encore à la minimisation de  $\text{Cap}^2 - \mu P$  où  $\mu = \inf \left\{ \frac{\text{Cap}(K)^2}{P(K)} \right\} \in \mathbb{R}_+^*$  est la valeur minimale.

Comme pour le problème de Mahler, on peut faire les remarques suivantes :

- pour montrer l'existence, il suffit de remarquer que les suites minimisantes ne convergent pas vers un convexe 1-dimensionnel (qui ne satisfait pas la contrainte  $\mathcal{H}^2(K) > 0$ ), voir [80],
- si on enlève la contrainte de convexité, on peut voir que l'infimum est nul et n'est pas atteint : il suffit de considérer un ensemble inclus dans une boule fixe (sa capacité sera contrôlée par monotonie) et dont le bord est de périmètre très grand,
- le supremum de l'énergie est  $+\infty$ , et une suite d'ellipsoïdes convergeant vers un segment est une suite maximisante (voir [80]),
- dans [100], différentes classes de domaines presque plats sont considérées et il est montré que le disque a une énergie inférieure (remarquons qu'il est connu que le disque est optimal parmi les convexes plats, voir [80]).

### 1.1.4 Problèmes isopérimétriques inverses

Commençons par citer l'inégalité isopérimétrique inverse due à K. Ball (voir [10]) : sans contrainte, on voit que le supremum du ratio isopérimétrique est  $+\infty$ , même parmi les corps convexes. Mais on peut forcer une invariance par application linéaire en considérant, pour  $K \in \mathcal{K}_0^d$  :

$$I(K) := \min_{T \in GL_d(\mathbb{R})} \left\{ \frac{P(T(K))}{|T(K)|^{\frac{d-1}{d}}} \right\}, \quad (1.7)$$

qui sélectionne le meilleur arrangement affine de  $K$  par rapport au ratio isopérimétrique, et par suite considérer les problèmes d'optimisation

$$\max \{I(K), K \in \mathcal{K}_0^d\}, \quad \max \{I(K), K \in \mathcal{K}_0^d, -K = K\}. \quad (1.8)$$

K. Ball montre que le simplexe et le cube sont les solutions respectives de ces problèmes.

6. Ce qui signifie que les minima sont les mêmes, à homothétie près.

Dans l'esprit de cet exemple, on peut introduire une classe de problème qu'on qualifera de type "isopérimétrie inverse"<sup>7</sup> :

$$\min\{F(|\Omega|, E_f(\Omega), \lambda_1(\Omega)) - P(\Omega) ; \Omega \text{ ouvert convexe tel que } D_1 \subset \Omega \subset D_2\} \quad (1.9)$$

où  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  (voir page 12 pour une définition des fonctionnelles de forme qui interviennent) et  $D_1 \subset D_2$  sont des ouverts convexes de  $\mathbb{R}^d$ . Si on suppose  $D_1 \neq \emptyset$  et  $D_2$  borné (et  $F$  continue), on montre facilement un résultat d'existence ; sinon, il faut étudier les suites minimisantes et exclure des phénomènes d'aplatissement et de divergence à l'infini.

La fonctionnelle est de même nature que pour le problème de Pólya-Szegö qui se ramène à minimiser  $\text{Cap}^2 - \mu P$  pour un réel  $\mu > 0$ . Néanmoins on verra que le cas de la fonctionnelle de Pólya-Szegö est plus difficile à analyser car l'énergie est définie à partir d'une EDP sur l'extérieur du domaine, voir le Paragraphe 1.6.2.

On peut aussi inclure une contrainte de volume, et s'intéresser aux problèmes

$$\min\{G(E_f(\Omega), \lambda_1(\Omega)) - P(\Omega) ; \Omega \text{ convexe de } \mathbb{R}^d, |\Omega| = m_0\}, \quad (1.10)$$

où  $m_0 \in ]0, +\infty[$  et  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Par exemple, le problème suivant :

$$\min\{\mu \lambda_1(\Omega) - P(\Omega) ; \Omega \text{ convexe de } \mathbb{R}^2, |\Omega| = m_0\},$$

admet une solution (pour  $\mu \geq 0$ ), et mesure une compétition entre la minimisation de  $\lambda_1$  qui donne un disque (si  $\mu = +\infty$ ) et la maximisation du périmètre si  $\mu = 0$  (pour lequel des ouverts d'aire fixe et qui s'aplatissent fournissent une suite maximisante).

### 1.1.5 Problèmes de Faber-Krahn inverses

Dans [39], motivé par la question d'adapter l'inégalité de Mahler ((1.4) pour  $d = 2$ ) en remplaçant la fonction aire par la première valeur propre du Laplacien-Dirichlet, les auteurs ont été amenés à considérer la question d'une inégalité de Faber-Krahn inverse, dans le même esprit que (1.8) : le cube est-il solution de

$$\max\{\tilde{\lambda}_1(\Omega), \Omega \text{ ouvert borné convexe et symétrique de } \mathbb{R}^d\},$$

où  $\tilde{\lambda}_1(\Omega) = \min_{T \in GL_d(\mathbb{R})} \left\{ \lambda_1(T(\Omega)) |T(\Omega)|^{\frac{2}{d}} \right\} ?$

De façon similaire, on peut s'intéresser à des problèmes du type :

$$\max\{\mu|\Omega| + \lambda_1(\Omega), \Omega \text{ ouvert convexe tel que } D_1 \subset \Omega \subset D_2\}, \quad (1.11)$$

où  $\mu \in \mathbb{R}_+$ , ou encore

$$\max\{\lambda_1(\Omega), \Omega \text{ ouvert convexe tel que } \Omega \subset D \text{ et } |\Omega| = m_0\}, \quad (1.12)$$

où  $0 < m_0 < |D|$ .

Notons que dans [39], il est montré que parmi les octagones ayant deux symétries orthogonales et pour lesquels  $(\pm 1, 0)$  et  $(0, \pm 1)$  sont des sommets, le carré maximise l'énergie de Faber-Krahn :

$$\max\{\lambda_1(\Omega)|\Omega|\}.$$

## 1.2 Saturation de la contrainte de convexité

### 1.2.1 Résultat principal

Notre premier résultat consiste à remarquer que pour tous les problèmes présentés au Paragraphe 1.1, les formes optimales saturent la contrainte de convexité au sens suivant (cet énoncé combine des résultats de [40, 118, 152]) :

7. On préfère ici ajouter des contraintes d'inclusion plutôt qu'une invariance par application linéaire comme (1.7), mais on pourrait également s'intéresser à calquer plus précisément (1.7) : ceci nécessite de ne considérer que des fonctionnelles invariantes par homothétie.

**Proposition 1.1** *Soit  $K^* \in \mathcal{K}_0^d$  un minimiseur pour (1.4), (1.5), (1.6), (1.9), (1.10), (1.11) ou (1.12)<sup>8</sup>. Si  $\partial K^*$  est de classe  $C^2$  sur  $\omega$  un ouvert relatif de  $\partial K^*$ <sup>9</sup>, alors la courbure de Gauss s'annule sur  $\omega$ .*

Autrement dit, la courbure de Gauss d'un minimiseur ne peut pas être strictement positive là où elle est définie au sens classique. Un phénomène similaire a été observé par H. Berestycki pour le problème de Newton (voir [35, Remark 3.4]).

Dans tous les cas considérés, l'idée repose sur le fait que la fonctionnelle à minimiser  $J$  n'est nulle part convexe ; comme plusieurs paramétrisations sont possibles, précisons cette notion en considérant que  $F$  est définie sur un espace fonctionnel  $X$ , comme dans (1.2). On dira que  $F$  n'est nulle part convexe sur  $Y \subset X$  si

$$\forall u \in Y, \exists v \in X, F''(u).(v, v) < 0. \quad (1.13)$$

Dans ce cas, un minimiseur de  $F$  sur  $Y$  devra saturer les contraintes, au sens où si  $u \in Y$  et s'il existe  $v \in X$  tel que  $u + tv \in Y$  pour tout  $|t|$  petit, alors  $u$  ne peut être un minimiseur de  $F$  sur  $Y$ , puisqu'il ne satisfait pas la condition d'optimalité d'ordre 2.

La Proposition 1.1 donne une information qualitative intéressante sur les minimiseurs, mais on peut naturellement se demander comment on peut l'améliorer, par exemple en se passant de l'hypothèse de régularité. Dans le cas du problème de Newton, le phénomène a été largement précisé dans [143], avec l'énoncé suivant :

**Théorème 1.1 (Lachand-Robert - Peletier)** *Soit  $D$  un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^2$ ,  $M > 0$ ,  $u_0$  solution du problème*

$$\min \left\{ \int_D f(\nabla u) dx, u : D \rightarrow [0, M] \text{ concave} \right\}$$

*où on suppose que  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  est de classe  $C^3$ , n'est nulle part convexe (en tout point  $p \in \mathbb{R}^d$ ,  $D^2 f(p)$  a une valeur propre strictement négative) ainsi que l'hypothèse technique ( $[D^2 f(p).(q, q) = 0 \text{ et } D^3 f(p).(q, q, q) = 0] \Rightarrow q = 0$ ). Alors  $u_0$  n'est strictement concave sur aucun ouvert de  $D$ .*

Autrement dit, le graphe de  $u_0$  contient un ensemble dense de segments. Ce résultat s'applique en particulier au problème de Newton pour lequel  $f(p) = \frac{1}{1+|p|^2}$ .

Dans le cas de la conjecture de Pólya-Szegő, N. Fusco et X. Zhong démontrent dans [106] une amélioration de la Proposition 1.1, en affaiblissant les hypothèses de régularité, dans la même direction que le Théorème 1.1, mais en se basant sur des propriétés très différentes de la fonctionnelle : en l'occurrence ils donnent des conditions suffisantes pour pouvoir écrire une condition d'optimalité d'ordre 1 qui amène à un phénomène de régularisation, afin de pouvoir appliquer la Proposition 1.1.

Pour le cas du problème de Mahler, la même propriété a été obtenue en affaiblissant légèrement l'hypothèse de régularité, voir [184]. Notons que c'est une version localisée du résultat de A. Stancu [195].

*Au Paragraphe 1.2.3 et dans le reste de ce chapitre, nous décrivons d'autres améliorations de la Proposition 1.1.*

## 1.2.2 À propos de la preuve de la Proposition 1.1

### Problème de Pólya-Szegő et isopérimétrie inverse [40, Partie 4]

L'idée consiste à écrire les dérivées secondes de forme (voir page 14 et le Paragraphe 4.1). Écrivons par exemple les dérivées secondes du périmètre et de la capacité (pour d'autres exemples, voir [121] ou [83]) : pour tout  $\varphi \in C^2(\partial K)$ ,

$$\ell_2^P(K)(\varphi, \varphi) = \int_{\partial K} |\nabla_\tau \varphi|^2 + [H_{\partial K}^2 - \|\mathbf{B}_{\partial K}\|^2] \varphi^2,$$

$$\ell_2^{\text{Cap}}(K)(\varphi, \varphi) = \int_{\partial K} [2[\varphi \partial_{\mathbf{n}} w] \mathcal{D}[\varphi \partial_{\mathbf{n}} w] - \partial_{\mathbf{n}} w (D^2 w \cdot [\mathbf{n}, \mathbf{n}]) \varphi^2]$$

8. Si le problème considéré est naturellement posé sur une classe d'ouverts, on considère  $K^* = \overline{\Omega^*}$  où  $\Omega^*$  est un ouvert minimiseur.

9. Dans les cas (1.9), (1.11) et (1.12) où il y a contrainte d'inclusion  $D_1 \subset \Omega \subset D_2$  ou  $\Omega \subset D$ , on suppose  $\omega \cap (\partial D_1 \cup \partial D_2) = \emptyset$  ou  $\omega \cap \partial D = \emptyset$



où  $\|\mathbf{B}_{\partial K}\|^2$  est la somme des carrés des courbures principales (qui sont les valeurs propres de  $\mathbf{B}_{\partial K}$ ),  $\nabla_\tau$  désigne le gradient tangentiel,  $w$  est le potentiel électrostatique de  $K$  (solution de (0.9)), et  $\mathcal{D}$  est l'opérateur de Dirichlet-à-Neumann sur  $\mathbb{R}^3 \setminus K$ , c'est-à-dire si  $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial K)$ , alors  $\mathcal{D}(f) = \partial_n z_f$  où  $z_f$  est l'unique solution faible de

$$\Delta z_f = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus K, \quad z_f = f \text{ sur } \partial K, \quad z_f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \overset{\circ}{K}),$$

où la fermeture est prise pour la norme  $w \mapsto \int_{\mathbb{R}^3 \setminus K} |\nabla w|^2$ .

Ces formules sont valables en supposant suffisamment de régularité de  $\partial K$ , disons  $C^2$ . Mais on n'a pas besoin d'une telle régularité globalement : on suppose donc que la déformation  $\varphi$  est supportée sur un ensemble  $\omega \subset \partial K$  où le bord est de classe  $C^2$ .

On observe alors que  $\ell_2^P(K)$  contient un terme coercif en la semi-norme  $H^1(\partial K)$  de  $\varphi$ ; sans s'intéresser au signe de  $\ell_2^{\text{Cap}}(K)$ , on peut simplement remarquer qu'il s'agit d'une forme quadratique continue pour la norme  $H^{\frac{1}{2}}(\partial K)$ .

Supposons donc que  $K^*$  est un ensemble minimal de  $J - P$  avec  $J = \frac{1}{\mu} \text{Cap}^2$  et  $\mu = \inf \left\{ \frac{\text{Cap}(K)^2}{P(K)} \right\} \in \mathbb{R}_+^*$ . Les conditions d'optimalité s'écrivent alors

$$\ell_1^{J-P}(K^*)(\varphi) = 0 \quad \text{et} \quad \ell_2^{J-P}(K^*)(\varphi, \varphi) \geq 0. \quad (1.14)$$

Ceci est valable pour tout  $\varphi$  tel que  $(Id + t\xi_\varphi)(K^*)$  est convexe pour tout  $t$  petit (en valeur absolue), où  $\xi_\varphi$  est une extension à  $\mathbb{R}^3$  de la déformation normale  $\varphi \mathbf{n}_{\partial K^*}$  définie sur  $\partial K^*$ . Dans le cas simple qui nous intéresse ici, à savoir en supposant par l'absurde que la courbure de Gauss est strictement positive sur  $\omega$ , toutes les fonctions  $\varphi$  supportées dans  $\omega$  sont admissibles. En combinant cette inégalité d'ordre 2 avec les calculs précédents, on en déduit :

$$\forall \varphi \in C_c^2(\omega), \quad |\varphi|_{H^1} \leq C \|\varphi\|_{H^{\frac{1}{2}}}$$

ce qui constitue une contradiction.

Des calculs similaires amènent au même résultat si  $\Omega^*$  est solution de (1.9) avec  $J = F(|\cdot|, E_f(\cdot), \lambda_1(\cdot))$  : en effet, on constate que  $\ell_2^{E_f}, \ell_2^{\lambda_1}$  sont des formes quadratiques continues pour la norme  $H^{\frac{1}{2}}(\partial \Omega^*)$ , et que  $\ell_2^{\text{Vol}}$  est une forme quadratique continue pour la norme  $L^2(\partial \Omega^*)$ . On a ainsi démontré la Proposition 1.1 dans les cas (1.6) et (1.9).

Le cas du problème (1.10) où on doit gérer la contrainte de volume se traite de la même manière : en effet (1.14) est remplacée par

$$\ell_2^{J-P-\mu \text{Vol}}(\Omega^*)(\varphi, \varphi) \geq 0, \quad \text{pour tout } \varphi \text{ tel que } \ell_1^{\text{Vol}}(\Omega^*)(\varphi) = \int_{\partial \Omega^*} \varphi = 0$$

où  $\mu$  est un multiplicateur de Lagrange, ce qui amène également à une contradiction.

### Problème de Mahler [118, Partie 3]

Ici on a préféré écrire la fonctionnelle avec la fonction support  $h = h_K$  : le problème de Mahler s'écrit dans cette paramétrisation :

$$\inf \left\{ J(h) := \frac{1}{d} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} h \det(h'' + hId) d\sigma \frac{1}{d} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} h^{-d} d\sigma, h : \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow ]0, \infty[ \text{ convexe, paire et } C^2 \right\}.$$

où  $h''$  est la matrice des dérivées secondes dans des coordonnées sphériques.

On suppose donc que  $\omega \subset \partial K$  est de classe  $C^2$  et de courbure de Gauss strictement positive sur  $\omega$  : alors classiquement  $U := \mathbf{n}_{\partial K}^{-1}(\omega)$  est un ouvert non vide de  $\mathbb{S}^{d-1}$ ,  $h_K$  est de classe  $C^2$  sur  $U$ , et  $\det(h_K'' + h_K Id) > 0$  sur  $U$ . En tirant ensuite parti des calculs de [72], nous montrons ([118, Proposition 2.3, Corollary 2.4]) que si  $h_0$  est tel que  $\det(h_0'' + h_0 Id) > 0$  sur  $U$ , alors  $J$  satisfait

$$\forall v \in C_c^\infty(V), \quad J''(h_0).(v, v) \leq -\alpha |v|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \beta \|v\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

où  $V \Subset U$  et  $\alpha = \alpha(h_0, V) > 0, \beta = \beta(h_0, V) \in \mathbb{R}$ . Le même raisonnement que ci-dessus montre alors qu'un tel  $K$  ne peut pas être un minimiseur car il ne peut pas satisfaire la condition d'optimalité d'ordre 2; la seule différence consiste à s'assurer qu'on peut construire des déformations qui préservent la symétrie, ce qui est facile. La preuve du cas non-symétrique n'apporte pas de difficulté, et donc on a montré la Proposition 1.1 dans les cas (1.4) et (1.5).

### Problème de Faber-Krahn inverse [152, Partie 5]

Jusqu'à présent nous n'avons pas eu besoin d'étudier le signe de la dérivée seconde pour un terme de type EDP, mais dans le cas du problème de Faber-Krahn inverse, on cherche à faire la même preuve que le problème isopérimétrique inverse, où  $\lambda_1$  prend le rôle du périmètre. On observe que

$$\ell_2^{\lambda_1}(K)(\varphi, \varphi) \geq \alpha |\varphi|_{H^{\frac{1}{2}}}^2 - \beta \|\varphi\|_{L^2}^2$$

où  $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$ , voir les détails dans [152, Partie 5]. On conclut comme précédemment, d'où une démonstration de la Proposition 1.1 dans les cas (1.11) et (1.12).  $\square$

### 1.2.3 Améliorations

On a pu constater dans les calculs précédents que les fonctionnelles étudiées satisfont une propriété du type (voir les notations de (1.13))

$$\forall u \in Y, \exists (\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}), \forall v \in X, F''(u).(v, v) \leq -\alpha |v|_{H^{s_1}}^2 + \beta \|v\|_{H^{s_2}}^2 \quad (1.15)$$

où  $0 \leq s_2 < s_1 \leq 1$ . Cette propriété est plus forte que (1.13), et nous l'appellerons *concavité locale* de  $F$  car elle implique  $F''(u).(v, v) < 0$  si  $v$  est à support petit : en effet

$$-\alpha |v|_{H^{s_1}}^2 + \beta \|v\|_{H^{s_2}}^2 \leq [\beta - \alpha \mu(\text{Supp}(v))] \|v\|_{H^{s_2}}^2$$

où  $\beta = \beta(u)$ , et

$$\mu(A) = \inf \left\{ \frac{|v|_{H^{s_1}}^2}{\|v\|_{H^{s_2}}^2}, v \in C_c^2(A) \setminus \{0\} \right\}$$

est une sorte de valeur propre (si  $s_1 = 1$  et  $s_2 = 0$  on retrouve la première valeur propre du Laplacien-Dirichlet sur  $A$ ). On observe que  $\mu(A)$  est grand si  $A$  est petit (inclus dans une boule de petit rayon), et donc on a bien  $F''(u).(v, v) < 0$  si  $\text{Supp}(v)$  est assez petit.

Notre objectif principal dans la suite de ce chapitre, consistera à améliorer la Proposition 1.1, tirant parti du fait que la fonctionnelle étudiée possède une propriété de concavité. On obtiendra 3 types de résultats :

- le cas de fonctionnelles possédant une concavité “globale”, autrement dit satisfaisant une inégalité du type Brunn-Minkowski pour une structure définie sur l'ensemble des convexes ; ces résultats sont issus de [40] et décrits au Paragraphe 1.3. On en déduit par exemple que les solutions d'un problème de Pólya-Szegö adapté à la  $p$ -capacité dans  $\mathbb{R}^2$  donne des solutions qui sont des triangles ou des segments.
- le cas de la dimension 2 : dans le cas planaire, on paramétrise les ensembles convexes par leurs fonctions jauge, et on montre d'une part que les minimiseurs d'une fonctionnelle localement concave sont des polygones, d'autre part on donne des exemples de telles fonctions (par rapport au Paragraphe 1.2, il faut montrer que (1.15) est valable sans hypothèse sur la régularité de  $u$ ). Ces résultats sont initiés dans [149] et développés dans [150] et [151], voir les Paragraphes 1.4 et 1.6. On les applique par exemple aux problèmes (1.4), (1.9) et (1.10).
- en dimension quelconque, on utilise à nouveau la paramétrisation par la fonction jauge, et on montre que les minimiseurs d'une fonction localement concave a un espace de déformations admissibles de dimension finie : ceci est une version nettement améliorée de la propriété de courbure de Gauss nulle, car elle se passe d'hypothèse de régularité, et permet de retrouver dans le cas planaire la propriété de polygone évoquée au point précédent ; ces résultats sont issus de [151]. Malheureusement, on verra que cette propriété n'implique pas que les domaines sont polyédraux, et la caractérisation géométrique de cette propriété n'est pas encore claire. On applique ces résultats aux problèmes (1.9) et (1.10).

Ces résultats permettent de traiter un vaste panel de problèmes, néanmoins à partir de la dimension 3, ils ne s'appliquent pas aux conjectures de Mahler ou de Pólya-Szegö. On expliquera les difficultés supplémentaires qu'amènent ces deux conjectures.

### 1.3 Cas de fonctionnelles globalement concaves

Dans ce paragraphe on décrit les résultats des parties 2 et 3 de [40]. L'idée est d'appliquer les inégalités de concavité issues de la géométrie convexe, aux problèmes d'optimisation. Une application des résultats de cette partie est par exemple que les solutions de

$$\min \{ \text{Cap}_p(K), K \in \mathcal{K}^2, P(K) = p_0 \}$$

où  $\text{Cap}_p(K)$  est la  $p$ -capacité<sup>10</sup> et  $p \in ]1, 2[$ , est nécessairement un triangle ou un segment. Néanmoins, on montre que ces approches ne fonctionnent que sous des hypothèses très fortes sur les fonctionnelles, ce qui motive les approches plus analytiques des paragraphes suivants, qui s'appliquent à une plus grande variété de fonctionnelles.

Il est naturel d'attendre que des propriétés de concavité d'une fonctionnelle géométrique, donnent des informations sur ses minimiseurs, en l'occurrence qu'ils soient extrémaux dans l'ensemble des formes admissibles. Bien sûr, les notions de concavité et d'extrémalité dépendent de la structure algébrique donnée à  $\mathcal{K}^d$ . Le choix de la structure est crucial, et on cherche une balance entre deux requêtes : que la fonctionnelle soit concave et que l'ensemble des domaines extrémaux soit le plus restreint possible.

La structure algébrique la plus connue est la somme de Minkowski ; une autre structure classique est la somme de Blaschke, dont on expliquera l'importance ci-dessous. Ces deux structures coïncident dans le cas planaire, mais sont très différentes en dimension  $d \geq 3$ . Rappelons-en les définitions :

- la somme de Minkowski s'écrit simplement  $K + L = \{k + l, k \in K, l \in L\}$  si  $(K, L) \in \mathcal{K}^d$ , et on peut aussi définir  $t.K = \{tk, k \in K\}$  si  $t \in \mathbb{R}_+$  et  $K \in \mathcal{K}^d$ . Si on note  $h_K$  la fonction support de  $K \in \mathcal{K}^d$ , alors il est intéressant de noter que  $K \mapsto h_K$  est (positivement) linéaire pour la somme de Minkowski. En particulier, l'application de largeur moyenne,

$$\mathcal{W}(K) := 2 \int_{\mathbb{S}^{d-1}} h_K \left( = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} [h_K(\nu) + h_K(-\nu)] \right)$$

est linéaire (et c'est la seule à coefficient multiplicatif près, parmi les fonctionnelles homogènes, invariantes par translation et rotation, et continue pour la topologie de Hausdorff).

- pour définir la somme de Blaschke, on doit introduire la “*surface area measure*” : à chaque convexe  $K \in \mathcal{K}_0^d$ , on associe

$$\mu_K : \omega \mapsto \mathcal{H}^{d-1}(\mathbf{n}_{\partial K}^{-1}(\omega))$$

( $\mathbf{n}_{\partial K} : \partial K \rightarrow \mathbb{S}^{d-1}$  est l'application normale extérieure unitaire, bien définie presque partout) qui est une mesure d'Alexandrov, c'est-à-dire une mesure positive sur la sphère, de barycentre nul, et non concentrée sur un équateur : on note  $\mathcal{M}_A(\mathbb{S}^{d-1})$  l'ensemble des mesures d'Alexandrov. Le Théorème d'Alexandrov-Minkowski affirme que l'application  $K \in \mathcal{K}_0^d \mapsto \mu_K \in \mathcal{M}_A(\mathbb{S}^{d-1})$  est surjective, et injective à translation de  $K$  près. Ainsi, on peut transporter la structure de  $\mathcal{M}_A(\mathbb{S}^{d-1})$  à  $\mathcal{K}_0^d$ , c'est-à-dire que  $K \dot{+} L$  est défini comme l'unique convexe tel que  $\mu_{K \dot{+} L} = \mu_K + \mu_L$ , et de même pour la multiplication par un scalaire strictement positif. Dans ce cas, c'est l'application périmètre qui est linéaire, puisque  $P(K) = \mu_K(\mathbb{S}^{d-1})$ .

Le choix de la bonne structure n'est pas toujours simple, mais il devient relativement naturel lorsqu'une des fonctionnelles intervenant dans le problème peut être linéaire pour une structure. Notamment on s'intéresse à des problèmes de la forme

$$\min \{ F(K), K \in \mathcal{K}^d, G(K) = g_0 \},$$

où  $F$  et  $G$  sont des fonctionnelles de forme homogènes (un tel problème est équivalent à la minimisation de  $\frac{F^\alpha}{G^\beta}$  où  $\alpha, \beta$  sont les degrés d'homogénéité de  $F$  et  $G$ ) : si  $G = \mathcal{W}$  on choisira la somme de Minkowski, et si  $G = P$ , la somme de Blaschke.

Dans la structure de Minkowski, l'inégalité de concavité la plus connue est bien sûr l'inégalité de Brunn-Minkowski pour le volume, qui est au centre de la géométrie convexe (voir par exemple l'article de *survey* [108]).

10. On définit la  $p$ -capacité de  $\mathbb{R}^d$  par

$$\text{Cap}_p(K) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla w|^p, w \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), w \geq 1 \text{ sur } K \right\}.$$

Des inégalités semblables ont été obtenues pour des énergies variationnelles elliptiques avec conditions de Dirichlet : une liste non-exhaustive contient  $\lambda_1$  ([28]), Cap ([24, 53]), la rigidité torsionnelle  $T$  ([25]), la  $p$ -capacité ([75]), la capacité logarithmique ([73]), la première valeur propre de l'opérateur de Monge-Ampère ([186]), la constante de Bernoulli ([16]).

Avec les remarques précédentes, nous démontrons le résultat suivant :

**Proposition 1.2** *Supposons que  $F : \mathcal{K}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  est homogène de degré  $\alpha \neq 0$ , continue pour la métrique de Hausdorff, invariante par translation et rotation, et satisfait une inégalité de Brunn-Minkowski stricte (le cas d'égalité correspond à des ensembles homothétiques). Alors si  $K^*$  est solution de*

$$\min \left\{ \frac{F^{1/\alpha}(K)}{\mathcal{W}(K)}, K \in \mathcal{K}^n \right\},$$

alors  $K^*$  est indécomposable, c'est-à-dire qu'il ne peut pas s'écrire comme la somme de deux convexes non homothétiques.

Ce résultat est très utile en dimension 2, car les seuls convexes indécomposables de  $\mathbb{R}^2$  sont les segments et les triangles. Comme on l'a remarqué précédemment, ceci s'applique par exemple à la fonctionnelle de  $p$ -capacité, ou également à la capacité logarithmique. Dans ce dernier cas, il est montré que la solution est un segment ([182, page 51]). A notre connaissance la question est ouverte pour la  $p$ -capacité.

Remarquons<sup>11</sup> qu'on peut également montrer que sous les mêmes hypothèses que dans la Proposition 1.2, si l'on se restreint aux convexes symétriques de  $\mathbb{R}^2$ , alors le minimum est un segment. En effet, du fait de l'inégalité de Brunn-Minkowski, on peut montrer que parmi les zonotopes (somme finie de segments) la fonction  $J$  est minimale en un segment. Ainsi par continuité, le résultat est valable parmi les zonoïdes (limites au sens de Hausdorff de zonotopes), et ce en toute dimension. Or en dimension 2, les zonoïdes sont exactement les ensembles convexes symétriques. Cette remarque s'applique comme précédemment à la  $p$ -capacité dans  $\mathbb{R}^2$ .

En dimension  $d \geq 3$ , l'indécomposabilité est malheureusement un résultat bien plus faible qu'en dimension 2, puisque les indécomposables forment un  $G_\delta$ -dense dans  $\mathcal{K}^d$  si  $d \geq 3$  (voir [190]). Néanmoins, on peut en déduire une information géométrique dans l'esprit du Théorème 1.1 et du résultat de N. Fusco et X. Zhong [106] : en effet un résultat de Sallee [187] affirme que si  $\partial K$  contient un voisinage  $\omega$  qui ne contient pas de segment et qui est  $\varepsilon$ -régulier au sens que  $\forall x \in \omega, \exists y \in \mathbb{R}^d, x \in (y + \varepsilon B^d) \subset K$ , alors  $K$  n'est pas indécomposable.

Au contraire, pour la structure de Blaschke, un théorème dû à Bronshtein caractérise les simplexes (enveloppe convexe de  $d + 1$  points de  $\mathbb{R}^d$ ) comme les uniques ensembles indécomposables, et ce en toute dimension. Ainsi nous démontrons :

**Proposition 1.3** *Supposons que  $F : \mathcal{K}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  est homogène de degré  $\alpha \neq 0$ , continue pour la distance de Hausdorff, invariante par translation et rotation, et satisfait une inégalité de Kneser-Süss, c'est-à-dire*

$$F^{(n-1)/\alpha}(K \dot{+} L) \geq F^{(n-1)/\alpha}(K) + F^{(n-1)/\alpha}(L) \quad \forall K, L \in \mathcal{K}_0^n. \quad (1.16)$$

Si  $K^*$  est solution de

$$\min \left\{ J(K) := \frac{F^{(d-1)/\alpha}(K)}{P(K)}, K \in \mathcal{K}_0^n \right\},$$

alors  $K^*$  est soit un simplexe de  $\mathbb{R}^d$ , soit un élément de  $\mathcal{K}^d \setminus \mathcal{K}_0^d$ .

Du fait de ce résultat, il paraît intéressant de voir quelles fonctionnelles sont "Blaschke-concaves" (i.e. satisfont (1.16)). La seule inégalité pour cette structure qui nous est connue est l'inégalité de Kneser-Süss, qui affirme que le volume satisfait (1.16). Nous démontrons en fait que les autres fonctionnelles classiques (Cap et  $\lambda_1$ ) ne satisfont pas une inégalité de Kneser-Süss : pour la preuve dans le cas  $F = \text{Cap}$ , nous étudions le problème de maximisation de  $J$ , qui devrait être résolu par une boule si on avait (1.16) (pour cela on utilise [113] qui donne un équivalent du Théorème d'Hadwiger pour la structure de Blaschke, à savoir que pour tout corps convexe, il existe une suite de moyenne de rotations de  $K$  qui converge vers  $B^d$ ), or ce n'est pas le cas d'après [80]. Par une preuve similaire, nous montrons également que  $\lambda_2$ , seconde valeur propre du laplacien-dirichlet, ne satisfait par l'inégalité de Brunn-Minkowski (ce qui répond à une question ouverte de [71]).

11. Merci à Ilaria Fragalà qui m'a communiqué cette idée

Nous démontrons néanmoins dans [40] qu'il est possible de construire de nouvelles structures sur  $\mathcal{K}_0^d$ , qui fournissent une propriété de concavité pour les fonctionnelles précédentes. On remarque en effet que la raison cruciale qui fait que l'inégalité de Kneser-Süss est valable pour le volume, est que sa variation première (pour une perturbation de type Minkowski) est liée à la structure de Blaschke, par la formule

$$\frac{d}{dt}|K + tL|_{t=0^+} = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} h_K d\mu_K.$$

Afin de travailler avec d'autres fonctionnelles que le volume, on s'intéresse donc à leurs variations premières. On obtient ainsi des structures et des équivalents de l'inégalité de Kneser-Süss dans ces nouvelles structures. Une telle construction est possible si on a un équivalent du Théorème d'Alexandrov-Minkowski : c'est le cas pour de nombreux exemples importants, comme la capacité, la rigidité torsionnelle, et  $\lambda_1$ , voir [126, 125, 74]. On montre l'équivalent du Théorème de Bronshtein pour ces structures, à savoir que les simplexes sont les seuls ensembles indécomposables, ce qui donne de l'information pour les problèmes d'optimisation, mais avec des contraintes qui ne sont plus très naturelles. En particulier la fonction périmètre semble difficile à analyser dans ces nouvelles structures.

## 1.4 Dimension 2 : Solutions polygonales

On s'intéresse ici au cas où  $d = 2$ , et on étudie des problèmes d'optimisation de forme qui attestent d'une certaine "concavité locale" de la forme (1.15). Comme on l'a vu précédemment, si le problème a une concavité globale de type inégalité de Brunn-Minkowski, alors la solution est triangulaire (voir aussi [119]). Dans le cas d'une concavité locale, on aimerait améliorer la Proposition 1.1 et montrer que les solutions sont polygonales.

Avec la paramétrisation des convexes planaires par leurs fonctions jaugees (qu'on peut voir comme des fonctions définies sur  $\mathbb{S}^1$ , ou de façon équivalente sur  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ , soit comme des fonctions réelles  $2\pi$ -périodiques), le problème se réécrit en un problème de calcul de variation de la façon suivante :

$$\min \{j(u) := J(\Omega_u), \quad u \in W^{1,\infty}(\mathbb{T}), \quad u'' + u \geq 0, \quad u \in \mathcal{S}\},$$

où  $\Omega_u = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}, r < \frac{1}{u(\theta)}\}$ ,  $\mathcal{S}$  prend en compte les contraintes (autres que la contrainte de convexité). Ici,  $u'' + u$  est à comprendre au sens des distributions, et est une mesure positive, qui représente "presque" la courbure de  $\partial\Omega_u$  : en effet on a

$$H_{\partial\Omega_u} = \frac{u'' + u}{\left(1 + \left(\frac{u'}{u}\right)^2\right)^{3/2}}.$$

Le résultat principal que nous obtenons dans [150] est :

**Théorème 1.2** *Soit  $u_0 > 0$  solution de*

$$\min \{j(u), \quad u \in W^{1,\infty}(\mathbb{T}), \quad u'' + u \geq 0, \quad a \leq u_0 \leq b\}. \quad (1.17)$$

où  $0 \leq a < b \leq \infty$ ,  $j : W^{1,\infty}(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $C^2$  autour de  $u_0$ , et telle que :

$$\exists s \in [0, 1], \exists (\alpha, \beta) \in [0, \infty)^2, \text{ tel que } \forall v \in W^{1,\infty}(\mathbb{T}), \quad j''(u_0)(v, v) \leq -\alpha \|v\|_{H^1(\mathbb{T})}^2 + \beta \|v\|_{H^s(\mathbb{T})}^2. \quad (1.18)$$

Si  $I$  est une composante connexe de  $\mathbb{T}_{in} = \{\theta \in \mathbb{T} / a < u_0(\theta) < b\}$ , alors

$$u_0'' + u_0 \text{ est une somme finie de masses de Dirac dans } I.$$

Avant de décrire la preuve de ce résultat, faisons quelques remarques et présentons quelques applications : géométriquement, la contrainte  $a \leq u_0 \leq b$  correspond à l'inclusion de  $\partial\Omega_u$  dans la couronne délimitée par les cercles de rayons  $1/a$  et  $1/b$ , et la conclusion du résultat signifie alors que  $\Omega_{u_0}$  est un polygone à l'intérieur de cette couronne. Notons que la preuve peut en fait donner une estimation du nombre de masses de Dirac en fonction de  $\alpha, \beta$ , et qu'il est simple de généraliser la contrainte  $a \leq u \leq b$  à des fonctions  $a$  et  $b$  qui dépendent de  $\theta$ , afin de représenter une contrainte d'inclusion dans un domaine plus général qu'une couronne.

Dans [149], nous avons étudié le cas  $j(u) = \int_{\mathbb{T}} G(\theta, u, u')$ , où  $G$  est de classe  $C^2$  et strictement concave en la 3ème variable. Dans ce cas la fonctionnelle  $j$  satisfait l'hypothèse (1.18), nous avons donc obtenu une généralisation de [149] à des fonctionnelles ayant une dépendance abstraite en  $u$ . Un exemple d'application suggéré dans [149] est le cas où

$$J(\Omega) = \mu|\Omega| - P(\Omega), \quad (1.19)$$

avec  $\mu \in [0, +\infty]$ ,  $a < b$ . Si  $\mu = 0$ , la solution est clairement le disque de rayon  $1/a$  et si  $\mu = +\infty$ , la solution est le disque de rayon  $1/b$ . On vérifie facilement que cette fonctionnelle satisfait les hypothèses du théorème, avec les formules

$$p(u) := P(\Omega_u) = \int_{\mathbb{T}} \frac{\sqrt{u^2 + u'^2}}{u^2} d\theta, \quad m(u) = |\Omega_u| = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{u^2} d\theta,$$

et donc toute solution a une "frontière libre" polygonale. Cet exemple est approfondi dans [15]; en particulier il est démontré que la solution est soit égale à l'un des disques  $B(0, 1/a)$ ,  $B(0, 1/b)$ , soit un polygone "complet" (le contact avec le bord de l'anneau constitue un nombre fini de point).

Enfin, remarquons que le cas d'un problème similaire à (1.17) avec une contrainte d'aire  $m(u) = m_0$  peut également être obtenu avec des adaptations mineures (décrites dans le schéma de preuve ci-dessous) : ainsi si  $u_0$  est solution de

$$\min \{j(u), \quad u \in W^{1,\infty}(\mathbb{T}), \quad u'' + u \geq 0, \quad m(u) = m_0\}. \quad (1.20)$$

où  $j$  satisfait les hypothèses du Théorème 1.2, alors  $u_0'' + u_0$  est une somme finie de masse de Dirac. Nous appliquerons cette version du Théorème aux problèmes du type (1.10).

**Applications du Théorème 1.2 :** Nous pouvons désormais aborder des problèmes plus généraux que (1.19), de la forme (1.9), (1.10). En combinant avec le Paragraphe 1.6, on déduit en effet du Théorème 1.2 (et de la version avec contrainte décrite ci-dessus) :

**Proposition 1.4** *Soit  $\Omega^*$  solution optimale de (1.9) (respectivement (1.10)) avec  $F$  de classe  $C^2$  et  $f \in H^2(\mathbb{R}^2)$ . Alors la frontière libre  $\partial\Omega^* \setminus (\partial D_1 \cup \partial D_2)$  (respectivement  $\partial\Omega^*$ ) est polygonale.*

Nous pourrions également ajouter une dépendance de  $F$  en des énergies qui sont définies par une fonction d'état satisfaisant une EDP sur le domaine extérieur  $\Omega^c$  (comme une fonction de type capacité). On expliquera que ce cas est bien plus délicat car  $\Omega^c$  possède beaucoup moins de régularité que  $\Omega$ , mais que la stratégie s'applique quand même, dans le cas bi-dimensionnel qui nous intéresse ici.

Avec des modifications mineures, nous pouvons également appliquer la stratégie du Théorème 1.2 au problème de Mahler, et en précisant les calculs on peut montrer le résultat suivant, qui donne une nouvelle preuve du résultat de Mahler dans le cas symétrique, avec le cas d'égalité (voir [118, Section 3] pour plus de détails sur la preuve).

**Proposition 1.5** *Dans  $\mathbb{R}^2$ , tout minimiseur local de (1.4) est un parallélogramme.*

**À propos de la preuve du Théorème 1.2 :** Comme en début de Paragraphe 1.2.3, remarquons qu'avec une inégalité de type Poincaré qui prend en compte la taille du support, à savoir

$$\|v\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq C\varepsilon^{1-s} |v|_{H^1(\mathbb{T})},$$

où  $C = C(s)$  et  $v : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  est à support de taille  $\varepsilon$  dans  $\mathbb{T}$  (voir la preuve dans [150, Lemma 4]), nous avons que (1.18) implique que pour tout  $v$  à support assez petit,  $j''(u_0).(v, v) < 0$ . La difficulté consiste ensuite à construire une déformation  $v$  qui soit admissible et à support petit, sous la seule hypothèse que le support de la mesure  $u_0'' + u_0$  est infini. Pour cela, on utilise une construction de T. Lachand-Robert et M. Peletier dans [144], que l'on formule à travers le lemme suivant, et qui peut être vu comme une version localisée de la classification des convexes indécomposables de  $\mathbb{R}^2$  évoqués au Paragraphe 1.3 :

**Lemme 1.1 (Lachand-Robert - Peletier [144]; Lamboley-Novruzi [149])** *Si  $\text{Supp}(u_0'' + u_0)$  contient au moins 3 points dans  $]0, \varepsilon[$  alors il existe  $v \in H_0^1(0, \varepsilon)$  et  $t_0 > 0$  tel que pour tout  $t$  tel que  $|t| < t_0$ ,  $u_0 + tv$  satisfait*

$$(u_0 + tv)'' + (u_0 + tv) \geq 0.$$

En conclusion, si  $\text{Supp}(u_0'' + u_0)$  contient un point d'accumulation dans  $\mathbb{T}_{in}$ , alors au voisinage de ce point d'accumulation on peut appliquer le lemme et construire une déformation  $v$  admissible et à petit support. Pour cette déformation on a  $j''(u_0).(v, v) < 0$ , ce qui contredit la condition d'optimalité d'ordre 2 et conclut la preuve.

Pour le cas avec contrainte de volume, c'est-à-dire l'étude des solutions de (1.20), il suffit de travailler avec la condition d'optimalité d'ordre 2 sur le Lagrangien  $j - \mu m$  qui satisfait également (1.18), et de construire une déformation qui soit telle que  $m'(u_0).v = 0$ ; pour cela, il suffit d'adapter le Lemme 1.1 et de montrer que si  $\text{Supp}(u_0'' + u_0)$  contient 4 points dans  $]0, \varepsilon[$ , on pourra ajouter cette contrainte (linéaire) sur la déformation  $v$  construite.  $\square$

Concluons ce paragraphe par une remarque sur les différentes possibilités de paramétrer  $\mathcal{K}^2$  : on a utilisé ici la paramétrisation par la fonction jauge, mais on aurait pu les paramétrer par la fonction support  $h$ . A nouveau la convexité se traduit par  $h'' + h \geq 0$ , et si  $h'' + h$  est une somme de masses de Dirac, alors le convexe représenté est un polygône. Pour des fonctionnelles de type géométrique, cette approche est efficace également, et certains calculs sont parfois plus commodes dans cette paramétrisation. On pourra consulter par exemple [119] qui traite le cas d'une concavité globale pour des fonctionnelles quadratique en  $(h, h')$ , et retrouve le fait (qu'on aurait pu obtenir avec l'approche du Paragraphe 1.3) que les solutions sont des triangles (possiblement dégénérés) et qui repose sur une version non-locale ( $\varepsilon = 2\pi$ ) du Lemme 1.1. Nous avons également préféré cette paramétrisation dans la démonstration de la Proposition 1.5. Néanmoins, il semble difficile d'étudier les dérivées des énergies de type Dirichlet dans cette paramétrisation, car une perturbation en  $h$  ne se lie pas facilement à une dérivation de forme, si on n'a pas d'hypothèse de stricte convexité du domaine.

## 1.5 Dimension supérieure

Dans ce Paragraphe, on montre une généralisation à la dimension supérieure du Théorème 1.2. On peut toujours utiliser la paramétrisation par fonction jauge : si  $d \geq 2$ , et  $u : \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow ]0, \infty[$  est donné, on peut considérer

$$\Omega_u := \left\{ (r, \theta) \in [0, \infty) \times \mathbb{S}^{d-1}, \quad r < \frac{1}{u(\theta)} \right\}.$$

qui est convexe si et seulement si l'extension 1-homogène de  $u$  (donnée par  $u(x) = |x|u(x/|x|)$ ) est convexe sur  $\mathbb{R}^d$  (on dira alors que  $u : \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe). De cette manière on décrit tout ouvert convexe borné contenant l'origine. Quand on parle de régularité d'une fonction  $u$  définie sur  $\mathbb{S}^{d-1}$ , on réfère à la régularité sur  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  de son extension 1-homogène, et il est alors classique que cette régularité est équivalente à la régularité de  $\Omega_u$ .

Avec cette paramétrisation, en notant  $j(u) = J(\Omega_u)$ , le problème

$$\min \{ J(\Omega), \Omega \text{ convexe}, \Omega \in \mathcal{A} \},$$

est équivalent à

$$\min \{ j(u), u : \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow ]0, \infty[ \text{ convexe}, u \in \mathcal{S} \}, \quad (1.21)$$

où  $\mathcal{S} \subset W^{1,\infty}(\mathbb{S}^{d-1})$  est défini comme  $\mathcal{S} = \{ u \in W^{1,\infty}(\mathbb{S}^{d-1}), \Omega_u \in \mathcal{A} \}$  et  $\mathcal{A}$  est une classe d'ouverts bornés contenant l'origine.

Alors dans le même esprit que le Théorème 1.2, on montre (on note  $|v|_{H^1(\mathbb{S}^{d-1})}^2 = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |\nabla_\tau v|^2 d\theta$ ,  $\nabla_\tau =$  gradient tangentiel sur  $\mathbb{S}^{d-1}$ ) :

**Théorème 1.3** *Soit  $u_0 > 0$  solution de (1.21), où  $\mathcal{S}$  est un sous-ensemble convexe de  $W^{1,\infty}(\mathbb{S}^{d-1})$ . Supposons  $j : W^{1,\infty}(\mathbb{S}^{d-1}) \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  et qu'il existe  $s \in [0, 1)$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $v \in W^{1,\infty}(\mathbb{S}^{d-1})$ ,*

$$j''(u_0)(v, v) \leq -\alpha |v|_{H^1(\mathbb{S}^{d-1})}^2 + \beta \|v\|_{H^s(\mathbb{S}^{d-1})}^2.$$

Alors l'ensemble

$$T_{u_0} = \{ v \in W^{1,\infty}(\mathbb{S}^{d-1}) / \exists \varepsilon > 0, \forall |t| < \varepsilon, u_0 + tv \in \mathcal{S} \text{ et est convexe} \}, \quad (1.23)$$

est un espace vectoriel de dimension finie.

Dans le cas planaire, il est facile de voir que la dimension de  $T_{u_0}$  est liée au nombre de masses de Dirac de  $u_0'' + u_0$ , et donc on retrouve le résultat précédent généralise le Théorème 1.2 (et même en donne une légère amélioration, car il n'excluait pas la possibilité d'une infinité de masse de Dirac dans le cas où  $\{a < u_0 < b\}$  avait une infinité de composantes connexes); néanmoins, nous ne pouvons d'une part pas déduire de notre approche une estimation de la dimension, et d'autre part on ne peut pas conclure que  $\Omega_u$  est un polyèdre. L'étude de différents exemples semblent en effet indiquer qu'une caractérisation des ensembles satisfaisant (1.23) est délicate.

**À propos de la preuve du Théorème 1.3 :** On fait une preuve très différente de celle du Théorème 1.2, qui nous évite de construire explicitement une déformation : on constate que sur l'ensemble  $T_{u_0}$  (qui est facilement un espace vectoriel), la condition d'optimalité d'ordre 2 donne une inégalité de Poincaré inverse. Ceci implique que la boule unité de  $T_{u_0}$  est compacte, et donc l'espace doit être de dimension finie.  $\square$

En corollaire, on obtient l'énoncé suivant, qui généralise la Proposition 1.4 :

**Proposition 1.6** *Soit  $\Omega^*$  un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^d$ , solution du problème d'optimisation :*

$$\min \left\{ J(\Omega) = F(E_f(\Omega), |\Omega|) - P(\Omega), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^d \text{ ouvert convexe et tel que } D_1 \subset \Omega \subset D_2 \right\},$$

où  $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est régulière,  $D_1 \subset D_2$  sont des ouverts convexes, et  $f \in H^2(\mathbb{R}^d)$ .

Alors en notant  $u_0$  la fonction jauge de  $\Omega^*$ , l'espace  $T_{u_0}$  défini en (1.23) a une dimension finie.

Cet énoncé est aussi une amélioration de la Proposition 1.1, car si  $\omega$  est un ouvert relatif de  $\partial\Omega^* \setminus (\partial D_1 \cup D_2)$  où  $\partial\Omega^*$  est de classe  $C^2$  et de courbure de Gauss strictement positive, alors  $C_c^2(\omega) \subset T_{u_0}$ .

On pourrait remplacer l'énergie de Dirichlet par les énergies considérées au Paragraphe 1.6 à condition qu'elles soient définies sur un domaine intérieur. Très certainement on peut également ajouter une dépendance de  $F$  en  $\lambda_1$  comme dans la Proposition 1.4. Par contre, on n'est pas en mesure si  $d > 2$  d'ajouter une dépendance en une énergie provenant d'une EDPs posée sur l'extérieur du domaine considéré. En effet, pour un ensemble seulement Lipschitz  $\Omega$  en dimension  $d \geq 3$ , nos estimations n'impliquent pas qu'il existe  $s < 1$  tel que  $|E_f''(\Omega)(\xi, \xi)| \leq \|\xi\|_{H^s(\partial\Omega)}^2$  comme c'était le cas en dimension 2. En conséquence, nous ne sommes pas en mesure d'obtenir un résultat de ce type pour la conjecture de Pólya-Szegö.

## 1.6 Estimation des dérivées secondes

Afin d'appliquer les Théorèmes 1.2 ou 1.3, on doit donc estimer la forme quadratique  $j''(u)$  où  $j(u) = J(\Omega_u)$ . Dans le cas où la fonctionnelle  $J$  s'écrit  $R(\Omega) - P(\Omega)$ , on peut espérer récupérer de la concavité avec le terme en périmètre. En effet, si on note  $p(u)$  le périmètre de  $\Omega_u$ , alors on montre facilement l'estimation suivante : il existe  $\beta$  et  $\alpha > 0$  (qui dépendent de  $u$ ) tels que,

$$\forall v \in W^{1,\infty}(\mathbb{S}^{d-1}), \quad p''(u)(v, v) \geq \alpha \|v\|_{H^1(\mathbb{S}^{d-1})}^2 - \beta \|v\|_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})}^2. \quad (1.24)$$

Ainsi la fonction  $-p(u)$  est localement concave, et il suffit donc de voir que le terme résiduel  $R$  ne perturbe pas cette propriété. Pour cela on cherche à montrer que  $r''(u)$  (où  $r(u) = R(\Omega_u)$ ) est une forme quadratique continue pour une norme strictement plus faible que la norme  $H^1$ , par exemple une norme  $H^s$  pour  $s < 1$ . Considérons par exemple un terme de type volume (comme dans (1.19)) : sa dérivée seconde est absorbée puisqu'elle est une forme quadratique continue en la norme  $L^2$ . Avec l'exemple de la capacité, on avait observé que dans le cas régulier on attend une continuité de type  $H^{1/2}$ . Dans ce paragraphe, on montre que ceci est le cas pour des fonctionnelles d'énergie de type Dirichlet, et ce sans hypothèse sur la régularité du domaine, si ce n'est sa convexité bien sûr. Attention, le cas de la capacité est différent, car étant une EDP sur un domaine extérieur, ce dernier n'est plus convexe. On reviendra sur ce cas au Paragraphe 1.6.2. On présente deux approches, issues de [150] et [151]; la première est finalement moins puissante que la seconde, mais on maintient la présentation chronologique, ce qui permet de gérer les difficultés séparément.



### 1.6.1 Approche 2-dimensionnelle, domaines convexes

On travaille ici avec des convexes de  $\mathbb{R}^2$ . Remarquons que la dérivation en  $u$  se lie facilement à la dérivation au sens des formes : étant donné  $(u, v) \in W^{1,\infty}(\mathbb{T})^2$  où  $u$  est la fonction jauge de  $\Omega$  et  $v$  est une direction de dérivation, on introduit le champ de vecteurs  $\xi \in C^2((-t_0, t_0), W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2))$  défini par :

$$\xi(t) : \theta \mapsto \left( \frac{1}{(u+tv)(\theta)} - \frac{1}{u(\theta)} \right) e^{i\theta} \eta(r, \theta) \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (\text{en coordonnées polaires}),$$

où  $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ ,  $0 \leq \eta \leq 1$ ,  $\eta = 1$  (resp.  $\eta = 0$ ) sur un voisinage de  $\partial\Omega$  (resp. de l'origine). Alors  $(I + \xi(t))(\Omega_u) = \Omega_{u+tv}$ ,  $j(u+tv) = J(\Omega_{u+tv}) = \mathcal{J}_\Omega(\xi(t))$  et

$$\forall v \in W^{1,\infty}(\mathbb{T}) : \quad \xi'(0)(v) = -\frac{v}{u^2} e^{i\theta}, \quad \xi''(0)(v, v) = 2\frac{v^2}{u^3} e^{i\theta} \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (1.25)$$

En différentiant  $t \mapsto \varphi(t) := J(\Omega_{u+tv}) = \mathcal{J}_\Omega(\xi(t))$  on obtient alors :

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= j'(u)(v) = J'(\Omega)(\xi'(0)), \\ \varphi''(0) &= j''(u)(v, v) = J''(\Omega)(\xi'(0), \xi'(0)) + J'(\Omega)(\xi''(0)). \end{aligned}$$

Prenons l'exemple où  $J = E_f$  est l'énergie de Dirichlet, et notons  $e_f(u) = E_f(\Omega_u)$ . Dans le cas régulier,  $E_f''(\Omega)$  s'écrit habituellement avec des intégrales de bord, qui font intervenir en particulier la trace au bord de  $D^2 w_\Omega$  et de  $\nabla w'_\Omega$  où  $w_\Omega$  est la fonction d'état de l'EDP qui définit  $E_f$  et  $w'_\Omega$  sa dérivée de forme. Ces termes sont mal définis dans le cas où on sait seulement que  $\Omega$  est convexe. Pour contourner cette difficulté, on mène dans [150] les calculs avec des intégrales "intérieures" sur  $\Omega$ , et on montre l'estimation suivante :

**Proposition 1.7** *Soit  $\Omega_u$  convexe,  $f \in H_{loc}^2(\mathbb{R}^2)$ . Alors  $e_f$  est de classe  $C^2$  sur un voisinage de  $u$  (dans  $W^{1,\infty}(\mathbb{T})$ ), et il existe  $\beta_1, \beta_2$  positifs tels que, pour tout  $v \in W^{1,\infty}(\mathbb{T})$ ,*

$$\begin{aligned} |e'_f(u)v| &\leq \beta_1 \|v\|_{L^2(\mathbb{T})}, \\ |e''_f(u)(v, v)| &\leq \beta_2 (\|v\|_{H^{1/2}(\mathbb{T})}^2 + \|v\|_{L^\infty(\mathbb{T})}^2). \end{aligned}$$

Comme on le verra par la suite, la seconde estimation n'est pas optimale, on peut faire disparaître le terme en norme  $L^\infty$ , mais cela requiert une approche très différente. Néanmoins, pour notre propos, l'estimation suffit car elle implique la continuité de  $e''_f(u)$  en norme  $H^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$  pour tout  $\varepsilon > 0$ , et donc en combinant avec (1.24), on en déduit que toute fonction de la forme  $j(u) = F(|\Omega_u|, E_f(\Omega_u)) - P(\Omega_u)$  satisfait l'hypothèse du Théorème 1.2 (si  $F$  est assez régulière). La même approche s'applique à la fonctionnelle de forme  $\lambda_1$ . Ainsi, on a montré la Proposition 1.4, conséquence des estimations de cette partie et du Théorème 1.2.

**À propos de la preuve de la Proposition 1.7 :** La régularité de  $e_f$  est un fait classique. Pour les estimations, nous aurons besoin du résultat suivant de régularité de la fonction d'état (voir [130], [114]) :

**Lemme 1.2** *Soit  $\Omega$  ouvert borné convexe de  $\mathbb{R}^2$ ,  $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^2)$  avec  $p > 2$ , et  $w_\Omega$  la solution de (0.10). Alors  $w_\Omega \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ .*

Ainsi la première estimation est facile à obtenir, car l'expression classique de la dérivée première de forme est autorisée par la régularité de  $w_\Omega$  donnée par ce lemme : en effet, avec (1.25) on a (avec  $\Omega = \Omega_u$ ) :

$$e'_f(u).v = -\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla w_\Omega|^2 \xi'(0) \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega} dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} |\nabla w_\Omega(x_\theta)|^2 \frac{v}{u^3} d\theta, \quad \text{où } x_\theta = \frac{e^{i\theta}}{u(\theta)} \in \partial\Omega,$$

et  $\nabla w_\Omega$  a bien une trace bornée sur  $\partial\Omega$  (on obtient même une estimation avec  $\|v\|_{L^1(\mathbb{T})}$ ).

Comme on l'a remarqué précédemment, c'est la dérivée seconde qui est beaucoup plus difficile à estimer, car les expressions habituelles font intervenir des termes qui n'ont pas de sens, même avec la régularité  $H^2(\Omega)$  énoncée ci-dessus. On montre dans [150, Lemme 5] que l'estimation de  $e''_f$  se ramène à l'étude du terme

$$\int_{\Omega} w''_\Omega f = - \int_{\Omega} w''_\Omega \Delta w_\Omega \quad (1.28)$$

où  $w''_{\Omega}$  est la dérivée seconde de forme de  $w_{\Omega}$ , et où on a pris soin d'écrire ces intégrales sur  $\Omega$  et de ne pas intégrer par partie. Remarquons qu'on a seulement la régularité  $w''_{\Omega} \in L^2(\Omega)$ , avec  $\Delta w''_{\Omega} = 0$  sur  $\Omega$  (et de même pour  $w'_{\Omega}$ ). Ensuite, afin d'approcher  $\Omega$  par des ensembles réguliers, on introduit les ensembles de niveaux  $\Omega_{\varepsilon} = \{w_{\Omega} > \varepsilon\}$  (pour simplifier on suppose ici  $w_{\Omega} > 0$ , ce qui est le cas si  $f > 0$ , mais on peut se passer de cette hypothèse, voir les détails dans [150]) qui sont réguliers pour presque tout  $\varepsilon > 0$ , et on effectue des intégrations par partie sur ces ouverts, qui montrent que l'estimation du terme (1.28) se ramène à l'estimation de

$$\int_{\partial\Omega_{\varepsilon}} \partial_{\mathbf{n}} w_{\Omega} \nabla w'_{\Omega} \cdot \xi'(0), \quad (1.29)$$

les autres termes étant contrôlés ou nuls à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . On tire désormais parti du caractère bi-dimensionnel de notre cadre de travail, et dans le [150, Lemme 6] on obtient une estimation de ce terme faisant intervenir  $\|w_{\Omega}\|_{H^2(\Omega)}$ ,  $\|w_{\Omega}\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$ ,  $\|\xi'(0)\|_{L^{\infty}(\Omega)}$  et  $\|\nabla \xi'(0)\|_{L^2(\Omega)}$ . On conclut en utilisant que le terme  $e''_f(u)$  ne dépend pas de l'extension utilisée pour  $\xi$ , et donc si on remplace  $\xi$  par l'extension harmonique de  $v$ , alors  $\|\nabla \xi'(0)\|_{L^2(\Omega)}$  est comparable à la norme  $H^{1/2}(\mathbb{T})$  de  $v$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

### 1.6.2 Approche en toute dimension, cas des domaines Lipschitz

Dans [151], on a amélioré les résultats du paragraphe précédent, dans différentes directions que nous décrivons ici :

- La plus importante généralisation concerne la dimension des ensembles considérés. Dans [150], les résultats et la stratégie de calcul (notamment l'estimation de (1.29)) étaient restreints aux formes planaires. Nous proposons une nouvelle stratégie d'estimation des dérivées de forme, qui donne des estimations des dérivées premières et secondes en toute dimension, et qui sont optimales dans de nombreux cas.
- On généralise la classe d'énergies EDP considérées : l'opérateur qui régit la fonction d'état peut être un opérateur linéaire elliptique général, et l'énergie peut être une intégrale quadratique de la fonction d'état et son gradient (mais les calculs peuvent s'adapter à d'autres cas), et en particulier il n'est pas nécessaire que ce soit l'énergie associée à l'EDP considérée. On considère également des EDP de la forme (0.10) mais sur des domaines extérieurs, ce qui motive le point suivant.
- On généralise les classes de domaines considérées. En effet, on ne regarde plus seulement les ouverts convexes, mais deux classes plus générales, à savoir les ouverts Lipschitz d'une part, et les ouverts semi-convexes d'autres part (c'est-à-dire satisfaisant une condition de boule extérieure uniforme). Même si notre motivation reste l'application aux problèmes d'optimisation dans la classe des ouverts convexes, comme évoqué au point précédent, nous nous intéressons à des EDPs dans des domaines qui sont l'extérieur d'un convexe (c'est le cas dans la conjecture de Pólya-Szegő). Ce type de domaine a seulement la régularité d'un ensemble Lipschitz, ce qui explique notre intérêt pour cette classe. D'autres part, les estimations pour les ouverts semi-convexes sont les mêmes que pour les ouverts convexes, et certainement ces estimations ont un intérêt au delà des applications que nous considérons ici. Pour les ouverts Lipschitz, on obtient des estimations plus faibles, mais qui sont dans certaines situations optimales.
- Enfin, même dans le cas très particulier de l'énergie de Dirichlet  $E_f$  et avec  $\Omega$  un convexe de  $\mathbb{R}^2$ , nous améliorons la Proposition 1.7, puisqu'on montre que  $E''_f(\Omega)$  est continue en norme  $H^{1/2}(\partial\Omega)$ , au lieu de  $H^{1/2}(\partial\Omega) \cap L^{\infty}(\partial\Omega)$ . Ce résultat est optimal. On montre plus généralement que l'estimation  $H^{\frac{1}{2}}$  est valable dès que l'énergie considérée est associée à l'EDP qui définit la fonction d'état, et que ce résultat est valable en toute dimension et pour tout ouvert semi-convexe.

**Nouvelle stratégie :** Une difficulté rencontrée au Paragraphe 1.6.1 était l'utilisation de  $w'_{\Omega}, w''_{\Omega}$  qui ne sont a priori que dans  $L^2(\Omega)$ . On a réussi à aboutir car ce sont également des fonctions harmoniques sur  $\Omega$ , et on a utilisé le caractère bi-dimensionnel. L'idée qu'on suit ici est de ne jamais utiliser ces fonctions, mais de toujours travailler avec  $\widehat{w}_{\Omega}(\theta) = w_{\Omega} \circ (Id + \theta)$  qui est définie sur un domaine fixe. Il est en effet classique que  $\theta \mapsto \widehat{w}_{\Omega}(\theta) \in H^1_0(\Omega)$

est régulière, indépendamment de la régularité de  $\Omega$ . Dans le cas où  $J = E_f$ , on a

$$\mathcal{J}_\Omega(\theta) = \int_\Omega \left[ \frac{1}{2} \nabla \widehat{w}_\Omega(\theta) \cdot \widehat{M}(\theta) \cdot \nabla \widehat{w}_\Omega(\theta) - \widehat{f}(\theta) \widehat{w}_\Omega(\theta) \right],$$

$$\text{où } \widehat{M}(\theta) = (Id + D\theta)^{-1} (Id + D\theta)^{-T} \det(Id + D\theta), \quad \widehat{f}(\theta) = f \circ (Id + \theta)$$

et le calcul des dérivées premières et secondes (en zéro dans la direction  $\xi$ ) se ramènent à l'estimation des 3 termes suivants :

$$\|\nabla \widehat{w}'_\Omega(0)\|_{H^1(\Omega)}, \quad \int_\Omega \nabla w_\Omega \cdot \widehat{w}'_\Omega, \quad \int_\Omega \nabla w_\Omega \cdot \widehat{w}''_\Omega,$$

où  $\widehat{w}'_\Omega = \widehat{w}'_\Omega(0) \cdot \xi$ ,  $\widehat{w}''_\Omega = \widehat{w}''_\Omega(0) \cdot (\xi, \xi)$ . Avec des inégalités de Hölder généralisées, on obtient des estimations faisant intervenir la norme  $W^{1,p}(\Omega)$  de  $w_\Omega$  et la norme  $\|\xi\|_{W^{1,r}(\Omega)}$  où  $r$  est lié à  $p$  par  $r = p/(p-2)$  si on regarde la dérivée première, et  $r = 2p/(p-2)$  si on regarde la dérivée seconde. On est donc naturellement amené à choisir  $p$  le plus grand possible pour lequel il y a une théorie de régularité  $W^{1,p}$  sur  $\Omega$ , c'est-à-dire tel qu'on ait l'inégalité :

$$\|w_\Omega\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C(\Omega) \|f\|_{W^{-1,p}(\Omega)}. \quad (1.30)$$

Cette estimation est valable pour tout  $p \in ]1, \infty[$  si  $\Omega$  est semi-convexe, et elle est valable pour  $p \in (p'_1, p_1)$  si  $\Omega$  est Lipschitz, où  $p_1 = p_1(\Omega)$  satisfait  $[p_1 > 4 \text{ si } d = 2 \text{ et } p_1 > 3 \text{ si } d \geq 3]$ . Dans le cas du Laplacien, ces résultats sont respectivement dûs à Fromm [101] et Jerison-Kenig [127], et pour des opérateurs généraux, on utilise [129, 192]. On conclut ensuite avec un lemme de trace qui permet de passer d'une norme de  $\xi$  à l'intérieur de  $\Omega$  à une norme sur  $\partial\Omega$ , toujours en tirant parti du fait que le résultat ne dépend que de  $\xi_{\partial\Omega}$  :

$$\inf \left\{ \|\hat{\xi}\|_{W^{s,q}(\Omega)}, \quad \hat{\xi} \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^N), \quad \hat{\xi} = \xi \text{ on } \partial\Omega \right\} \leq C \|\xi\|_{W^{s-\frac{1}{q},q}(\partial\Omega)},$$

pour tout  $q \in [1, \infty]$  et  $s \in ]1/q, 1 + 1/q[$ , ou si  $q = s = 1$ .

Précisément, nous prouvons que si  $J$  est une fonctionnelle de forme telle que décrite ci-dessus (voir [151, Section 2.1] pour plus de détails) :

- Si  $\Omega$  est Lipschitz alors il existe  $\bar{r}_1 = \bar{r}_1(\Omega)$  tel que  $\bar{r}_1 \in (1, 2)$  si  $d = 2$  et  $\bar{r}_1 \in (1, 3)$  si  $d \geq 3$  et tel que pour tout  $r > \bar{r}_1$ , il existe  $C$  tel que

$$|J'(\Omega)(\xi)| \leq C \|\xi\|_{W^{1-1/r,r}(\partial\Omega)}, \quad |J''(\Omega)(\xi, \xi)| \leq C \|\xi\|_{W^{1-1/(2r),2r}(\partial\Omega)}^2, \quad (1.31)$$

pour tout  $\xi \in W^{1,\infty}$ . Remarquons que si  $r = \infty$ , alors on retrouve une estimation qui provient directement de la propriété de différentiabilité de  $J$  sur  $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ . La limitation inférieure sur  $r$  est liée à celle sur  $p$  telle que (1.30) soit valide. Si  $d = 2$ , on peut choisir au moins une valeur de  $r$  strictement inférieure à 2, ce qui par injection de Sobolev, donne une norme  $H^s$  pour un certain  $s < 1$ . Ainsi, dans la Proposition 1.4, on peut inclure des énergies qui dépendent d'une EDP sur un domaine extérieur. En dimension 3, on n'obtient plus un tel résultat.

- Si  $\Omega$  est semi-convexe alors (1.31) est valable pour tout  $r \in (1, \infty)$ , et par inclusion de Sobolev, on obtient une estimation en norme  $H^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$  pour tout  $\varepsilon > 0$ , et ce en toute dimension.
- Si enfin  $\Omega$  est semi-convexe, et l'opérateur considéré  $L$  (définissant la fonction d'état) satisfait  $L^* = L$  et que  $J$  en est l'énergie associée (c'est par exemple le cas si  $J = E_f$ ), alors (1.31) est valable pour tout  $r \in [1, \infty)$ , ce qui donne l'estimation en norme  $H^{\frac{1}{2}}$ , dont on a déjà vu qu'elle était optimale, même si  $\Omega$  est très régulier.

## 1.7 Problèmes ouverts, perspectives

On propose deux ensembles de questions ouvertes :

- Comme on l'a vu, on a identifié dans le cas planaire des hypothèses générales afin de déterminer si des formes optimales seront polygonales, et on a appliqué cette approche à une vaste classe de problèmes de type isopérimétrique inverse. Il reste à déterminer si un phénomène similaire s'applique pour des problèmes de la forme

$$\max \{E_f(\Omega), \Omega \subset D, \Omega \text{ convexe}, |\Omega| = m\}, \quad \max \{\lambda_1(\Omega), \Omega \subset D, \Omega \text{ convexe}, |\Omega| = m\},$$

c'est-à-dire des problèmes de Saint-Venant et de Faber-Krahn inverses, et cela reposerait sur une estimation de la forme

$$j''(u).(v, v) \geq \alpha |v|_{H^{\frac{1}{2}}}^2 - \beta \|v\|_{H^s}^2,$$

où  $\alpha > 0$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $s \in [0, \frac{1}{2}[$ , et  $j(u) = E_f(\Omega_u)$  ou  $j(u) = \lambda_1(\Omega_u)$ , dans le cas où  $\Omega_u \in \mathcal{K}_0^2$ . Nous savons que les formes optimales  $\Omega^*$  ne sont nulle part  $C^2$  et strictement convexe (Proposition 1.1), il reste à déterminer si  $\partial\Omega^*$  possède des coins ou non, une infinité ou un nombre fini de segments dans son bord.

- Il faudrait améliorer la description des formes optimales dans le cas de la dimension  $d \geq 3$ . Peut-on identifier une classe intéressante de problèmes qui amènent à des solutions polyédrales? Ici la présence d'une contrainte d'inclusion dans une boîte change la donne de façon plus importante que dans le cas planaire, car si la zone de contact avec la boîte (elle-même strictement convexe) est non réduite à un point, alors la forme optimale ne peut pas être polyédrale. Afin de déterminer plus précisément les comportements qu'on peut espérer attendre, il serait intéressant d'étudier l'exemple suivant, éventuellement numériquement :

$$\min \{ \mu |\Omega| - P(\Omega), \Omega \subset D, \Omega \text{ convexe} \}, \quad \mu \in \mathbb{R}_+,$$

et d'identifier un problème similaire (par exemple avec des fonctionnelles du type  $\int_{\Omega} f, \int_{\partial\Omega} g$ ) qui assure existence sans aucune contrainte, afin de simplifier l'analyse et éviter les phénomènes de bord.

# Chapitre 2

## Régularité sous contrainte de convexité ([A1] et [A10, Section 3])

Dans ce chapitre, on présente les résultats de [150, Section 3] et [147] qui s'intéressent à la théorie de la régularité pour des problèmes d'optimisation de forme sous contrainte de convexité, soit de la forme (0.4). On a vu au Chapitre 1 qu'il peut y avoir des formes optimales irrégulières : on fera donc des hypothèses de convexité sur la fonctionnelle  $J$ . Un exemple fondamental consistera à minimiser des fonctionnelles de la forme  $P + R$  où  $P$  est le périmètre, et  $R$  est un terme résiduel. Un peu dans l'esprit de la théorie des quasi-minimiseurs du périmètre, on s'attend à ce que les propriétés de régularité soient contrôlées par le terme de périmètre.

En général dans l'étude de la question de la régularité en optimisation de forme (voir le chapitre 3), la difficulté principale consiste à montrer que l'ensemble optimal est au moins un peu régulier, par exemple est localement le graphe d'une fonction Lipschitz. À partir de là, l'écriture des conditions d'optimalité permet souvent d'améliorer le degré de régularité. Ici, du fait qu'on a affaire à des domaines convexes, on a gratuitement une régularité Lipschitz a priori. Néanmoins, il peut être difficile d'écrire ou d'utiliser la condition d'optimalité.

Nous présentons deux approches très différentes. La première se base exclusivement sur la condition d'optimalité d'ordre 1, et est restreinte à la dimension 2. La seconde, inspirée des résultats de régularité de Caffarelli-Carlier-Lions dans [51], consiste à construire des compétiteurs convexes, et est valable en toute dimension. Les deux méthodes s'appliqueront à peu près aux mêmes fonctionnelles.

### 2.1 Cas 2-dimensionnel

Dans ce paragraphe, on décrit les résultats de [150, Section 3], qui établissent un résultat de régularité pour les solutions de (0.4) dans le cas  $d = 2$ . On a déjà vu au Paragraphe 1.4 que via la fonction jauge, on peut transformer (0.4) en un problème de calcul de variations.

#### 2.1.1 Théorème Principal

**Théorème 2.1** *Soit  $u_0 > 0$  solution de*

$$\min \left\{ j(u) := \int_{\mathbb{T}} G(\theta, u(\theta), u'(\theta)) d\theta + r(u), \quad u \in W^{1,\infty}(\mathbb{T}), \quad u'' + u \geq 0, \quad a \leq u_0 \leq b \right\}. \quad (2.1)$$

où  $r$  et  $G$  satisfont :

- $r : W^{1,\infty}(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{R}$  est  $C^1$  au voisinage de  $u_0$  et  $r'(u_0) \in L^p(\mathbb{T})$  pour un certain  $p \in [1, \infty]$ .
- $G : (\theta, u, q) \in \mathbb{T} \times ]0, \infty[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est  $C^2$  et  $G_{qq} > 0$ .

Alors

$$u_0 \in W^{2,p}(\mathbb{T}_{in}), \quad \text{où } \mathbb{T}_{in} = \{a < u_0 < b\}.$$

Dans [58], un résultat de régularité  $C^1$  a été obtenu pour un problème similaire à (2.1) dans le cas où  $r = 0$  et avec différentes conditions au bord. Ici nous avons des conditions périodiques (mais ce n'est pas un point essentiel),

et donc on améliore le résultat jusqu'à la régularité  $C^{1,1}$  (car si  $r = 0$  on peut choisir  $p = \infty$ ), et on le généralise au cas de fonctions  $r$  non triviales, ce qui sera intéressant pour les applications.

Comme pour le Théorème 1.2, on peut généraliser à des situations où  $a, b$  sont des fonctions, et on peut également obtenir un résultat similaire lorsqu'on ajoute une contrainte d'égalité, soit un problème de la forme

$$\min \{ j(u), \quad u \in W^{1,\infty}(\mathbb{T}), \quad u'' + u \geq 0, \quad a \leq u \leq b, \quad m(u) = m_0 \},$$

où  $m : W^{1,\infty}(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $C^1$  au voisinage de  $u_0$  avec  $m'(u_0) \in L^p(\mathbb{T})$  non nulle.

**À propos de la preuve du Théorème 2.1 :** on commence par écrire la condition d'optimalité pour (2.1) qui affirme l'existence de  $\zeta_0 \in W^{1,\infty}(\mathbb{T})$ , tel que

$$\begin{cases} \zeta_0 \geq 0 \text{ sur } \mathbb{T}, \quad \zeta_0 = 0 \text{ sur } \text{Supp}(u_0'' + u_0), \quad \text{et} \\ \forall v \in W^{1,\infty}(\mathbb{T}_{in}), \quad j'(u_0)v = \langle \zeta_0 + \zeta_0'', v \rangle_{(W^{1,\infty})' \times W^{1,\infty}} := \int_{\mathbb{T}} \zeta_0 v - \zeta_0' v', \end{cases}$$

Ce résultat est une application d'un théorème de type KKT<sup>1</sup> en dimension infinie, et la difficulté réside essentiellement en la vérification des hypothèses d'un tel résultat abstrait : la fonction  $\zeta_0$  est un multiplicateur de Lagrange pour la contrainte de convexité, voir [150, Proposition 1] pour plus de détails<sup>2</sup>.

Ensuite, on intègre par partie le terme  $\int_{\mathbb{T}} \partial_q G(\theta, u_0, u_0') v'$ , ce qui est non trivial car  $u_0'$  est seulement de régularité  $BV(\mathbb{T})$ ; mais en regardant par exemple [6], on obtient

$$\left[ r'(u_0) + \partial_u G(\theta, u_0, u_0') - \partial_q G(\theta, u_0, u_0') - \partial_{uq} G(\theta, u_0, u_0') u_0' \right] - u_0'' \widetilde{G_{qq}}(\theta, u_0, u_0') = \zeta_0 + \zeta_0'' \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{T}_{in}).$$

où  $\widetilde{G_{qq}}(\theta, u_0, u_0') = \int_0^1 G_{qq}(\theta, u_0(\theta), (1-t)u_0'(\theta^+) + tu_0'(\theta^-)) dt$ . Pour simplifier, on n'écrira plus  $(\theta, u_0, u_0')$ ; comme la fonction entre crochet est dans  $L^p(\mathbb{T})$ , on peut réécrire cette équation comme

$$f - \mu_0 \widetilde{G_{qq}} = \zeta_0 + \zeta_0'' \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{T}_{in}). \quad (2.2)$$

où  $f \in L^p(\mathbb{T})$  et  $\mu_0 = u_0'' + u_0 \geq 0$ . On montre ensuite que comme  $\zeta_0 \geq 0$ , on a  $\zeta_0'' \geq 0$  sur  $\{\zeta_0 = 0\}$  et donc sur  $\text{Supp}(\mu_0)$ . En identifiant les parties singulières dans (2.2), comme elles ont des signes opposés sur  $\text{Supp}(\mu_0)$ , elles sont nulles. En particulier  $u_0 \in W^{1,1}(\mathbb{T}_{in})$  et  $\widetilde{G_{qq}} = G_{qq}$  sur  $\mathbb{T}_{in}$ . Pour avoir la régularité  $W^{2,p}$ , on constate que  $-u_0'' G_{qq} \leq u_0 G_{qq}$  et donc sur  $\text{Supp}(\mu_0) \cap \mathbb{T}_{in}$ , on a

$$0 \leq \zeta_0'' \leq f + u_0 G_{qq}$$

et donc  $\zeta_0'' \in L^p(\mathbb{T}_{in} \cap \text{Supp}(\mu_0))$ , ce qui donne finalement en revenant à (2.2) que  $\mu_0 \in L^p(\mathbb{T}_{in} \cap \text{Supp}(\mu_0))$ , puisque  $G_{qq}$  sera minoré par une constante positive sur un compact comprenant les valeurs prises par  $(\theta, u_0(\theta), u_0'(\theta))$ ,  $\theta \in \mathbb{T}$ . Bien sûr, comme  $u_0'' + u_0 = 0$  sur  $\mathbb{T}_{in} \setminus \text{Supp}(\mu_0)$ , on peut conclure  $u_0 \in W^{2,p}(\mathbb{T}_{in})$ .  $\square$

## 2.1.2 Applications

On peut appliquer le Théorème 2.1 (et sa version contrainte) pour des problèmes de type isopérimétrique :

**Proposition 2.1** *Soit  $\Omega^*$  une solution de*

$$\min \{ J(\Omega) := P(\Omega) + F(|\Omega|, E_f(\Omega), \lambda_1(\Omega)) \mid \Omega \text{ ouvert convexe}, D_1 \subset \Omega \subset D_2 \},$$

(où  $D_1 \subset D_2$  sont des convexes de  $\mathbb{R}^2$ ), ou

$$\min \{ J(\Omega) := P(\Omega) + G(E_f(\Omega), \lambda_1(\Omega)) \mid \Omega \text{ ouvert convexe}, \text{ et } |\Omega| = m_0 \},$$

où  $m_0 \in ]0, +\infty[$ . Alors la frontière libre  $\partial\Omega^* \cap (D_2 \setminus \overline{D_1})$  (resp.  $\partial\Omega^*$ ) est  $C^{1,1}$ , c'est-à-dire a une courbure bornée.

1. Karush-Kuhn-Tucker

2. Remarquons que dans le cadre du calcul de variation sous contrainte de convexité, des résultats similaires ont été obtenus dans [160, 58] : les auteurs obtiennent même une condition d'optimalité en dimension supérieure, qui fait apparaître  $n^2$  multiplicateurs de Lagrange où  $n$  est la dimension de la variable  $\theta$  considérée, ce qui rend son utilisation nettement plus délicate.

En effet, par les estimations de dérivées premières rappelées dans le Paragraphe 1.6, on voit facilement que  $r(u) = F(|\Omega_u|, E_f(\Omega_u), \lambda_1(\Omega_u))$  et  $u \mapsto P(\Omega_u)$  satisfont les hypothèses du Théorème 2.1 avec  $p = \infty$ .

Remarquons que l'on pourrait appliquer le Théorème 2.1 en ajoutant une dépendance de  $F, G$  en toute fonctionnelle de forme dont la dérivée de forme peut être représentée par une fonction  $L^p(\partial\Omega)$  lorsque  $\Omega$  est un ouvert convexe. Le cas d'énergie dépendant d'une EDP sur un domaine extérieur (comme évoqué au Paragraphe 1.6.2) est plus délicat, car si on considère un exemple simple comme l'énergie de Dirichlet, la dérivée première de forme sera de la forme  $(\partial_n w_\Omega)^2$  sur  $\partial\Omega$ , dont la régularité est délicate à étudier dans le cas où  $\partial\Omega$  est seulement Lipschitz. En général on sait que  $\partial_n w_\Omega \in L^2(\partial\Omega)$  (du fait que  $w_\Omega \in H^{3/2}(\Omega)$ ), et on obtient alors une régularité  $W^{2,1}$  de  $\Omega$  avec le Théorème 2.1. Si par contre on a  $\partial_n w_\Omega \in L^p(\partial\Omega)$  pour un certain  $p > 2$ , alors on obtient une régularité  $W^{2, \frac{p}{2}}$ , ce qui fournit une meilleure régularité pour  $\partial_n w_\Omega$  sur  $\partial\Omega$ , et on peut débiter une récurrence qui amène alors à une régularité  $W^{2,\infty}$  soit  $C^{1,1}$  pour  $\Omega$ .

Indiquons que dans l'article récent [111], le problème suivant est étudié :

$$\min\{P(\Omega) + Q^2 I_\alpha(\Omega) / \Omega \text{ convexe de } \mathbb{R}^d, \text{ et } |\Omega| = m_0\}, \tag{2.3}$$

où

$$I_\alpha(\Omega) = \begin{cases} \inf_{\mu \in \mathcal{M}_P(\overline{\Omega})} \int_{\Omega \times \Omega} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x-y|^\alpha}, & \text{si } \alpha \in ]0, d[, \\ \inf_{\mu \in \mathcal{M}_P(\overline{\Omega})} \int_{\Omega \times \Omega} \log\left(\frac{1}{|x-y|}\right) d\mu(x)d\mu(y), & \text{si } \alpha = 0. \end{cases}$$

Dans le cas  $d = 2$  et  $\alpha = 0$ , un résultat de régularité  $C^{1,1}$  a été obtenu dans [111], avec une démonstration indépendante de celle de la Proposition 2.1, et qui est plus dans l'esprit du Paragraphe 2.2, même si un point central consiste à montrer que la mesure harmonique de  $\Omega^c$  (qui dans le cas régulier n'est autre que  $\partial_n w_\Omega$ ) est dans  $L^p(\partial\Omega)$  pour un certain  $p > 2$ .

## 2.2 Perspectives : Cas multi-dimensionnel

Dans ce paragraphe, on évoque le projet [147] qui n'est pas encore finalisé, mais est déjà bien avancé. Avant de s'intéresser au cadre de l'optimisation de forme, faisons plusieurs remarques sur des questions similaires dans le cadre du calcul de variations.

### 2.2.1 Remarques sur le cadre du Calcul de variations

Dans le cadre du calcul de variations, on est amené à étudier la régularité de solutions de problèmes de la forme

$$\min \left\{ \int_D L(x, u(x), \nabla u(x)), \quad u \in X \right\} \tag{2.4}$$

où  $D$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ ,  $L : (x, u, q) \in D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  est appelé Lagrangien, et  $X$  est un espace fonctionnel bien choisi. Souvent, l'espace  $X$  est de la forme  $W_0^{1,p}(D) + \phi$  où  $\phi : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$  est la condition de bord de Dirichlet et  $p \in [1, \infty)$ . Par exemple en supposant la convexité en la 3ème variable de  $L$ , et des propriétés de coercivité, on peut montrer l'existence d'une solution optimale  $u \in X$  et étudier sa régularité.

Une première façon d'attaquer la question de la régularité des solutions de (2.4) est d'étudier la régularité issue de l'équation d'Euler-Lagrange liée au problème, en l'occurrence  $u$  est une solution faible de l'équation quasi-linéaire sous forme divergentielle suivante :

$$\partial_u L(x, u(x), \nabla u(x)) - \operatorname{div}_x(\nabla_q L(x, u(x), \nabla u(x))) = 0 \text{ sur } D. \tag{2.5}$$

Pour des exemples simples de  $L$  tels que  $L(x, u, q) = |q|^2/2$ , cela suffit à obtenir une forte régularité sur  $u$ , mais dans des cas plus généraux, cela peut ne pas suffire. Si néanmoins on suppose de la régularité a priori sur  $u$ , des arguments de récurrence s'appliquent : par exemple, la théorie classique de Schauder pour la régularité des EDPs elliptiques linéaires montre que si  $u$  est localement  $C^{1,\alpha}$ , alors  $u$  est aussi régulière que les données le permettent (par exemple  $u$  est  $C^\infty$  dans  $D$  si  $L$  et  $\phi$  le sont). Par la théorie classique de De Giorgi-Nash-Moser sur les EDP elliptique à coefficients bornés, on peut montrer qu'un résultat similaire est valide si on sait seulement que  $u$  est localement Lipschitz. Ainsi la plus grosse difficulté consiste dans le cas général à montrer cette régularité Lipschitz

des minimiseurs, voir par exemple [27] où  $L(x, u, q) = F(q) + G(x, u)$  avec  $D$  convexe,  $F$  uniformément convexe et  $G$  Lipschitz en  $u$  uniformément en  $x$ . Ceci ne repose plus seulement sur la condition d'optimalité, mais sur une utilisation de l'optimalité, par la construction de compétiteurs adaptés.

Si on s'intéresse à la situation, largement différente, des problèmes de la forme :

$$\min \left\{ \int_D L(x, u(x), \nabla u(x)), \quad u \in X \cap \mathcal{C} \right\}, \quad \text{où } \mathcal{C} = \{u : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}, \quad u \text{ convexe} \}.$$

alors comme on l'a déjà remarqué, la question de l'existence est bien plus simple que pour (2.4), et on sait déjà qu'un minimiseur est localement Lipschitz, comme toute fonction convexe. Néanmoins, on ne peut plus écrire (2.5), puisqu'il n'est pas toujours vrai que  $u + t\varphi$  est un compétiteur admissible, même si  $\varphi \in C_c^\infty(D)$  et  $|t|$  est petit.

On a vu au Paragraphe 2.1 qu'il est possible d'écrire une équation d'Euler-Lagrange prenant en compte la contrainte de convexité, mais cela ne semble pas possible d'en déduire de la régularité, sauf dans le cas particulier de domaines plans (auquel cas  $N = 1$ ).

Dans le cas multi-dimensionnel, un résultat de régularité  $C^1$  sous l'hypothèse  $L$  localement uniformément convexe en  $q$  est obtenu dans [59]. Ce résultat a été récemment amélioré par Caffarelli, Carlier et Lions dans [51] pour le cas modèle<sup>3</sup> :

$$\min \left\{ J(u) := \frac{1}{2} \int_D |\nabla u|^2 + \int_D f u, \quad u \in H^1(D), \quad u \text{ convexe} \right\}.$$

Ils montrent qu'un minimiseur  $u_0$  est localement  $C^{1,1-d/p}$  sur  $D$  si  $f_+ \in L^p(D)$  pour  $p > d$ . La preuve de ce résultat consiste à utiliser un compétiteur, qui sera de la forme  $v := \sup\{u_0, \sigma\}$  où  $\sigma$  est une fonction affine bien choisie, et à étudier finement la comparaison d'énergie entre  $u_0$  et  $v$ .

Dans le but de s'intéresser à des problèmes d'optimisation de forme, nous avons obtenu la généralisation suivante (on écrit une version simplifiée, restreinte au cas  $p = \infty$ ) du résultat de Caffarelli-Carlier-Lions :

**Théorème 2.2** *Soit  $D$  un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^N$ , et  $u_0$  une solution du problème d'optimisation :*

$$\min \left\{ \int_D L(\nabla u(x)) dx + R(u), \quad u \in H^1(D) \text{ convexe} \right\},$$

où

- $L : q \in \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  est  $C^2$  et strictement convexe en  $q$ ,
- $\forall v \in H^1(D) \cap \mathcal{C}, \quad v \geq u^* \Rightarrow \left[ R(v) - R(u^*) \leq C \int_D (v - u^*) \right]$ .

Alors  $u^*$  est localement  $C^{1,1}$  sur  $D$ .

Il est certainement possible de généraliser ce résultat à des Lagrangien  $L(x, u, q)$ . La preuve suit la même démonstration que dans [51], la construction du compétiteur est similaire et il s'agit simplement de vérifier que les estimations s'appliquent à ce cas plus général. En particulier il est intéressant de noter que l'hypothèse faite sur  $R$  ne concerne qu'une estimation lorsque  $v \geq u^*$ , puisque le compétiteur choisi satisfait cette condition, donc on n'utilise que la "sur-optimalité", voir aussi le Chapitre 3 sur ces considérations dans un cadre différent. On retrouve ici le fait que dans le cas de [51] où  $R(u) = \int_D f u$ , l'hypothèse ne concerne que  $f_+$ .

## 2.2.2 Cas de l'optimisation de forme, quasi-minimiseurs du périmètre

Dans ce paragraphe, nous ne donnons pas d'énoncé précis, car il s'agit de perspectives avancées mais non finalisées. Néanmoins, nous pensons que l'on peut convaincre le lecteur des idées et des résultats attendus à partir du Théorème 2.2.

Pour en venir au cadre de l'optimisation de forme, on sait que la question de la régularité des formes optimales apporte des difficultés supplémentaires par rapport au calcul de variations classique, puisqu'il n'est pas toujours

3. Je remercie G. Carlier et ses coauteurs pour m'avoir permis de consulter une version de cet article avant sa publication



facile de paramétrer les ensembles par des espaces fonctionnels, et on renvoie au Chapitre 3 pour une réflexion plus aboutie sur la question. Si néanmoins on étudie un problème de la forme

$$\min \{ J(K), K \in \mathcal{A} \cap \mathcal{K}_0^d \}, \quad (2.6)$$

alors l'idée d'utiliser une stratégie similaire au calcul de variations est plus robuste, puisque tout ensemble convexe est localement le graphe d'une fonction convexe, ou encore, peut être paramétré par sa fonction jauge qui est une fonction convexe sur la sphère. On peut donc naturellement attendre un résultat de régularité  $C^{1,1}$  pour des formes optimales de (2.6) lorsque la fonction  $J$  a un terme dominant qui peut s'écrire localement comme un Lagrangien convexe  $L(\nabla f_K(x))$ , où  $K$  est localement le graphe de la fonction  $f_K : D \subset \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$  dans un système de coordonnées approprié. Ceci est le cas de la fonction périmètre. Ainsi, en reprenant la preuve du Théorème 2.2, on s'attend à pouvoir montrer que si  $K \in \mathcal{K}_0^d$  satisfait

$$\forall K \in \mathcal{K}_0^d \text{ tel que } K \subset K^* \text{ et } |K^* \setminus K| < \varepsilon, P(K^*) \leq P(K) + C|K^* \setminus K|, \quad (2.7)$$

alors  $\partial K^*$  est  $C^{1,1}$ .

On peut considérer cet énoncé comme la régularité des quasi-minimiseurs du périmètre sous contrainte de convexité. Un tel résultat s'applique à la minimisation de  $P + R$  où  $R$  satisfera une estimation de la forme

$$\forall K \subset K^* \text{ tel que } |K^* \setminus K| < \varepsilon, R(K) - R(K^*) \leq C|K^* \setminus K|. \quad (2.8)$$

Or d'après [43, Corollary 5.16] et [42], les fonctions  $E_f$ ,  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , et même  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (valeur propres du Laplacien avec conditions de Neumann) satisfont une telle propriété, car les convexes considérés sont uniformément Lipschitz, et leurs fonctions propres sont dans  $W^{1,\infty}$ . Ainsi le résultat précédent devrait pouvoir s'appliquer aux solutions de

$$\min \{ P(K) + R(K), K \in \mathcal{K}_0^d \},$$

où  $R : K \mapsto F(|K|, E_f(K), \lambda_1(K) \dots \lambda_p(K), \mu_1(K), \dots \mu_q(K))$  et  $F$  est une application Lipschitz.

Ceci généraliserait la Proposition 2.1, puisque l'énoncé est valable en toute dimension et fait intervenir des fonctionnelles plus élaborées, en particulier non nécessairement différentiables.

Afin de traiter des problèmes similaires avec une contrainte de volume, on ne peut plus avoir recours, comme au Paragraphe 2.1, à une approche par multiplicateur de Lagrange, mais on peut procéder à une pénalisation exacte (comme au Paragraphe 3.1), autrement dit, on peut montrer qu'une solution de

$$\min \{ P(K) + R(K), K \in \mathcal{K}_0^d, |K| = m_0 \},$$

sera solution de

$$\min \{ P(K) + R(K) + \Lambda ||K| - m_0|, K \in \mathcal{K}_0^d \},$$

pour  $\Lambda$  assez grand. Remarquons d'ailleurs que ceci est l'une des étapes dans le papier [111] pour l'étude de Problème (2.3). En dimension  $d \geq 3$ , ce cas peut se révéler plus élaboré car il faut étudier l'estimation (2.8) pour une fonction de type capacité, pour laquelle on a affaire à une EDP sur un domaine extérieur, qui jouit de moins de régularité qu'un ensemble convexe. Cette question reste à approfondir.

## 2.3 Problèmes ouverts

Nous avons clarifié la question de la régularité pour des problèmes d'optimisation de forme sous contrainte de convexité, en présence d'un terme de type périmètre, ou qui atteste d'une convexité similaire. Mais pour des problèmes du type

$$\min \{ \lambda_n(\Omega), \Omega \text{ convexe}, |\Omega| = m_0 \}$$

où  $n \geq 2$  (si  $n = 1$  la solution est une boule), la situation est plus délicate; il a d'abord été montré par D. Bucur dans [37] que les formes optimales sont de classe  $C^1$  (par une méthode de coupure), mais il a été également remarqué dans [146] que dans le cas  $n = d = 2$ , la forme optimale ne peut pas être  $C^{1, \frac{1}{2} + \varepsilon}$  pour  $\varepsilon > 0^4$ . Il reste donc à montrer que la forme optimale est effectivement  $C^{1, \frac{1}{2}}$ , ce qui n'est connu que dans le cas planaire et sous certaines hypothèses a priori sur la géométrie des ensembles optimaux ([146]).

4. Dans [146], une hypothèse géométrique sur la forme optimale est faite (à savoir que son bord ne contient qu'un nombre fini de segments), mais dans un travail non publié, j'ai constaté qu'on peut se passer de cette hypothèse (mais il serait plus intéressant de montrer que l'hypothèse en question est bien satisfaite).



## Chapitre 3

# Régularité de formes optimales en présence d'un terme de périmètre/longueur ([A2,A5])

Dans ce chapitre, on s'intéresse à des questions de régularité en optimisation de forme, et on rapporte les contributions de [87, 64]. Deux exemples parmi les plus célèbres portant sur les questions de régularité en optimisation de forme sont la théorie développée pour les problèmes isopérimétriques (voir par exemple [164]) et celle développée pour la fonctionnelle de Mumford-Shah (problème de discontinuité libre, voir par exemple [6, 86]). Les deux résultats que nous présentons sont respectivement liés à ces deux problèmes :

- Dans le premier paragraphe, on s'intéresse à des problèmes de la forme

$$\min \left\{ P(\Omega) + \mathcal{G}(\Omega), \Omega \subset D, |\Omega| = m_0 \right\}, \quad (3.1)$$

où  $P$  est le périmètre,  $|\cdot|$  le volume, et la fonctionnelle  $\mathcal{G}$  est l'une des fonctionnelles suivantes :

- l'énergie de Dirichlet  $E_f$ , où  $f \in L^p(D)$  (et peut changer de signe) ;
- une fonctionnelle spectrale de la forme  $F(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ , où  $\lambda_k$  est la  $k$ -ième valeur propre du Laplacien-Dirichlet, et  $F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  est lipschitzienne et croissante en chaque variable.

Le domaine  $D$  est tantôt un ouvert borné, tantôt l'espace  $\mathbb{R}^d$  tout entier. On montre que les solutions de ces problèmes existent et sont des quasi-minimiseurs du périmètre, voir le Théorème 3.1 : elles sont donc régulières, à un ensemble négligeable de codimension 8 près. L'approche est très générale, et on identifie explicitement des hypothèses sur la fonction  $\mathcal{G}$  pour que le résultat persiste, voir les Propositions 3.1 et 3.2.

- Dans le second paragraphe, on s'intéresse au problème

$$\min \{ \mathcal{C}(\Sigma) + \Lambda \mathcal{H}^1(\Sigma), \Sigma \text{ ensemble fermé connexe de } \overline{D} \},$$

où  $D$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\Lambda > 0$ ,  $\mathcal{H}^1(\Sigma)$  est la longueur de  $\Sigma$  (sa mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle),  $\mathcal{C}(\Sigma)$  est la compliance de l'ouvert  $D \setminus \Sigma$ , c'est-à-dire l'opposé de l'énergie de Dirichlet de  $D \setminus \Sigma$  pour un terme de force  $f \in L^2(D)$ , soit

$$\mathcal{C}(\Sigma) = - \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla w_{\Sigma}|^2 - f w_{\Sigma} \right) dx = - \min \left\{ \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla v|^2 - f v \right) dx, v \in H_0^1(D \setminus \Sigma) \right\} = -E_f(D \setminus \Sigma).$$

Ce problème peut être interprété physiquement comme la question de trouver le meilleur emplacement pour attacher une membrane afin d'en maximiser la résistance, tout en minimisant la longueur de la zone d'attache. On peut le voir comme une version EDP du problème classique de la distance moyenne, et on verra qu'il y a un lien étroit avec le problème de Mumford-Shah.

Nous démontrons une théorie complète de régularité (Théorème 3.2), à savoir que les minimiseurs (qui existent) sont constitués d'un nombre fini de courbes qui peuvent s'intersecter, mais uniquement par trois avec des angles de  $120^\circ$ . On montre également que la solution ne possède pas de cycle, et que s'il y a contact avec le bord de la boîte, celui-ci est tangentiel.

### 3.1 Problèmes isopérimétriques

Ce paragraphe résume les résultats de [87].

### 3.1.1 Introduction et état de l'art

On s'intéresse donc principalement à étudier la question de la régularité des formes optimales pour des problèmes de la forme (3.1). Afin de comprendre le contexte et les principales difficultés, nous présentons brièvement un état de l'art sur ce type de question.

#### État de l'art :

Rappelons qu'en général, pour obtenir un résultat d'existence pour un problème de la forme (0.3), on choisit une topologie sur  $\mathcal{A}$ , qui est en général faible et oblige à relaxer la classe initiale  $\mathcal{A}$  en une classe d'ensembles possiblement très irréguliers. Pour les fonctionnelles que nous allons étudier par exemple, on choisira une classe d'ensembles boréliens.

Une fois l'existence acquise, on attend souvent qu'une forme optimale  $\Omega^*$  de (0.3) soit bien plus régulière que ce que le résultat d'existence fournit a priori. Si on suppose par exemple un peu de régularité sur la forme optimale, par exemple que son bord est localement un graphe Lipschitz, alors il est assez facile d'améliorer cette régularité en écrivant une condition d'optimalité par des méthodes classiques de calcul de variations, et en utilisant des résultats fins mais classiques de régularité pour les EDP elliptiques.

Mais la plus grosse difficulté consiste à montrer une régularité, même faible, à partir de "rien", c'est-à-dire de montrer que  $\Omega^*$ , a priori très faiblement régulier (par exemple un ensemble à périmètre fini), est en fait un ouvert Lipschitz ou  $C^{1,\alpha}$ .

L'exemple très célèbre dans cette direction vient de la minimisation du périmètre (voir (0.5) pour une définition) sous contrainte de volume. Bien sûr, l'inégalité isopérimétrique classique affirme que la boule de bon volume est l'unique<sup>1</sup> minimiseur pour ce problème, et dans ce cas, la question de la régularité devient triviale. Mais dans des situations plus générales, par exemple le problème isopérimétrique contraint

$$\min\{P(\Omega), |\Omega| = m_0, \Omega \subset D\}$$

où  $D$  est une boîte de  $\mathbb{R}^d$  trop étroite pour contenir une boule de volume  $m_0$ , la question de l'existence et de la régularité sont non triviales. Dans ce cas, il est montré que si  $D$  est borné, une forme optimale  $\Omega^*$  existe dans la classe des ensembles à périmètre fini, et que  $\partial\Omega^* \cap D$  est régulière (localement analytique) si  $d \leq 7$ , et dans le cas général est régulière en dehors d'un ensemble résiduel de codimension au moins 8, voir par exemple [112, 109, 164].

Ces résultats ont été largement généralisés et ont amené à la notion de *quasi-minimiseur du périmètre*. On dit que  $\Omega^*$  est un tel domaine s'il existe  $C \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in (d-1, d]$  et  $r_0 > 0$  tel que pour toute boule  $B_r$  où  $r \leq r_0$ , on a

$$P(\Omega^*) \leq P(\Omega) + Cr^\alpha, \quad \forall \Omega \text{ tel que } \Omega \Delta \Omega^* \subset B_r \cap D. \quad (3.2)$$

Cela implique précisément que

$$\text{le bord réduit } \partial^*\Omega^* \cap D \text{ est } C^{1,(\alpha-d+1)/2} \text{ et } \dim_{\mathcal{H}}((\partial\Omega \setminus \partial^*\Omega) \cap D) \leq d-8. \quad (3.3)$$

Ici on rappelle la convention habituelle que  $\partial\Omega$  est le "measure theoretical boundary" de  $\Omega$ , qui coïncide avec le bord topologique de  $\Omega$  pour un bon représentant presque partout, voir aussi (0.6).

Une autre classe de fonctionnelles intéressantes est liée à des EDPs elliptiques avec condition de bord de Dirichlet sur  $\partial\Omega$ . Comme exemple fondamental, on introduit l'énergie de Dirichlet  $E_f$

$$E_f(\Omega) := \min \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} f u dx, u \in H_0^1(\Omega) \right\}, \quad (3.4)$$

où  $f$  est une fonction fixée de  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Elle est définie naturellement pour tout ouvert  $\Omega$  de volume fini. Mais la classe des ouverts n'est pas adaptée à une théorie d'existence, et on doit introduire la classe des quasi-ouverts<sup>2</sup>, voir [121]. Ainsi on s'intéresse au problème

$$\min\{E_f(\Omega), \Omega \text{ quasi-ouvert}, |\Omega| = m_0, \Omega \subset D\}, \quad (3.5)$$

1. à translation et ensemble de mesure nulle près

2. Un ensemble est quasi-ouvert si et seulement s'il est l'ensemble de niveau du fonction de  $H^1$ .

et si  $f \in L^\infty(D)$ , on peut montrer qu’il existe une forme optimale. Il est montré que cette dernière est en fait un ouvert, mais ceci constitue déjà un résultat de régularité non trivial (voir [32]). De plus, si  $f$  est positive et  $d = 2$ , il est montré que  $\partial\Omega^*$  est analytique, voir [31]. Si  $d > 2$ , il est seulement connu que  $\partial\Omega^*$  est régulier en dehors d’un ensemble résiduel de codimension au moins 1, voir [31]. Les arguments principaux de [31] consistent à établir un lien entre le problème (3.4) et un problème à frontière libre, dont la théorie de régularité repose sur des techniques introduites par Alt et Caffarelli dans [3]. La stratégie utilise fortement que  $E_f(\Omega)$  a une formulation variationnelle comme minimisation d’une fonctionnelle dans une classe de fonctions  $u \in H^1(D)$  et l’ensemble optimal peut être vu comme un ensemble de niveau d’une fonction optimale  $u$ .

Notons que si  $f$  change de signe, alors  $\partial\Omega^*$  aura des singularités aux endroits où  $u$  change de signe. Cela arrive même en dimension 2, avec une apparition de singularité en point de rebroussement (“*cusp*”), voir par exemple [91]. Ceci montre que la question de régularité des formes optimales est difficile dans ce cas. Il est intéressant de noter que, en ajoutant un terme de périmètre dans la fonctionnelle à minimiser comme on le fera ici, on obtient régularité même quand la donnée  $f$  change de signe, voir le Théorème 3.1.

Dans [155] (voir aussi [9]), la régularité des minimiseurs est étudiée pour le problème

$$\min\{P(\Omega) + E_f(\Omega), \quad |\Omega| = m_0, \quad \Omega \subset D\}, \tag{3.6}$$

où les deux fonctionnelles précédentes apparaissent. Le principal résultat de N. Landais affirme que si  $f$  est positive et dans  $L^\infty(D)$ , alors la forme optimale  $\Omega^*$  du problème (3.6) est un quasi-minimiseur du périmètre au sens de (3.2), et donc satisfait (3.3). Dans le cas plus général où  $f \in (L^q(D))^+$  avec  $q > d$ , ou  $f \in L^\infty(D)$  sans hypothèse de signe, il est montré dans [154] que la fonction d’état  $u_{\Omega^*}$  (i.e. la fonction réalisant le minimum dans (3.5)) est localement  $C^{0,1/2}$  dans  $D$ . Ceci implique que  $\Omega^*$  est ouvert, mais n’est pas suffisant pour conclure que  $\Omega^*$  est un quasi-minimiseur du périmètre (cela donne  $\alpha = d - 1$  dans (3.2)). On prouvera dans ce papier qu’en effet  $\Omega^*$  est un quasi-minimiseur dans tous les cas.

D’autres fonctionnelles intéressantes sont celles faisant intervenir le spectre du Laplacien-Dirichlet sur  $\Omega$ , noté  $0 < \lambda_1(\Omega) \leq \lambda_2(\Omega) \leq \dots \leq \lambda_k(\Omega) \leq \dots$ . Le problème

$$\min\{\lambda_k(\Omega), \quad |\Omega| = m_0, \quad \Omega \subset D\}, \tag{3.7}$$

où  $k \in \mathbb{N}^*$ , a reçu beaucoup d’attention ces dernières années. Dans le cas particulier où  $D = \mathbb{R}^d$ , c’est seulement récemment que des résultats d’existence ont été obtenus dans la classe des quasi-ouverts, voir [38] et [166]. En particulier dans [38], même si le principal objectif est un résultat d’existence, l’auteur prouve en même temps (et l’utilise pour obtenir le résultat d’existence) des propriétés qualitatives des formes optimales, à savoir qu’elles sont bornées et de périmètre fini ; la stratégie employée amène à l’idée de sur- et sous-solutions pour les problèmes d’optimisation de forme. Remarquons que pour les minimiseurs de (3.7), la question de la régularité n’est pas complètement résolue, voir néanmoins les résultats de [33, 41].

Dans le travail récent [89], G. De Philippis et B. Velichkov étudient un problème un peu différent, à savoir :

$$\min\{\lambda_k(\Omega), \quad P(\Omega) = m_0\}. \tag{3.8}$$

En utilisant à nouveau le concept de sur/sous-solution, ils tirent avantage de la présence du terme de périmètre et sont capable de montrer que les solutions de (3.8) sont des quasi-minimiseurs du périmètre, et donc satisfont (3.3). En particulier, leur stratégie permet de montrer la régularité pour des fonctionnelles qui ne permettent pas que le problème d’optimisation de forme se traduise directement en un problème à frontière libre, et qui permettent des changements de signe dans la fonction d’état.

### 3.1.2 Nouveaux résultats

Notre principal objectif est de pouvoir traiter les problèmes de la forme

$$\min\{P(\Omega) + E_f(\Omega), \quad |\Omega| = m_0, \quad \Omega \subset D\} \quad \text{ou} \quad \min\{P(\Omega) + \lambda_k(\Omega), \quad |\Omega| = m_0, \quad \Omega \subset D\}.$$

et donc de généraliser et améliorer les résultats de [154, 155]. Notre principal résultat, le Théorème 3.1 ci-dessous, montre d’une part l’existence de minimiseurs, et d’autre part que ceux-ci sont des quasi-minimiseurs du périmètre.

**Théorème 3.1** *Supposons que  $D \subset \mathbb{R}^d$  est un ouvert borné de classe  $C^2$ , ou l'espace entier  $D = \mathbb{R}^d$ , et  $m_0 \in ]0, |D|[$ . Alors il existe une solution au problème*

$$\min \left\{ P(\Omega) + \mathcal{G}(\Omega), \quad \Omega \text{ ouvert}, \quad \Omega \subset D, \quad |\Omega| = m_0 \right\}, \quad (3.9)$$

où  $\mathcal{G}$  est l'une des fonctionnelles suivantes :

- $\mathcal{G} = E_f$ , où  $f \in L^p(D)$  avec  $p \in ]d, \infty[$  si  $D$  est borné et  $p \in ]d, \infty[$  si  $D = \mathbb{R}^d$  ;
- $\mathcal{G} = F(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ , où  $F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  est croissante en chaque variable, et localement Lipschitz.

De plus, toute solution  $\Omega^*$  de (3.9) est bornée et est un quasi-minimiseur du périmètre avec exposant  $d - d/p$  ou  $d$  respectivement, et satisfait donc (3.3).

Ceci généralise et améliore les résultats de [155] ; en effet on relaxe fortement les hypothèses faites sur  $f$  dans le cas de l'énergie de Dirichlet : on est en mesure de traiter le cas  $f \in L^q(D)$  pour  $q \in (d, \infty]$  sans condition de signe. En ce qui concerne les valeurs propres, alors que la stratégie de [155] (basée sur une formulation à frontière libre) ne pouvait que s'appliquer au cas  $k = 1$ , on est en mesure de traiter toute valeur de  $k$ . Voir le Paragraphe 3.1.3 pour comprendre les nouvelles idées permettant ces généralisations.

Un fait intéressant dans la démonstration de ce résultat, est que les preuves d'existence et de régularité sont étroitement liées, et ce pour deux raisons :

- on a déjà évoqué que la classe des ouverts n'était pas adaptée à des résultats d'existence. On montrera un résultat d'existence pour un problème annexe (voir le début du Paragraphe 3.1.3) défini sur les ensembles mesurables, et on conclura que les solutions de ce problème sont aussi solutions de (3.9) après avoir montré qu'elles sont en fait suffisamment régulières.
- si  $D = \mathbb{R}^d$ , afin d'étudier les suites minimisantes, on est amené à étudier le caractère borné de ces suites (à translation près). Comme dans [38], ceci est lié à une estimation de densité qui est la première étape dans l'étude de la régularité.

Notons que les hypothèses du Théorème 3.1 sont essentiellement optimales en ce qui concerne l'existence, voir [87, Remark 1.2].

Comme on l'a dit précédemment, une fois la régularité  $C^{1,\alpha}$  obtenue, on peut étudier la régularité de degré plus élevé. Dans le cas  $\mathcal{G} = E_f$  où  $f$  est suffisamment régulière, ceci est fait très classiquement en écrivant la condition d'optimalité de (3.9), voir [155]. Pour  $\mathcal{G} = F(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ , c'est plus élaboré car les valeurs propres peuvent ne pas être différentiables si elles sont multiples, et il n'est plus si simple d'écrire une condition d'optimalité. Néanmoins, comme remarqué dans [21, 20], cela peut être fait, et il est montré que le bord réduit est  $C^\infty$  si  $F$  est suffisamment régulière.

### 3.1.3 Stratégie et résultats intermédiaires

La preuve du Théorème 3.1 repose sur les étapes suivantes :

- **Extension de la classe des ensembles admissibles.** Du point de vue de l'existence, il est plus commode de considérer la classe d'ensembles la plus étendue possible. Dans cet esprit, on introduit la fonctionnelle  $\tilde{\mathcal{F}} = P + \tilde{\mathcal{G}}$  définie sur la classe des ensembles boréliens de  $\mathbb{R}^d$ , où  $\tilde{\mathcal{G}}$  est définie de la même façon que  $\mathcal{G}$  mais en remplaçant l'espace de Sobolev  $H_0^1(\Omega)$  habituel par

$$\tilde{H}_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^d), \quad u = 0 \quad \text{p.p. sur} \quad \mathbb{R}^d \setminus \Omega \right\}.$$

C'est encore un espace de Hilbert pour la norme  $\|u\|_{\tilde{H}_0^1}^2 = \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2$ , et on a toujours l'inclusion compacte  $\tilde{H}_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$  si  $\Omega$  est de mesure finie, et pour cette raison les fonctionnelles  $\tilde{E}_f$  et  $\tilde{\lambda}_k$  sont bien définies. Si  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  est un ouvert, on a facilement  $H_0^1(\Omega) \subset \tilde{H}_0^1(\Omega)$ <sup>3</sup>, et donc  $\tilde{\mathcal{G}}(\Omega) \leq \mathcal{G}(\Omega)$ . Néanmoins, si  $\Omega$  satisfait une condition de densité extérieure,  $H_0^1(\Omega) = \tilde{H}_0^1(\Omega)$  voir par exemple [89] et [87, Lemma 5.6].

- **Existence d'un minimiseur de  $\tilde{\mathcal{F}}$ .** Avec la formulation de l'étape précédente, la question d'existence devient classique dans le cas où on cherche parmi les ensembles mesurables de mesure donnée et contenus dans une boîte

3. En général cette inclusion est stricte, comme on peut le voir avec l'exemple d'une boule privée d'un hyperplan.

bornée  $D \subset \mathbb{R}^d$ . C'est dans le cas  $D = \mathbb{R}^d$  que la preuve est plus difficile ; on doit utiliser des arguments de type concentration-compacité à la P.L. Lions (voir aussi [36]). Le plus difficile est d'écartier le cas de dichotomie (les suites minimisations se séparent en deux parties dont la distance tend vers  $+\infty$ ), et pour cela on utilise des propriétés qualitatives des minimiseurs, en l'occurrence que celles-ci sont bornées : ceci repose sur l'étude des sous-solutions du périmètre décrite plus loin.

- **Pénalisation de la contrainte de volume :** Ceci constitue une difficulté nouvelle par rapport à [89], mais qui apparaît à de nombreux endroits dans la littérature, par exemple dans [155, 93]. En effet, afin de permettre une théorie de régularité, on montre que si  $\Omega^*$  est solution de (3.9), alors elle est solution d'un problème pénalisé :

$$P(\Omega^*) + \mathcal{G}(\Omega^*) = \min \{ P(\Omega) + \mathcal{G}(\Omega) + \Lambda ||\Omega| - |\Omega^*||, \Omega \subset D \},$$

où  $\Lambda$  est assez grand (plus précisément, on localise près d'un point du bord de  $\Omega^*$ , autrement dit les ensembles  $\Omega$  sont contraints à être égaux à  $\Omega^*$  en dehors d'une boule  $B_r(x_0)$ ). Notre approche est très générale et repose sur des estimations d'ordre 0 de la variation de l'énergie, c'est-à-dire de la forme

$$|\mathcal{G}((Id + \theta)(\Omega)) - \mathcal{G}(\Omega)| \leq C \|\theta\|_{W^{1,\infty}}, \quad (3.10)$$

où  $\theta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  est dans un voisinage  $W^{1,\infty}$  de 0, et où la constante  $C$  doit être indépendante de  $\Omega$  (supposés fixes en dehors d'une boule  $B_r(x_0)$ ). On montre d'une part qu'avec une telle estimation, le résultat de pénalisation est valable, et d'autre part que les fonctionnelles qui nous intéressent satisfont (3.10).

- **Régularité des minimiseurs de  $\tilde{\mathcal{F}}$ .** On généralise les notions de sur/sous-solutions développées dans [89] pour des fonctionnelles ayant un terme volumique (voir (3.11) et (3.13)). On donnera deux énoncés généraux : le premier s'intéresse aux sur-solutions du périmètre (le terme  $\mathcal{G}$  disparaît du fait de sa monotonie pour l'inclusion) :

**Proposition 3.1** *Supposons qu'il existe  $r_0 > 0$  tel que*

$$P(\Omega^*) + \Lambda|\Omega^*| \leq P(\Omega) + \Lambda|\Omega|, \quad \forall \Omega \supset \Omega^* \text{ tel que } \Omega \Delta \Omega^* \subset B_r(x_0) \text{ pour un certain } x_0 \in \mathbb{R}^d. \quad (3.11)$$

Alors

1.  $\Omega^*$  est ouvert et tel que  $H_0^1(\Omega^*) = \tilde{H}_0^1(\Omega^*)$ .
2. La fonction d'énergie  $w_{\Omega^*}$ , solution de

$$-\Delta w_{\Omega^*} = 1 \quad \text{in } \Omega^*, \quad w_{\Omega^*} \in H_0^1(\Omega^*), \quad (3.12)$$

est Lipschitz sur  $\mathbb{R}^d$ .

Ce résultat généralise des idées de [9], et insiste sur le fait que seules des perturbations extérieures sont utiles. Cela repose sur l'idée que (3.11) implique que la courbure moyenne est minorée, au sens des viscosités (voir [87, Proposition 5.8]). Pour gérer la contrainte d'inclusion dans  $D$ , nous prouvons également que si  $D$  est bornée et  $C^2$  et  $\Omega$  est une sur-solution avec contrainte d'inclusion dans  $D$ , alors quitte à changer  $\Lambda$  et  $r$ ,  $\Omega$  est aussi sur-solution sans contrainte (i.e. satisfait (3.11), et le résultat précédent s'applique.

Le second résultat s'intéresse à la sous-optimalité et fait le lien avec les quasi-minimiseurs du périmètre :

**Proposition 3.2** *Supposons  $\tilde{\mathcal{G}}$  de la forme*

- $\tilde{\mathcal{G}}(\Omega) = \tilde{E}_f(\Omega)$ , pour  $f \in L^p(D)$  avec  $p \in (d, \infty]$ .
- $\tilde{\mathcal{G}}(\Omega) = F(\tilde{\lambda}_1(\Omega), \dots, \tilde{\lambda}_k(\Omega))$ , où la fonction  $F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  est localement Hölderienne d'exposant  $\beta > 0$ .

Supposons que  $\Omega^* \subset \mathbb{R}^d$  est un ouvert de mesure finie, que  $w_{\Omega^*}$  solution de (3.12) est Lipschitz sur  $\mathbb{R}^d$ , et qu'il existe  $\Lambda$  tel que

$$P(\Omega^*) + \tilde{\mathcal{G}}(\Omega^*) + \Lambda|\Omega^*| \leq P(\Omega) + \tilde{\mathcal{G}}(\Omega) + \Lambda|\Omega|, \quad \text{pour tout mesurable } \Omega \subset \Omega^*. \quad (3.13)$$

Alors  $\Omega^*$  est un quasi-minimiseur "intérieur" du périmètre, d'exposant  $d\beta$  où  $\beta = 1 - 1/p$  si  $\tilde{\mathcal{G}} = \tilde{E}_f$  et  $\beta$  est l'exposant de Hölder de  $F$  si  $\tilde{\mathcal{G}}(\Omega) = F(\tilde{\lambda}_1(\Omega), \dots, \tilde{\lambda}_k(\Omega))$ , c'est-à-dire qu'il existe  $r_0 > 0$  et  $C > 0$  tels que

$$P(\Omega^*) \leq P(\Omega) + Cr^{d\beta}, \quad \text{pour tout ensemble mesurable } \Omega \subset \Omega^* \text{ avec } \Omega^* \Delta \Omega \subset B_r(x_0) \text{ pour un certain } r < r_0 \text{ et } x_0 \in \mathbb{R}^d.$$

On montre également que les solutions sont bornées si  $\beta > 1 - \frac{1}{d}$ . On généralise ici les résultats de [154, 155] : la principale nouvelle idée est ici de montrer que la fonction de torsion  $w_{\Omega^*}$  (et non la fonction d'état  $w_{\Omega^*, f}$ ) est Lipschitz, et de prouver et utiliser que les variations de  $E_f$  sont contrôlées par les variations de  $E_1$ . En particulier, ceci permet de ne pas utiliser le Lemme de monotonie de Caffarelli-Jerison-Kenig [52], comme c'est le cas dans [154].

- **Conclusion.** En combinant les étapes précédentes, on obtient l'existence d'un minimiseur  $\tilde{\Omega}$  de  $\tilde{\mathcal{F}}$ , qui est suffisamment régulier pour avoir  $\mathcal{F}(\tilde{\Omega}) = \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{\Omega})$ . Ainsi d'après l'inégalité  $\tilde{\mathcal{F}} \leq \mathcal{F}$  valable sur la classe des ouverts, on obtient d'une part que  $\tilde{\Omega}$  est aussi un minimiseur de  $\mathcal{F}$  dans la classe des ouverts, et d'autre part que tout minimiseur  $\Omega$  de  $\mathcal{F}$ , est encore un minimiseur de  $\tilde{\mathcal{F}}$  et est donc régulier.

## 3.2 Problème de résistance optimale

Ce paragraphe résume les résultats de [64].

### 3.2.1 Introduction et principaux résultats

Etant donné  $D$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\Sigma \subset \bar{D}$  un ensemble fermé et  $f \in L^2(D)$ , on note  $w_\Sigma$  l'unique solution de

$$-\Delta w_\Sigma = f \text{ sur } D \setminus \Sigma, \quad w_\Sigma \in H_0^1(D \setminus \Sigma).$$

D'un point de vue physique, on peut penser à une membrane attachée sur  $\partial D$  et soumise à une force  $f$ , et  $\Sigma$  est une zone de colle attachant la membrane au sol, empêchant son déplacement. Alors  $w_\Sigma$  représente le déplacement de la membrane. La souplesse (“*compliance*”) de la membrane peut se définir par

$$\mathcal{C}(\Sigma) := - \left( \frac{1}{2} \int_{D \setminus \Sigma} |\nabla w_\Sigma|^2 dx - \int_D f w_\Sigma dx \right) = -E_f(D \setminus \Sigma).$$

Nous étudions le problème d'optimisation suivant, pour  $\Lambda \in ]0, \infty[$  :

$$\min \{ \mathcal{F}_\Lambda(\Sigma) := \mathcal{C}(\Sigma) + \Lambda \mathcal{H}^1(\Sigma), \quad \Sigma \subset \bar{D} \text{ fermé connexe} \}. \quad (3.14)$$

Nous nous intéresserons aux propriétés qualitatives, en particulier de régularité, des solutions de ce problème. Il s'agit d'une version pénalisée du problème étudié par exemple dans [48, 45, 199] où la pénalisation par  $\Lambda \mathcal{H}^1(\Sigma)$  est remplacée par la contrainte  $\mathcal{H}^1(\Sigma) \leq \ell_0$ , mais qui est plus difficile à analyser (voir Paragraphe 3.3).

L'existence de minimiseurs de (3.14) est non triviale mais est une conséquence directe des Théorèmes de Blaschke, Šverák, et Gołab, comme cela est remarqué dans [48].

Un autre problème d'optimisation de formes 1-dimensionnelle est le problème de la distance moyenne, qui a reçu beaucoup d'attention pendant ces dernières années : étant donné  $\mu \in \mathcal{M}_P(D)$ , on s'intéresse à

$$\min \left\{ \int_D \text{dist}(x, \Sigma) d\mu + \Lambda \mathcal{H}^1(\Sigma), \quad \Sigma \subset \bar{D} \text{ closed connected} \right\}. \quad (3.15)$$

Ce problème est relié à un problème de type Monge-Kantorovich et a été introduit pour modéliser un réseau de trafic urbain [46, 49]. Les propriétés topologiques et géométriques pour ce problème (plutôt dans sa version contrainte, mais la plupart des arguments s'adaptent à la version pénalisée, parfois de manière plus simple) ont été étudiées par plusieurs auteurs (voir [157] pour un compte-rendu de la littérature, et [47, 180, 196, 50, 156, 189, 198] pour différents résultats). Remarquons que si on remplace le laplacien par le  $p$ -laplacien dans la formulation de  $\mathcal{C}$ , et si  $p$  tend vers  $+\infty$ , alors on peut montrer que la fonction de  $p$ -souplesse converge vers la fonction de distance moyenne.

Du fait de cette dernière remarque, on pourrait penser que les deux problèmes (3.14) et (3.15) se comportent de façon similaire. Comme nous allons le voir, ce n'est pas le cas pour la question de la régularité : en effet, nous allons montrer que les solutions sont régulières à l'intérieur de  $D$ , en dehors de possibles points triples, alors que pour le problème de la distance moyenne, il a été montré que des coins peuvent apparaître, voir [194, 163].



Par contre, on montrera un lien étroit entre (3.14) et le problème classique de Mumford-Shah, par une relation de dualité, et un certain nombre des outils employés sont fortement inspirés des arguments développés pour la fonctionnelle de Mumford-Shah (on réfère à [6, 86, 158] pour plus d'informations sur ce problème). On utilisera même, la classification des Blow-ups faite par Bonnet [23].

On réunit dans le résultat suivant l'ensemble des propriétés que nous avons démontrées sur les solutions de (3.14) :

**Théorème 3.2** *Supposons  $D$  de classe  $C^1$  et  $f \in L^p(D)$  avec  $p > 2$ . Alors toute solution  $\Sigma$  de (3.14) satisfait les propriétés suivantes :*

PARTIE I : PROPRIÉTÉS QUALITATIVES.

(i)  $\Sigma$  ne contient pas de boucle<sup>4</sup>.

(ii)  $\Sigma$  est Ahlfors-régulier.

(iii)  $\Sigma$  est un ensemble "corde-arc", c'est-à-dire  $\left[ \forall x, y \in \Sigma, d_\Sigma(x, y) \leq C|x - y| \right]$  pour une constante  $C > 0$  et où  $d_\Sigma$  est la distance géodésique de  $\Sigma$ .

PARTIE II : RÉGULARITÉ.

(iv)  $\Sigma$  est l'union d'un nombre fini de courbes injectives, qui ne s'intersectent qu'en des points triples, où elles se rencontrent par 3 avec des angles de  $120^\circ$ . En particulier, il y a un nombre fini de points terminaux et de points triples.

(v) Ces courbes sont localement  $C^{1,\alpha}$  dans  $D$  pour un  $\alpha \in ]0, 1[$ , et peuvent toucher le bord  $\partial D$  seulement tangentiellement.

(vi) Si de plus  $f \in H_{loc}^1(D)$ , alors les courbes qui composent  $\Sigma$  sont localement  $C^{2,\alpha}$  dans  $D$  pour tout  $\alpha < 1$ , et si  $f$  est localement  $C^{k,\beta}$  pour  $k \in \mathbb{N}$  et  $\beta \in ]0, 1[$ , alors elles sont  $C^{k+3,\beta}$ .

Notons que (i) et (iv)-(v) sont probablement les éléments les plus intéressants, alors que (ii) et (iii) peuvent paraître secondaires (et (vi) est classique). Néanmoins, ces points servent dans la démonstration de la Partie II. L'hypothèse de régularité  $C^1$  de  $D$  n'intervient que dans l'étude au bord (mais celle-ci sert pour montrer qu'il y a un nombre fini de points triples ou de points terminaux), et sans cette hypothèse, (i) et (ii) et des résultats de régularité intérieure persistent.

### 3.2.2 Stratégie et résultats intermédiaires

Dans tout ce qui suit, on suppose  $f \in L^\infty(D)$  afin de simplifier la présentation, mais il est facile d'adapter les énoncés et les calculs au cas  $p > 2$ .

**Premières propriétés qualitatives :** Même si ces propriétés sont moins fortes qu'un résultat de régularité globale, il est naturel de commencer à montrer les propriétés qualitatives de la Partie I : en effet on se servira de ces propriétés par la suite.

- Le caractère d'Ahlfors-régularité s'écrit de la façon suivante : il existe  $c > 0$ ,  $r_0 > 0$  et  $C > 0$  tels que pour tout  $r \in ]0, r_0[$  et tout  $x \in \Sigma$  on a

$$cr \leq \mathcal{H}^1(\Sigma \cap B_r(x)) \leq Cr.$$

Du fait de la connexité, la partie gauche de l'inégalité est triviale avec  $c = 1$ . L'inégalité de droite est une première indication de régularité de l'ensemble  $\Sigma$ , puisqu'elle affirme qu'il ne peut pas y avoir trop d'oscillation de  $\Sigma$ . La preuve est simple, on applique l'optimalité en comparant l'énergie de  $\Sigma$ , avec le compétiteur  $\Sigma_r := (\Sigma \setminus B_r(x)) \cup (\partial B_r(x) \cap \overline{D})$  où on remplace le morceau de courbe qui passe par  $x$  par le cercle de rayon  $r$ . Cette preuve fonctionne si on arrive à montrer que la variation du terme de souplesse pour cette déformation est de l'ordre de  $r$ , voir le point sur la formule de monotonie.

- Pour montrer l'absence de boucle, on suppose par l'absurde qu'il y en a une, et alors on peut trouver une coupure de taille  $r$  petit qui donne un compétiteur connexe (ce fait est non trivial, mais intuitif) ; on doit alors estimer

---

4. c'est-à-dire ne contient pas de partie homéomorphe au cercle  $\mathbb{S}^1$

la perte de longueur et la comparer au gain de souplesse. On verra que si on fait la coupure à un endroit où l'ensemble est à peu près plat (ce qui est toujours possible par rectifiabilité), la variation de périmètre est de l'ordre de  $r$  et la variation de souplesse est *presque* de l'ordre de  $r^2$ , ce qui fournit une contradiction.

- estimation “corde-arc” : une telle propriété a été montrée pour les composantes connexes des minimiseurs de Mumford-Shah, mais notre approche est très différente. En quelque sorte, il s'agit d'une version quantitative de la preuve d'absence de boucle décrite juste précédemment : si  $x$  et  $y$  sont très proches mais que la courbe qui les rejoint “part loin”, alors on peut enlever un petit élément de cette courbe à un endroit où elle est plate, et ajouter le segment entre  $x$  to  $y$  pour préserver la connexité. Pour ce faire, on doit contrôler par en dessous le rayon de la boule où  $\Sigma$  est plat, uniformément en la distance de  $x$  à  $y$ . Ceci est obtenu par l'uniforme rectifiabilité de  $\Sigma$ , qui vient elle-même de l'Ahlfors-regularité précédemment démontrée.

**Formule de monotonie et variation de la souplesse** : il est assez classique dans ce type d'étude d'avoir recours à des formules de monotonie de certaines énergies (voir par exemple [4, 23]), dont le principal corollaire consistera à montrer une certaine borne sur l'énergie sur des boules, en fonction de la géométrie. On montre une formule de monotonie qui peut être vue comme une version Dirichlet de la formule de monotonie de Bonnet [23] :

**Lemme 3.1** *Soit  $\Sigma \subset \overline{D}$  un ensemble fermé,  $x_0 \in \overline{D}$  et  $0 \leq r_0 < r_1$ . On suppose*

$$(\Sigma \cup \partial D) \cap \partial B_r(x_0) \neq \emptyset \text{ pour tout } r \in [r_0, r_1]. \quad (3.16)$$

*Alors pour tout  $\gamma \in [\max\{\pi, \gamma_\Sigma(x_0, r_0, r_1)\}, 2\pi]$ , où*

$$\gamma_\Sigma(x_0, r_0, r_1) := \sup \left\{ \frac{\mathcal{H}^1(S)}{r} : r \in ]r_0, r_1[ \text{ et } S \text{ composante connexe de } \partial B_r(x_0) \setminus (\Sigma \cup \partial D) \right\},$$

*la fonction  $r \in [r_0, r_1] \mapsto \left[ \frac{1}{r^\alpha} \int_{B_r(x_0)} |\nabla w_\Sigma|^2 dx + Cr^{2-\alpha} \right]$  est décroissante, avec  $\alpha = 2\pi/\gamma$  et  $C = C(|D|, \|f\|_\infty, \gamma)$ .*

Ce lemme est un moyen d'estimer l'énergie  $\int_{B_r(x_0)} |\nabla w_\Sigma|^2$  par  $r^\alpha$  en fonction des informations sur la géométrie de  $\Sigma$ . Plus  $\Sigma$  aura des oscillations, plus on pourra choisir  $\gamma$  petit et obtenir un exposant  $\alpha$  grand. Par un argument de localisation classique, on montre que si  $\Sigma'$  est un compétiteur égal à  $\Sigma$  en dehors de  $B_r$ , alors on a l'estimation

$$\mathcal{C}(\Sigma') - \mathcal{C}(\Sigma) \leq C \int_{B_r} |\nabla w_{\Sigma'}|^2 dx,$$

qui sera utile lors de l'utilisation d'optimalité. On voit déjà apparaître une difficulté (qui sera plus sérieuse au point suivant), à savoir qu'on veut estimer l'énergie de  $\Sigma'$  et non de  $\Sigma$  supposé minimiseur. Ceci est dû au fait que l'on a un problème de type min-max, au sens où on minimise l'opposé de l'énergie de Dirichlet, ce qui atteste d'une différence fondamentale avec les problèmes à frontière libre habituels. Pour cette raison, on introduira  $\omega_\Sigma$  dans la suite, voir (3.17). Pour le moment, on peut déduire de ce qui précède un contrôle des variations de  $\mathcal{C}$  pour des rayons pas trop petits :

**Proposition 3.3** *Soit  $\Sigma \subset \overline{D}$  un fermé connexe, et  $x_0 \in \Sigma$ . Soit  $r_0, r_1$  tels que  $0 < 2r_0 < r_1 < \min(1, \text{diam}(\Sigma)/2)$  et  $\gamma \in [\max\{\pi, \gamma_\Sigma(x_0, r_0, r_1)\}, 2\pi]$ . Alors pour tout  $r \in [r_0, r_1/2]$ , et tout fermé connexe  $\Sigma' \subset \overline{D}$  tel que  $\Sigma \Delta \Sigma' \subset B_r(x_0)$  on a*

$$|\mathcal{C}(\Sigma') - \mathcal{C}(\Sigma)| \leq Cr^{\frac{2\pi}{\gamma}}$$

*où  $C > 0$  dépend de  $|D|, \|f\|_\infty, \gamma, r_1$ .*

On peut maintenant voir comment obtenir les estimations évoquées au point précédent. Dans le cas général, on peut toujours prendre  $\gamma = 2\pi$ , et on obtient une variation de l'ordre de  $r$  (utile pour l'Ahlfors-régularité), et dans le cas où l'ensemble est presque plat, on peut prendre  $\gamma = \pi + \varepsilon$  et on obtient une variation de l'ordre de  $r^{2-\varepsilon}$  (utile pour l'absence de boucle par exemple).

**Résultat de “ $\varepsilon$ -régularité”** : on cherche des conditions suffisante dans la boule  $B_r(x)$  pour que  $\Sigma \cap B_{r/2}(x)$  soit une courbe  $C^{1,\alpha}$ .

On pourrait espérer montrer que tout minimiseur  $\Sigma$  de (3.14) est un *presque-minimiseur* de la longueur, c'est-à-dire que pour tout compétiteur  $\Sigma'$  tel que  $\Sigma \Delta \Sigma' \subset B_r$ , on a

$$\mathcal{H}^1(\Sigma \cap B_r) \leq \mathcal{H}^1(\Sigma' \cap B_r) + Cr^{1+\alpha},$$

et appliquer alors les résultats de régularité pour de tels ensembles ([169]). Cela nécessiterait une estimation du type

$$\mathcal{C}(\Sigma') - \mathcal{C}(\Sigma) \leq Cr^{1+\alpha}, \quad \text{si } \Sigma \Delta \Sigma' \subset B_r,$$

mais on a déjà vu que comme  $w_{\Sigma'}$  intervient dans l'estimation, nous ne pouvons donc pas avoir cette estimation pour  $r$  petit ; néanmoins, nous allons reproduire la stratégie de preuve de régularité, en introduisant la quantité

$$\omega_{\Sigma}(x, r) := \max \left\{ \left( \frac{1}{r} \int_{B_r(x)} |\nabla w_{\Sigma'}|^2 dx \right), \Sigma' \text{ connexe ; } \Sigma' \Delta \Sigma \subset \overline{B}_r(x) \right\} \quad (3.17)$$

qui ne dépend que de  $\Sigma$ , et que l'on va estimer en même tant que la platitude

$$\beta_{\Sigma}(x, r) := \inf_{P \ni x} \frac{1}{r} d_H(\Sigma \cap B_r(x), P \cap B_r(x)),$$

où  $d_H$  est la distance de Hausdorff et l'infimum est pris parmi les droites affines  $P$  passant par  $x$ . On obtient :

**Proposition 3.4** *Soit  $\Sigma \subset \overline{D}$  un minimiseur. Alors il existe  $\varepsilon_0 > 0$  and  $\bar{r}_0, C, \alpha > 0$  tels que pour tout  $x \in \Sigma$  et  $r_0 \leq \bar{r}_0$  tel que  $B_{r_0}(x) \subset D$  et*

$$\beta_{\Sigma}(x, r_0) + \omega_{\Sigma}(x, r_0) \leq \varepsilon_0, \quad (3.18)$$

alors il existe  $\alpha \in ]0, 1[$  tel que

$$\beta_{\Sigma}(y, r) \leq Cr^{\alpha} \quad \text{pour tout } y \in \Sigma \cap B_{r_0/2}(x) \text{ et } r \in ]0, r_0/16[.$$

En particulier  $\Sigma \cap B_{r_0/4}(x)$  est une courbe  $C^{1,\alpha}$ .

La stratégie s'inspire de [85, 5] qui montre un résultat similaire pour les minimiseurs de la fonctionnelle de Mumford-Shah. Nous devons adapter aux spécificités de notre problème, qui est de type Dirichlet et min-max. La contrainte de connexité est également une importante différence avec le problème de Mumford-Shah, qui implique des complications dans la construction de compétiteurs. Ceci nécessite beaucoup d'efforts, car si on veut simplement comparer  $\Sigma$  localement avec une ligne droite, il est très délicat de montrer qu'on peut construire un tel compétiteur connexe, sous la seule hypothèse que  $\Sigma$  est connexe et plat. Cela nécessite entre autres d'adapter le Lemme 3.1 dans le cas où (3.16) est remplacée par (3.18), d'estimer la densité  $\Sigma \cap \partial B_s(x_0)$  et montrer qu'elle vaut parfois 2, ce qui permet de construire le compétiteur attendu.

**Etude des blow-up :** Afin d'étudier la régularité complète, une étape centrale consiste à analyser les "blow-up". A nouveau, la formulation min-max constitue une difficulté. Pour la contourner, on utilise une formulation duale, qui montre que (3.14) est équivalent à

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \int_D |\sigma|^2 dx + \mathcal{H}^1(\Sigma), \Sigma \subset \overline{D} \text{ compact connexe, } \sigma \in L^2(D, \mathbb{R}^2) \text{ tel que } \operatorname{div} \sigma = f \text{ dans } \mathcal{D}'(D \setminus \Sigma) \right\}.$$

Ce dernier problème permet des constructions plus simples de compétiteurs, et on remarque qu'il s'agit d'un problème très proche du problème de Mumford-Shah ; de façon encore plus remarquable, si on fait la même procédure de dualité sur le problème obtenu à la limite de blow-up, on se ramène exactement au problème des minimiseurs globaux de Mumford-Shah, dont les solutions connexes sont classifiés par Bonnet [23]. Justement, nos compétiteurs sont connexes, mais comme il n'est pas vrai en général qu'un blow-up d'ensembles connexes est connexe, il nous faut montrer que c'est le cas ici : on montre qu'avec la propriété de "corde-arc" démontrée précédemment, c'est bien le cas.

**Comportement au bord de  $D$  :** On constate que si  $\Sigma_0$  est un blow-up fait à partir d'un point limite qui se trouve sur  $\partial D$ , alors le problème limite revient à un problème de type Steiner :  $H \subset \mathbb{R}^2$  étant le demi-espace limite, on a que pour toute boule  $B \subset \mathbb{R}^2$  et tout  $L \subset H$  tels que  $L \setminus B = \Sigma \setminus B$  et  $L \cap \overline{B}$  est connexe, on a

$$\mathcal{H}^1(\Sigma_0 \cap B) \leq \mathcal{H}^1(L \cap B).$$

On montre que si tel est le cas et  $\Sigma_0 \cap \partial H \neq \emptyset$ , alors  $\Sigma_0 = \partial H$ . Le contact est ainsi tangentiel (le comportement au bord est donc très différent de ce qui est le produit pour le problème de Mumford-Shah pour lequel le contact est perpendiculaire).

**Conclusion :** Une fois obtenue la classification des blow-up, on peut reproduire plusieurs arguments de [23] pour en déduire une étude complète de la régularité, en particulier on montre que tous les blow-up autour d'un même point sont de même type, et on en déduit que l'ensemble des points triples ou terminaux est fini, ce qui permet de conclure. L'étude de la régularité de plus haut degré suit alors l'approche classique d'écrire de la condition d'optimalité.

### 3.3 Perspectives

Dans ce chapitre, on a étudié plusieurs problèmes faisant intervenir une fonctionnelle contenant un terme de périmètre ou de longueur. Dans les deux cas, il serait intéressant d'étudier les versions contraintes. D'une part le problème

$$\min \{ \lambda_k(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^d, P(\Omega) \leq p_0, |\Omega| \leq m_0 \}. \quad (3.21)$$

qui a été étudié en particulier dans [200], et d'autre part le problème

$$\min \{ \mathcal{C}(\Sigma), \Sigma \subset \overline{D} \text{ fermé connexe tel que } \mathcal{H}^1(\Sigma) \leq \ell_0 \}, \quad (3.22)$$

qui a été abordé dans [48, 45, 199].

Pour (3.21), la question de la régularité est complètement ouverte à notre connaissance, et la question de l'existence n'est résolue que pour certaines valeurs de  $(p_0, m_0)$ . Pour le problème (3.22), avec A. Lemenant, nous avons obtenu des résultats partiels, et nous avons bon espoir de pouvoir adapter les stratégies décrites dans ce chapitre sous réserve que le multiplicateur de Lagrange pour (3.22) (qui est toujours bien défini) soit non nul. Sous certaines conditions géométriques, on peut montrer que c'est le cas, par exemple s'il existe un point terminal, ou si on sait a priori que l'optimum est régulier sur le voisinage d'au moins un point (on peut alors utiliser la condition d'optimalité d'ordre 2 qui montre que le multiplicateur ne peut être nul). Il faudra certainement apporter des idées nouvelles afin de traiter le cas général.

# Chapitre 4

## Stabilité en optimisation de forme ([A3,A7])

Dans ce chapitre, on aborde quelques questions liées à la stabilité en optimisation de forme. Etant donné  $J : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur  $\mathcal{A} \subset \{\Omega \text{ ouverts de } \mathbb{R}^d\}$ , si on s'intéresse au problème

$$\min \{J(\Omega), \Omega \in \mathcal{A}\}, \quad (4.1)$$

on peut se poser la question suivante :

*si  $\Omega^* \in \mathcal{A}$  est un ensemble critique satisfaisant une condition de stabilité (c'est-à-dire une condition d'optimalité stricte d'ordre 2), peut-on conclure que  $\Omega^*$  est un minimum local strict au sens*

$$J(\Omega) - J(\Omega^*) \geq cd_1(\Omega, \Omega^*)^2, \quad \text{pour tout } \Omega \in \mathcal{V}(\Omega^*) \quad (4.2)$$

où  $c \in ]0, \infty[$ ,  $d_1$  est une distance sur les ensembles,  $\mathcal{V}(\Omega^*) = \{\Omega, d_2(\Omega, \Omega^*) < \eta\}$  est un voisinage de  $\Omega^*$ , reposant sur une distance  $d_2$  (possiblement différente de  $d_1$ ) ?

### Différentes stratégies :

Durant la dernière décennie, en commençant avec l'article [104], ce type de question a regagné de l'intérêt dans la communauté des inégalités isopérimétriques et de l'optimisation de forme, en particulier 3 différentes méthodes ont été développées dans une littérature assez étendue, afin d'obtenir des inégalités du type (4.2) pour les problèmes les plus classiques du type (4.1) :

- Méthode de symétrisation,
- Méthode de transport optimal,
- Approche par dérivées secondes et principe de sélection.

Par exemple, citons le résultat de stabilité  $L^1$  pour le périmètre : pour tout  $m_0 \in ]0, \infty[$ , il existe  $c \in ]0, \infty[$  tel que

$$P(\Omega) - P(B) \geq cd_{L^1}(\Omega, B)^2, \quad \text{pour tout ensemble mesurable } \Omega \text{ tel que } |\Omega| = m_0, \quad (4.3)$$

où  $B$  est une boule de volume  $m_0$ , et

$$d_{L^1}(\Omega, B) = \inf_{\tau \in \mathbb{R}^d} \frac{|(\Omega - \tau) \Delta B|}{|B|}$$

est connu comme l'asymétrie de Fraenkel, que l'on peut voir comme une distance<sup>1</sup>  $L^1$  à la boule, aux translations près. Pour cet exemple précis<sup>2</sup>, les 3 stratégies précédentes ont été appliquées, respectivement dans [104, 96, 68].

Dans le Paragraphe 4.1, on présente les résultats de [83], où on fait le point sur la méthode de dérivée seconde. On identifie des hypothèses générales sur les fonctionnelles qui amènent à un résultat de stabilité. On simplifie également plusieurs preuves de la littérature malgré ce degré de généralité ; enfin, on applique notre résultat général à de nombreux exemples, certains ayant déjà été traités dans la littérature, d'autres étant nouveaux. Enfin, on teste la légitimité de nos hypothèses en exhibant des contre-exemples.

1. Dans ce chapitre, on utilisera le mot distance sans nécessairement faire référence au concept mathématique de distance.

2. Notons en particulier que dans ce cas le résultat est global (c'est-à-dire  $\eta = \infty$ ) : on peut montrer en effet qu'un résultat local implique un résultat global, voir [104, Lemma 5.1 and Lemma 2.3].

Dans le Paragraphe 4.2, on s'intéresse à un nouveau problème d'optimisation de valeur propre (de type Wentzell), qui à notre connaissance est encore ouvert, et dont on conjecture que la boule est solution. Afin de légitimer cette conjecture, nous prouvons la stabilité (linéaire<sup>3</sup>) de la boule, en dimension 2 et 3.

## 4.1 Approche par dérivées secondes

On précise que cette approche a reçu un intérêt particulier ces dernières années, et une raison pour cela est que dans certains exemples, les autres méthodes semblent ne pas s'appliquer, ou donnent des résultats non optimaux : par exemple dans [105], les auteurs obtiennent un résultat de stabilité  $L^1$  pour l'inégalité de Faber-Krahn, par méthode de symétrisation, mais obtiennent un exposant non optimal dans (4.2). Dans [30], avec l'approche par dérivées secondes, les auteurs obtiennent l'exposant optimal (voir aussi [107]).

### 4.1.1 État de l'art, motivations

#### Quelques remarques préliminaires sur la littérature :

Par exemple dans [201], la terminologie suivante est employée : le fait qu'en un point critique  $x$  la dérivée seconde soit strictement positive est appelé stabilité *linéaire*, et elle implique que  $t \mapsto f(x + ty)$  a un minimum en  $t = 0$  pour chaque  $y$ , alors qu'on appelle stabilité *nonlinéaire* le fait que  $f(x)$  soit inférieur à  $f(z)$  pour tout  $z$  voisin de  $x$ . Il est classique, quand on travaille avec des objets de dimension infinie, que les deux notions ne coïncident pas en général.

Dans le cas des formes, la question a été soulevée dans différents contextes, et il a été parfois considéré à tort que les deux notions coïncidaient trivialement : par exemple, dans le cas des surfaces à courbures moyennes constantes ("CMC") et stables, les auteurs donnent souvent des conditions suffisantes pour que la stabilité linéaire ait lieu, sans vraiment chercher à montrer que cela implique une minimalité locale. Ce fait a été mis en avant par Finn dans [97], et des réponses ont rapidement suivi, par exemple dans [115, 201, 202], même si pour le cas particulier de la boule pour le problème isopérimétrique, la difficulté avait déjà été abordée dans les travaux de Fuglede dans [102]. Dans le contexte des fonctionnelles faisant intervenir des EDP, le problème est soulevé par Descoux dans [91], et une première solution est donnée dans [84, 81].

Une difficulté spécifique de l'approche par dérivation consiste à avoir un cadre de calcul différentiel dans l'ensemble des formes. Cela peut être fait par exemple via les dérivées de forme, mais ceci n'est accessible que pour des déformations raisonnablement régulières de la forme initiale, soit en d'autres mots, pour une distance  $d_2$  assez forte. Cependant, comme cela est montré entre autres dans [1], la stratégie peut mener à des résultats fins avec des distances très faibles (comme par exemple l'asymétrie de Fraenkel), si on la décompose en deux étapes :

- premièrement, à l'aide du cadre différentiel et du fait que  $\Omega^*$  satisfait une condition stricte de second ordre, on prouve un résultat de stabilité (non-linéaire) pour des petites déformations régulières de  $\Omega^*$  ; en d'autres termes, on montre que (4.2) est valable avec  $d_2$  une distance forte (et  $d_1$  est limité par les propriétés de la fonctionnelle  $J$ , et est en générale différente de  $d_2$ , voir plus loin),
- deuxièmement, on déduit de la première étape que (4.2) est valable avec  $d_1$  une distance faible (comme l'asymétrie de Fraenkel) et avec  $d_2 = d_1$ , et ce par une méthode de régularisation (souvent appelée "principe de sélection" dans la littérature). Plus précisément, on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe  $\Omega_n$  une suite qui ne satisfait pas l'inégalité de stabilité (non-linéaire), et on remplace  $\Omega_n$  par une version régularisée  $\Omega_n^*$  (obtenue comme solution d'un problème de minimisation) qui s'avère être une déformation régulière de la forme optimale  $\Omega^*$ , ce qui constitue une contradiction avec la première étape.

Pour la fonctionnelle de périmètre, la première étape remonte à Fuglede [102], et la seconde est inspirée des résultats de [205, 171], mais est complétée dans [68]. Ces deux étapes reposent sur des arguments très différents : en particulier la seconde repose sur une théorie de régularité liée au problème d'optimisation (4.1), en l'occurrence la théorie des quasi-minimiseurs du périmètre si  $J$  contient un terme de ce type, ou la théorie de régularité des frontières libres si  $J$  est principalement régie par une énergie de type EDP (voir [1, 30] respectivement), donc cela repose sur des propriétés très spécifiques de la fonctionnelle  $J$  étudiée. Par contre, comme on cherche à le préciser

---

3. Voir la terminologie du Paragraphe 4.1.1.

dans notre travail, la première étape a un très large champ d'applications, et sera valable sous des hypothèses que nous souhaitons préciser, et qu'on cherche minimales.

*Dans l'article [83], nous décrivons un cadre général pour que la première étape décrite ci-dessus s'applique : alors que ceci a été fait dans différents articles à chaque fois pour des fonctionnelles spécifiques, nous donnons des énoncés généraux, et montrons que ceux-ci s'appliquent à la fois aux exemples déjà traités dans la littérature, et à de nouveaux exemples. Malgré le degré de généralité, nous simplifions plusieurs preuves et stratégies, comme on le décrit au Paragraphe 4.1.3.*

### Voisinage de domaines

Afin de décrire les détails de notre stratégie, on rappelle brièvement deux méthodes classiques pour décrire le voisinage d'un ensemble fixe :

- **Difféomorphismes et dérivées de forme :** on considère qu'un ouvert est voisin de  $\Omega$  s'il est une déformation de  $\Omega$  par un difféomorphisme proche de l'identité. Plus précisément, en considérant un espace de Banach  $\Theta \subset W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ , on considère les formes  $(Id + \theta)(\Omega)$  où  $\|\theta\|_\Theta$  est petit.

On peut en déduire les notions de dérivées de forme, développées par Murat-Simon et Delfour-Zolesio, où l'on s'intéresse aux dérivées en 0 de la fonctionnelle (voir également page 14)

$$\forall \theta \in \Theta, \quad \mathcal{J}_\Omega(\theta) = J[(Id + \theta)(\Omega)].$$

- **Graphes normaux :**

Si on suppose  $\Omega$  de classe  $C^1$  (et  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_{\partial\Omega}$  est le vecteur unitaire normal extérieur), on peut considérer des graphes normaux sur  $\partial\Omega$ , c'est-à-dire les formes  $\Omega_h$  telles que

$$\partial\Omega_h = \{x + h(x)\mathbf{n}(x), x \in \partial\Omega\}, \tag{4.4}$$

où  $h \in \mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}$  est un espace de Banach de fonctions scalaires définies sur  $\partial\Omega$ .

On peut ensuite voir  $\tilde{d}_\mathcal{B}(\Omega, \Omega_h) := \|h\|_\mathcal{B}$  comme une mesure de la distance entre  $\Omega_h$  et  $\Omega$  (même si ça n'est pas formellement une distance), et on peut également définir des dérivées dans ce cadre, puisque  $j_\Omega(h) := J(\Omega_h)$  est défini sur un voisinage de 0 dans l'espace de Banach  $\mathcal{B}$ . Notons qu'étant donné  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , il y a au plus une fonction  $h$  définie sur  $\partial\Omega_1$  telle que  $\partial\Omega_2 = (\partial\Omega_1)_h$  comme définie à l'équation (4.4), donc on peut définir  $h = h_{\Omega_1, \Omega_2}$  cette fonction, si elle existe.

Remarquons que la seconde description peut paraître plus restrictive, mais si on suppose  $\Omega$  suffisamment régulier les deux méthodes sont équivalentes dans le sens qu'elles décrivent "autant" d'ouverts (pour des choix adaptés de  $\Theta$  et  $\mathcal{B}$ ), voir par exemple [177, Lemme 3.1]. Néanmoins on verra qu'il est parfois important de pouvoir traiter des ensembles qui se décrivent plus naturellement par difféomorphisme. De plus, il n'est pas évident que le calcul de dérivée par la méthode des graphes normaux (dérivées de  $j_\Omega : h \mapsto J(\Omega_h)$ ) est suffisant pour décrire les dérivées de forme (dérivées de  $\mathcal{J}_\Omega : \theta \mapsto J((Id + \theta)(\Omega))$ ), voir le premier point dans le Paragraphe 4.1.2.

Le plus souvent, on souhaitera que les distances entre ouverts prennent en compte une invariance par translation. Ainsi nous définissons

$$d_\mathcal{B}(\Omega_1, \Omega_2) = \inf_{\tau \in \mathbb{R}^d} \|h_{\Omega_1, \Omega_2 + \tau}\|_\mathcal{B} \tag{4.5}$$

où l'infimum est pris parmi les  $\tau$  tels que  $\partial\Omega_2 + \tau$  est un graphe normal sur  $\partial\Omega_1$ . Si cet ensemble est vide, on choisit par convention que  $d_\mathcal{B}(\Omega_1, \Omega_2) = +\infty$ .

### 4.1.2 Théorème principal

Pour simplifier la présentation, nous supposons  $\Omega$  de classe  $C^\infty$ . Nous commençons en définissant deux hypothèses :

- Etant donné  $s \in ]0, 1]$ , on dira que la forme quadratique<sup>4</sup>  $\ell$  sur  $C^\infty(\partial\Omega)$  satisfait la condition  $(\mathbf{C}_{H^s})$  si :

---

4. Dans ce chapitre, on confondra une forme quadratique et sa forme bilinéaire symétrique associée.

( $\mathbf{C}_{H^s}$ ) il existe  $s_1 \in [0, s[$ , et  $c_1 > 0$  tels que  $\ell = \ell_m + \ell_r$  avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \ell_m \text{ est une forme quadratique semi-continue inférieurement sur } H^s(\partial\Omega) \\ \text{et } \forall \varphi \in C^\infty(\partial\Omega), \ell_m(\varphi, \varphi) \geq c_1 |\varphi|_{H^s(\partial\Omega)}^2, \\ \ell_r \text{ est une forme quadratique continue sur } H^{s_1}(\partial\Omega). \end{array} \right.$$

– Etant donné  $s \in [0, 1]$  et  $\mathcal{B} \subset W^{1,\infty}(\partial\Omega)$  un espace de Banach, on dira que  $J$  satisfait ( $\mathbf{IC}_{H^s, \mathcal{B}}$ )<sup>5</sup> en  $\Omega$  si :  
 ( $\mathbf{IC}_{H^s, \mathcal{B}}$ ) il existe  $\eta > 0$  et  $\omega$  un module de continuité tels que pour tout ouvert<sup>6</sup>  $\Omega_h$  avec  $\|h\|_{\mathcal{B}} \leq \eta$ , la fonction  $j : t \in [0, 1] \mapsto J(\Omega_{th})$  est de classe  $C^2$  et satisfait

$$\forall t \in [0, 1], \quad |j''(t) - j''(0)| \leq \omega(\|h\|_{\mathcal{B}}) \|h\|_{H^s}^2.$$

**Théorème 4.1** Soit  $\Omega^*$  un ouvert de classe  $C^\infty$ , et  $J$  une fonctionnelle de forme, invariante par translation et telle que  $\mathcal{J}_{\Omega^*}$  est  $C^2$  sur un voisinage de 0 dans  $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ . On pose  $\ell_1 = \ell_1^J(\Omega^*)$  et  $\ell_2 = \ell_2^J(\Omega^*)$  les dérivées premières et secondes de forme de  $J$  en  $\Omega^*$  (voir Page 14 et (4.8)), et on suppose que  $\ell_2$  satisfait ( $\mathbf{C}_{H^s}$ ) et que  $J$  satisfait ( $\mathbf{IC}_{H^s, \mathcal{B}}$ ) en  $\Omega^*$ , pour  $s \in ]0, 1]$  et  $\mathcal{B}$  un espace de Banach tel que  $C^\infty(\partial\Omega^*) \subset \mathcal{B} \subset W^{1,\infty}(\partial\Omega^*)$ . On suppose qu'il existe  $\mu \in \mathbb{R}$  tel que<sup>7</sup>

$$\ell_1^J(\Omega^*) = \mu \ell_1^{\text{Vol}}(\Omega^*), \quad \text{et} \quad \ell_2^J(\Omega^*) - \mu \ell_2^{\text{Vol}}(\Omega^*) > 0 \text{ sur } T(\partial\Omega^*) \setminus \{0\}$$

$$\text{où } T(\partial\Omega^*) := \left\{ \varphi \in H^s(\partial\Omega^*), \int_{\partial\Omega^*} \varphi = 0 \text{ et } \int_{\partial\Omega^*} \varphi \vec{x} = \vec{0} \right\}. \quad (4.6)$$

Alors il existe  $\eta > 0$  et  $c = c(\eta) > 0$  tels que :

$$\forall \Omega \text{ tel que } d_{\mathcal{B}}(\Omega, \Omega^*) \leq \eta \text{ et } |\Omega| = |\Omega^*|, \quad J(\Omega) \geq J(\Omega^*) + c d_{H^s}(\Omega, \Omega^*)^2,$$

où  $d_{\mathcal{B}}, d_{H^s}$  sont définis en (4.5).

La condition (4.6) consiste à dire que la forme  $\Omega^*$  satisfait les conditions d'ordre 1 et 2 (stricte) pour le problème d'optimisation

$$\min \{J(\Omega), \quad |\Omega| = m_0\}$$

dans le cas d'une fonctionnelle  $J$  invariante par translation. On explique au Paragraphe 4.1.3 pourquoi ce sont  $\ell_1, \ell_2$  qui interviennent plutôt que  $J'(\Omega^*), J''(\Omega^*)$ ; ici  $T(\partial\Omega^*)$  peut être vu comme l'espace tangent à la contrainte de volume et à l'invariance par translation, et  $\mu$  est un multiplicateur de Lagrange : rappelons en effet que (on note  $\text{Bar}(\Omega) = \int_{\Omega} \vec{x}$  le barycentre de  $\Omega$ ) :

$$\ell_1^{\text{Vol}}(\Omega) \cdot \varphi = \int_{\partial\Omega} \varphi, \quad \ell_2^{\text{Vol}}(\Omega) \cdot \varphi = \int_{\partial\Omega} H_{\partial\Omega} \varphi^2, \quad \ell_1^{\text{Bar}}(\Omega) \cdot \varphi = \int_{\partial\Omega} \varphi \vec{x}.$$

Le Théorème donne des conditions suffisantes sur  $J$  pour que (4.6) implique que  $\Omega^*$  est un minimum local dans un voisinage en norme  $\mathcal{B}$ . Ce résultat a été montré pour différents cas particuliers de fonctionnelles  $J$ ; nous retrouverons ces exemples et en apporterons des nouveaux au Paragraphe 4.1.4. Précisons que malgré le degré de généralité, nous avons simplifié de nombreuses preuves, comme on l'explique au Paragraphe 4.1.3.

Afin de tester les hypothèses et la conclusion du Théorème, nous montrons d'une part qu'on ne peut pas en général obtenir une optimalité locale dans des voisinages faibles, voir (4.9), d'autre part que si  $J$  ne satisfait pas ( $\mathbf{C}_{H^s}$ ), il existe des domaines critiques stables (i.e. qui satisfont (4.6)) mais qui ne sont pas des minima locaux, même dans un voisinage fort, voir [83].

Si on considère un problème d'optimisation sans contrainte de volume et si  $J$  n'est pas invariante par translation, on peut obtenir un résultat similaire (et plus simple, voir [83]), et (4.6) est remplacé par

$$\ell_1^J(\Omega^*) = 0 \text{ et } \ell_2^J(\Omega^*) > 0 \text{ sur } H^s(\partial\Omega^*) \setminus \{0\}, \quad (4.7)$$

On verra à la fin du Paragraphe 4.1.3 que par une méthode de pénalisation exacte, on peut ramener le cas du Théorème 4.1 à ce cas plus simple.

5. Pour "Improved Continuity"

6. défini via (4.4).

7.  $\ell$  étant une forme quadratique,  $\ell > 0$  sur  $X$  signifie  $\ell(\varphi, \varphi) > 0$  pour tout  $\varphi \in X \setminus \{0\}$ .



### 4.1.3 À Propos de la preuve du Théorème 4.1, résultats intermédiaires

**Structure des dérivées de forme :** La méthode de différentiation par difféomorphisme rappelée au Paragraphe 4.1.1 est très bien adaptée pour la plupart des fonctionnelles de forme, qui sont régulières dans cette paramétrisation, et le calcul des dérivées au sens des graphes en est un cas particulier. Néanmoins, le principal désavantage est qu'en ayant affaire à des domaines, il y a beaucoup d'invariances pour la fonctionnelle  $\mathcal{J}_\Omega$  (par exemple, tout difféomorphisme non-trivial qui laisse  $\Omega$  invariant (au premier, second ordre) doit amener à des dérivées nulles). Ainsi il est inadapté d'imaginer une condition de stabilité de la forme  $J''(\Omega^*).(\xi, \xi) > 0$  pour  $\xi \in \Theta \setminus \{0\}$ . Cette difficulté remonte aux travaux de Hadamard, qui observait (dans des cas particuliers) que le gradient de forme est une distribution portée par le bord du domaine, agissant seulement sur la composante normale de la déformation ; pour les dérivées d'ordre 2, un résultat similaire a été obtenu dans [177], voir (0.11), qui donne en particulier

$$\forall \xi \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d), \quad J''(\Omega).(\xi, \xi) = \ell_2(\xi \cdot \mathbf{n}, \xi \cdot \mathbf{n}) + \ell_1(Z_\xi) \quad \text{où } Z_\xi = \mathbf{B}_{\partial\Omega}(\xi_\tau, \xi_\tau) - 2\nabla_\tau(\xi \cdot \mathbf{n}) \cdot \xi_\tau. \quad (4.8)$$

Pour cette raison, il est naturel de considérer (4.6) ou (4.7) comme conditions d'ordre 1 et 2 pour l'optimalité.

*Même si ce résultat est déjà montré dans [177], nous donnons dans [83] une nouvelle preuve de (4.8), un peu moins technique, et simplement basée sur l'observation qu'une déformation tangente au bord a un flot qui laisse invariant le domaine.*

Même si on pourrait penser que ce résultat ne sera utile que pour des domaines critiques, on verra qu'il n'en est rien, car dans l'étape de preuve du résultat de stabilité, on aura recours à une formule de Taylor qui fait intervenir les dérivées secondes de forme en des domaines non critiques.

**Sur l'hypothèse de coercivité :** Comme on l'a déjà remarqué plus tôt, du fait qu'on travaille dans un cadre de calcul différentiel en dimension infinie, l'hypothèse de stricte positivité de la dérivée seconde n'est pas toujours suffisante pour obtenir une optimalité locale. L'hypothèse  $(\mathbf{C}_{H^s})$  permet de corriger ce problème. En effet, on montre que si  $\ell$  satisfait  $(\mathbf{C}_{H^s})$ , alors

$$\ell > 0 \text{ sur } H^s(\partial\Omega) \setminus \{0\} \Leftrightarrow \exists \lambda > 0, \quad \forall \varphi \in H^s(\partial\Omega), \quad \ell(\varphi, \varphi) \geq \lambda \|\varphi\|_{H^s(\partial\Omega)}^2.$$

Notons que le choix de la distance  $d_1$  dans (4.2) est limité par cette propriété de coercivité ; en d'autres termes, on ne peut pas espérer que (4.2) soit valide pour une distance  $d_1$  plus forte que  $d_{H^s}$  (voir aussi [102] où une borne supérieure du déficit isopérimétrique est donnée, dans un voisinage régulier). Par le calcul, on observe que la fonction périmètre satisfait  $(\mathbf{C}_{H^1})$ , et que  $E_f$  satisfait  $(\mathbf{C}_{H^{1/2}})$ . Pour un résultat intéressant sur le choix possible de  $d_1$  dans un cadre non-régulier, voir [103] où les auteurs obtiennent une version améliorée de (4.3) où  $d_1$  est une distance plus forte que l'asymétrie de Fraenkel (voir aussi [175] pour le cas anisotrope).

#### Stabilité et différence de normes :

Plaçons-nous d'abord pour simplifier dans la situation sans contrainte de volume ni invariance par translation, difficultés qui seront traitées au point suivant. Ainsi, supposons que  $\Omega^*$  satisfait (4.7). Avec l'étape précédente, on a obtenu une propriété de coercivité. Par la formule de Taylor dans l'espace de différentiabilité  $\Theta$ , on peut écrire :

$$J((Id + \theta)(\Omega^*)) - J(\Omega^*) = \frac{1}{2} \ell_2(\theta \cdot \mathbf{n}, \theta \cdot \mathbf{n}) + o(\|\theta\|_\Theta^2),$$

ce qui amène deux difficultés :

- le reste dépend a priori de la norme complète de  $\theta$ , alors que le second terme est contrôlé seulement par la norme de  $\theta \cdot \mathbf{n}$ ,
- la norme de différentiabilité  $\Theta$  est dans la plupart des cas plus forte que la norme de coercivité donnée à l'étape précédente, à savoir  $H^s(\partial\Omega)$ ,

il est donc a priori impossible de contrôler le signe du terme  $\frac{1}{2} \ell_2(\theta \cdot \mathbf{n}, \theta \cdot \mathbf{n}) + o(\|\theta\|_\Theta^2)$ . Pour résoudre le premier point, on peut ne considérer que des déformations normales. Le second problème est plus sérieux : dans la littérature, il a été observé d'abord pour la minimisation du périmètre qui est naturellement différentiable dans  $W^{1,\infty}$  alors que la coercivité a lieu seulement en la norme  $H^1$  ; cette remarque se trouve dans Fuglede [102] qui s'intéresse à l'inégalité

isopérimétrique, et dans [115, Proof of Theorem 6], [22, Equation 3.23], [205, Equation (1)] qui étudient la stabilité des surfaces CMC. Plusieurs exemples géométriques similaires ont été traités, voir par exemple [88, 94, 19, 175].

Dans le contexte spécifique de l'optimisation de forme faisant intervenir des EDP, la situation est beaucoup plus délicate que pour des fonctionnelles géométriques, car il est bien plus difficile d'écrire le terme de reste. C'est l'hypothèse  $(\mathbf{IC}_{H^s, \mathcal{B}})$ , attestant d'une continuité améliorée de  $j''$ , qui permet de résoudre le problème. En effet, elle permet de montrer

$$J(\Omega_h^*) - J(\Omega^*) = \frac{1}{2} \ell_2(h, h) + \int_0^1 [j''(t) - j''(0)](1-t) dt \geq \frac{1}{2} \ell_2(h, h) + \omega(\|h\|_{\Theta}) \|h\|_{H^s}^2,$$

et avec la coercivité en norme  $H^s$  du terme  $\ell_2(h, h)$ , il est désormais possible d'étudier le signe de ce terme.

Pour appliquer cette stratégie à des exemples concrets, nous montrons que  $P$  satisfait  $(\mathbf{IC}_{H^1, W^{1, \infty}})$  (autour de tout domaine). Dans [84, 81] les auteurs étudient des fonctionnelles du type  $E_f$ , et montrent un résultat comparable à la condition  $(\mathbf{IC}_{H^{1/2}, C^{2, \alpha}})$ ; dans [1], les auteurs étudient la fonctionnelle  $J(\Omega) = P_{\mathbb{T}^N}(\Omega) + \gamma G(\Omega)$  où  $\gamma > 0$  et

$$G(\Omega) = \int_{\mathbb{T}^N} |\nabla w_{\Omega}|^2 dx \text{ et } w_{\Omega} \text{ est solution de } \begin{cases} -\Delta w_{\Omega} & = \mathbb{1}_{\Omega} - \mathbb{1}_{\Omega^c} - (|\Omega| - |\Omega^c|) & \text{dans } \mathbb{T}^N \\ \int_{\mathbb{T}^N} w_{\Omega} dx & = 0 \end{cases}$$

Ils montrent un résultat comparable à la condition  $(\mathbf{IC}_{H^1, W^{2, p}})$  pour  $p$  assez grand.

*On montre que le choix d'espaces  $W^{2, p}$  pour des fonctionnelles de type  $E_f$  est également possible, améliorant ainsi les résultats de [84, 81]. Nos calculs sont également simplifiés par rapport aux références citées car on ne fait l'estimation que pour le chemin  $t \mapsto \Omega_{th}$ , alors que dans [84, 81, 1] les auteurs étudient un chemin plus élaboré préservant le volume, ce qui ajoute de nombreuses difficultés techniques. Le point suivant explique comment on peut se passer de cette complication et se contenter du chemin  $t \mapsto \Omega_{th}$ .*

Ces améliorations sur les espaces fonctionnels ne constituent pas juste un détail technique : dans [1] en effet, ce choix d'espace  $W^{2, p}$  plutôt que  $C^{2, \alpha}$  s'avère important dans la suite de la stratégie, quand on cherche à obtenir une stabilité dans un voisinage  $L^1$  ([1, Section 4]). En effet la procédure de régularisation nécessite de permettre des discontinuités pour la courbure moyenne, voir l'équation (4.9) dans la preuve de [1, Theorem 4.3]. Cette difficulté est gérée différemment cependant dans [30] pour l'inégalité de Faber-Krahn quantitative : les auteurs montrent qu'une stabilité  $C^{2, \alpha}$  est suffisante si on adapte la procédure de régularisation.

**Contraintes et invariance :** comme dans le problème isopérimétrique, on doit souvent prendre en compte deux difficultés supplémentaires : l'invariance par translation de la fonctionnelle, et la contrainte de volume dans le problème d'optimisation. Ainsi, on ne peut pas espérer que (4.7) soit satisfaite, et on la remplace par (4.6) qui fait intervenir le Lagrangien. Comme on l'a évoqué précédemment, dans [84, 81, 1] les auteurs construisent un chemin presque normal qui préserve le volume, et afin de gérer le problème des normes du points précédents, ils montrent une estimation du type  $(\mathbf{IC}_{H^s, \mathcal{B}})$  pour ce chemin plus élaboré ; l'invariance par translation présente dans [1] ajoute également des difficultés techniques.

*Inspiré par la stratégie de [115] qui gère la contrainte de volume pour les surfaces minimisantes, on simplifie drastiquement les présentations de [84, 81, 1] en utilisant une méthode de pénalisation exacte. Plus précisément, on montre que sous la condition  $(\mathbf{C}_{H^s})$  de  $\ell_2^J(\Omega^*)$ , la condition d'optimalité contrainte (4.6) implique une condition d'optimalité sans contrainte (4.7) en remplaçant  $J$  par*

$$J_{\mu, \Lambda} = J - \mu \text{Vol} + \Lambda (\text{Vol} - m_0)^2 + \Lambda \|\text{Bar} - \text{Bar}(\Omega^*)\|^2,$$

où  $\mu$  est le multiplicateur de Lagrange et  $\Lambda \in ]0, \infty[$  est assez grand. On peut donc appliquer le résultat de stabilité sans contrainte/invariance à  $J_{\mu, \Lambda}$ , et ceci implique clairement la minimalité locale sous contrainte, ce qui conclut la preuve du Théorème 4.1.  $\square$

Au regard des preuves, il est facile de voir que la méthode décrite ici est générale, et qu'elle peut s'appliquer à bien d'autres situations, en terme de contraintes ou d'invariance.

#### 4.1.4 Applications

Donons quelques applications du Théorème 4.1 :

- Nous montrons que notre résultat s'applique à des exemples déjà traités dans la littérature. Une fois le cadre général établi, il reste à calculer les dérivées premières et secondes, étudier le signe de la dérivée seconde pour le domaine considéré (la boule par exemple), et montrer les conditions  $(\mathbf{C}_{H^s})$  et  $(\mathbf{IC}_{H^s, B})$ . Ceci inclut les exemples de [102, 84, 81, 1, 30], voir [83, Section 4].
- Ensuite, on améliore le résultat de [176] où une stabilité linéaire est démontrée, et nous montrons un résultat de stabilité non-linéaire, ce qui revient à obtenir un voisinage uniforme (alors que dans le cas de stabilité linéaire, on obtient un voisinage qui dépend de la direction de déformation).
- On fournit aussi de nouveaux exemples, dont un cas générique est le suivant : si  $\Omega^* = B$  est une boule de volume  $m_0 \in ]0, \infty[$ , alors les conditions du Théorème 4.1 sont satisfaites pour la fonctionnelle  $J = P + \gamma E_1$  tant que  $\gamma > \gamma_0$  avec  $\gamma_0 \in (-\infty, 0)$  (dont on peut calculer la valeur optimale), et on peut donc conclure que la boule est un minimiseur local dans un voisinage régulier ( $W^{2,p}$  pour  $p$  assez grand) du problème d'optimisation suivant :

$$\min \{P(\Omega) + \gamma E_1(\Omega), \quad |\Omega| = m_0\}. \quad (4.9)$$

En d'autres termes, (4.2) est valide pour  $J = P + \gamma E_1$ ,  $d_1$  la distance  $H^1$ , et  $d_2 = d_{W^{2,p}}$  pour  $p$  assez grand. Si  $\gamma \geq 0$  ce résultat n'est pas surprenant, puisque la boule minimise à la fois  $P$  et  $E_1$ . Mais le résultat devient plus intéressant si  $\gamma < 0$ , car il y a une compétition entre le fait de minimiser le périmètre et maximiser l'énergie de Dirichlet. Une autre façon d'énoncer ce résultat revient à écrire pour tout  $\gamma \in ]\gamma_0, 0[$  :

$$\frac{P(\Omega) - P(B)}{E_1(\Omega) - E_1(B)} \geq |\gamma|, \quad \forall \Omega \in \mathcal{V}(B),$$

où  $\mathcal{V}(B) = \{\Omega, d_{W^{2,p}}(\Omega, B) < \eta\}$ , pour un certain  $\eta = \eta(\gamma) > 0$ .

Cet exemple permet de remarquer que la minimalité locale de  $\Omega^*$  n'est plus valide en général si on considère des voisinages de  $\Omega^*$  pour une norme faible, par exemple la norme  $L^1$  ; on construit en effet un ouvert<sup>8</sup> proche en distance  $L^1$  de la boule et dont l'énergie  $P + \gamma E_1$  est strictement inférieure à celle de la boule (si  $\gamma < 0$ ). Ceci montre que la deuxième étape de la stratégie évoquée au Paragraphe 4.1.1 ne fonctionne plus en général, même pour des fonctionnelles qui consistent à minimiser le périmètre. Pour un problème similaire à (4.9) avec  $\gamma < 0$ , on rappelle le problème (2.3) évoqué au Chapitre 2, et on renvoie à [110], qui traite du problème en l'absence de contrainte de convexité.

## 4.2 Optimisation de la valeur propre Wentzell

Ce Paragraphe résume les résultats de [82].

### 4.2.1 Introduction, conjecture

Pour  $d \geq 2$  et  $\Omega$  un ouvert connexe borné de  $\mathbb{R}^d$  suffisamment régulier, on note  $\Delta_\tau$  l'opérateur de Laplace-Beltrami sur  $\partial\Omega$ . On considère le problème aux valeurs propres de type Wentzell suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ -\beta \Delta_\tau u + \partial_n u = \lambda u & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.10)$$

où  $\beta \in \mathbb{R}_+$ . Le coefficient  $\beta$  apparaît comme un terme de diffusion surfacique lors d'un passage de couche limite motivé par des conditions de bord de type impédance, voir [159, 12, 117].

Ce problème peut être vu comme une interpolation du problème de valeur propre de Steklov de  $\Omega$  et le problème de Laplace-Beltrami sur  $\partial\Omega$ . Rappelons quelques faits classiques sur ces deux problèmes avant de décrire le problème général. Le problème aux valeurs propres de **Steklov** consiste à résoudre

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_n u = \lambda^S u & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

8. Cet ouvert est une version homothétique de la boule  $B$  privée d'une boule de petit rayon ; cela revient à une dérivée topologique.

Ce problème a un spectre discret  $\lambda_0^S(\Omega) = 0 < \lambda_1^S(\Omega) \leq \lambda_2^S(\Omega) \dots \rightarrow +\infty$ , qu'on appelle valeurs propres de Steklov, et cela correspond au cas  $\beta = 0$ . L'inégalité de Brock-Weinstock affirme que  $\lambda_1^S$  est maximal pour la boule, parmi les ouverts de volume fixé. Cela a été d'abord montré par Weinstock dans le cas  $d = 2$  et étendu par Brock en toute dimension [34] (plus précisément, l'inégalité de Weinstock est meilleure (car sous contrainte de périmètre) mais restreinte aux ouverts simplement connexes, alors que l'inégalité de Brock vaut pour tout domaine régulier).

De même le spectre de l'opérateur de **Laplace-Beltrami** sur  $\partial\Omega$ , c'est-à-dire les nombres  $\lambda$  tels que l'équation  $-\Delta_\tau u = \lambda u$  sur  $\partial\Omega$  a des solutions non-triviales, est discret et satisfait  $\lambda_0^{LB}(\partial\Omega) = 0 < \lambda_1^{LB}(\partial\Omega) \leq \lambda_2^{LB}(\partial\Omega) \dots \rightarrow +\infty$ . On peut alors se demander si  $\lambda_1^{LB}$  est maximal pour la sphère (euclidienne), parmi les hypersurfaces de volume  $(d-1)$ -dimensional fixé<sup>9</sup>. Ici la réponse est plus élaborée que pour le problème de Steklov : cela dépend à la fois de la topologie et de la dimension. Dans [122], Hersch donne une réponse positive si  $d = 3$  pour des surfaces homéomorphes à la sphère. Dans le cas  $d > 3$  ou sans condition topologique, la réponse est négative, voir [17, 69, 70]. Ce cas correspond au cas extrême  $\beta = +\infty$ .

Pour le cas général  $\beta \geq 0$ , le **spectre du Laplacien avec conditions de Wentzell** est une suite croissante de valeurs propres

$$\lambda_{0,\beta}(\Omega) = 0 < \lambda_{1,\beta}(\Omega) \leq \lambda_{2,\beta}(\Omega) \dots \rightarrow +\infty$$

associée à une base orthonormée (dans  $L^2(\partial\Omega)$ ) de vecteurs propres  $u_0, u_1, u_2, \dots$ . Comme dans les cas précédents, la première valeur propre nulle correspond aux fonctions propres constantes, on s'intéresse donc à  $\lambda_{1,\beta}$  et on va chercher à l'estimer. On peut avoir une caractérisation variationnelle, en introduisant l'espace de Hilbert  $H(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), \text{Tr}_{\partial\Omega}(u) \in H^1(\partial\Omega)\}$ , où  $\text{Tr}_{\partial\Omega}$  est l'opérateur de trace :

$$\lambda_{k,\beta}(\Omega) = \min \left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \beta \int_{\partial\Omega} |\nabla_\tau v|^2 d\sigma}{\int_\Omega v^2}, v \in H(\Omega), \int_{\partial\Omega} v u_i = 0, i = 0, \dots, k-1 \right\}$$

où  $\nabla_\tau$  est le gradient tangentiel. En particulier, si  $k = 1$ , le minimum est pris parmi toutes les fonctions de moyenne nulle sur  $\partial\Omega$ . Remarquons que l'on peut voir ces valeurs propres comme celles de l'opérateur  $-\beta\Delta_\tau + \mathcal{D}$  sur  $\partial\Omega$ , où  $\mathcal{D}$  est l'opérateur de Dirichlet-à-Neumann, opérateur pseudo-différentiel autoadjoint et positif d'ordre 1.

Pour la question d'estimer  $\lambda_{1,\beta}$  par en dessous, remarquons que

$$\inf \{ \lambda_{1,\beta}(\Omega), \Omega \text{ convexe}, |\Omega| = m_0 \} = 0$$

pour tout  $\beta \geq 0$  et  $m_0 \in ]0, +\infty[$  : ceci est une conséquence du Théorème 4.2 ci-dessous (en dimension  $d = 2$  par exemple, des stades qui s'applatissent fournissent une suite minimisante). Ainsi, nous nous concentrons sur la recherche d'une borne supérieure. Comme souvent dans l'analyse des valeurs propres de domaines, il est naturel de proposer la conjecture suivante :

**Conjecture :** la boule maximise la première valeur propre non-triviale de l'opérateur de Wentzell-Laplace parmi les ouverts réguliers de volume donné et qui sont homéomorphes à la boule.

Au vu des cas extrêmes  $\beta = 0$  et  $\beta = +\infty$ <sup>10</sup>, on peut penser que la conjecture est valide si  $d \in \{2, 3\}$ . Le cas  $d \geq 4$  est moins clair, puisque dans le cas  $\beta = 0$ , la boule est bien un maximiseur, mais dans le cas  $\beta = +\infty$ , la question semble ouverte à notre connaissance.

## 4.2.2 Nouveaux résultats

Notre premier résultat consiste à appliquer la stratégie de F. Brock du problème de Steklov pour le problème de Wentzell ; on obtient ainsi des bornes supérieures de  $\lambda_{1,\beta}(\Omega)$  en termes purement géométriques :

**Théorème 4.2** Soit  $\Omega$  un ouvert régulier convexe tel que  $\int_{\partial\Omega} x = 0$ , et  $\Lambda[\Omega]$  le rayon spectral de la matrice symétrique semi-définie positive  $P(\Omega) = (p_{ij})_{i,j=1,\dots,d}$  définie par

$$p_{ij} = \int_{\partial\Omega} (\delta_{ij} - n_i n_j),$$

9. Il est ici plus naturel d'avoir une contrainte sur la surface de  $\partial\Omega$  que sur le volume de  $\Omega$ .

10. Du fait que la boule maximise  $\lambda_1^{LB}$  parmi les ouverts de  $\mathbb{R}^3$  de périmètre donné, en combinant avec l'inégalité isopérimétrique, elle maximise aussi  $\lambda_1^{LB}$  parmi les ouverts de volume donné.

où  $\mathbf{n} = (n_i) = \mathbf{n}_{\partial\Omega}$ . Alors si  $\beta \geq 0$ , on a :

$$\sum_{i=1}^d \frac{1}{\lambda_{i,\beta}(\Omega)} \geq \frac{\int_{\partial\Omega} |x|^2}{|\Omega| + \beta\Lambda[\Omega]} \geq \frac{d\omega_d^{-1/d} |\Omega|^{\frac{d+1}{d}}}{|\Omega| + \beta\Lambda[\Omega]} \quad (4.11)$$

où  $\omega_d = |B_1|$  et  $B$  est la boule de volume  $|\Omega|$  centrée en 0. Il y a égalité dans (4.11) si  $\Omega$  est une boule.

Ce résultat fournit la borne supérieure suivante :

$$\lambda_{1,\beta}(\Omega) \leq d \frac{|\Omega| + \beta\Lambda[\Omega]}{\int_{\partial\Omega} |x|^2}.$$

et on aurait démontré la conjecture si la boule maximisait ce majorant, sous contrainte de volume, comme c'est le cas si  $\beta = 0$ . Malheureusement, on observe que le numérateur et le dénominateur dans cette estimation sont tous les deux minimisés par la boule (voir [82, Lemma 2.4]). En fait on observe numériquement que la boule ne maximise pas cette borne en général, voir [82, Section 2.3].

**A propos de la preuve du Théorème 4.2 :** On utilise la formulation variationnelle de  $\sum_{i=1}^d \frac{1}{\lambda_{i,\beta}(\Omega)}$  issue de [123], et on construit une famille de fonctions tests  $(w_i)_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket}$  obtenues comme combinaisons linéaires des fonctions coordonnées. On montre qu'un tel choix est possible, et donne la première inégalité dans (4.11). L'inégalité suivante est une conséquence de l'inégalité isopérimétrique à poids issue de [14].  $\square$

Afin de tester la conjecture du paragraphe précédent, on cherche donc à voir si la boule est un domaine critique stable de  $\lambda_{1,\beta}$ . On montre que c'est le cas si  $d \in \{2, 3\}$  :

**Théorème 4.3** *Soit  $B$  est une boule de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ , et  $t \mapsto T_t \in W^{3,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  est une déformation préservant le volume. Alors*

$$\lambda_{1,\beta}(B) \geq \lambda_{1,\beta}(T_t(B)), \quad \text{pour } t \text{ assez petit.}$$

Ce théorème est une conséquence directe des Propositions 4.2 et 4.3 que l'on décrit au paragraphe suivant. Notons que pour la plupart des déformations, le résultat est valable en toute dimension  $d$ , car repose seulement sur la Proposition 4.2, mais l'analyse de certaines déformations est plus délicate, et on ne les a traitées que pour  $d \in \{2, 3\}$  dans la Proposition 4.3.

### 4.2.3 Dérivation de $\lambda_{1,\beta}$ et preuve du Théorème 4.3

On procède en 3 étapes : on établit d'abord la régularité de la fonction  $\lambda_{1,\beta}$ , on montre que la boule est un point critique, et enfin on étudie le signe de la dérivée d'ordre 2, quand celle-ci est bien définie.

**Régularité :** Une difficulté majeure est que la valeur propre en la boule est multiple (de multiplicité  $d$ ), et il est classique que cela donne une dépendance irrégulière de  $\lambda_{1,\beta}$  par rapport au domaine. Néanmoins, étant fixé un champ de déformation  $V \in W^{3,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ , on montre que le long du transport de  $\Omega$  par  $T_t = I + tV$ , il existe des branches régulières de valeurs propres. On obtient le résultat suivant :

**Proposition 4.1** *Soit  $\Omega$  un ouvert régulier, et supposons que  $\lambda$  est une valeur propre de Wentzell de  $\Omega$ , d'ordre  $m \geq 1$ . Alors il existe  $m$  fonctions  $(t \mapsto \lambda_{k,\beta}(t))_{k=1,\dots,m}$  définies sur un voisinage de 0 telles que*

- $\lambda_{k,\beta}(0) = \lambda$ ,
- pour tout  $t$  proche de 0,  $\lambda_{k,\beta}(t)$  est une valeur propre de  $\Omega_t = (I + tV)(\Omega)$ ,
- les fonctions  $(t \mapsto \lambda_{k,\beta}(t))_{k=1,\dots,m}$  sont analytiques.

Attention, ici les fonctions  $\lambda_{k,\beta}(t)$  ne sont pas ordonnées. La preuve de ce résultat est assez classique et suit la stratégie de [178]. Pour un énoncé plus précis, on renvoie à [82, Theorem 3.4]; en particulier, il existe également  $t \mapsto u_k(t)$  des fonctions propres associées à  $\lambda_{k,\beta}(t)$ , qui ont des propriétés de régularité par rapport à  $t$ .

**La boule est un point critique :**

**Proposition 4.2** *Toute boule  $B$  est une forme critique pour  $\lambda_{1,\beta}$  sous contrainte de volume, au sens où pour tout champ de déformation  $V$  qui préserve le volume à l'ordre 1,<sup>11</sup>*

$$\sum_{k=1}^d \lambda'_{k,\beta}(0) = 0, \quad (4.12)$$

où  $(t \mapsto \lambda_{k,\beta}(t))_{k=1\dots d}$  sont données par la Proposition 4.1 appliquée à  $B$ .

En conséquence,  $0 \in \partial\lambda_{1,\beta}(B) \cdot V := [\inf_{k=1\dots d} \lambda'_{k,\beta}(0), \sup_{k=1\dots d} \lambda'_{k,\beta}(0)]$ , le sous-différentiel de  $\lambda_{1,\beta}$  en  $B$  dans la direction  $V$ . De plus, le sous-différentiel se réduit à  $\{0\}$  si et seulement si  $V_n := V \cdot \mathbf{n}_{\partial B}$  est orthogonal aux harmoniques sphériques d'ordre 2.

Dans le cas  $\beta = 0$ , on retrouve des éléments observés dans [29, Section 6], où les auteurs étudient le caractère optimal de l'exposant dans la version quantitative de l'inégalité de Brock-Weinstock, et pour cela montraient que si  $V$  est orthogonal aux harmoniques sphériques d'ordre 2, alors la valeur propre de Steklov en la boule était dérivable et de dérivée nulle. Notre résultat généralise au cas  $\beta > 0$ , et démontre également que la condition d'orthogonalité sur  $V$  est nécessaire.

De ce résultat, on déduit que deux situations peuvent se produire, suivant la direction de dérivation  $V$  : soit le sous-différentiel n'est pas réduit à  $\{0\}$  et alors on peut déduire de l'énoncé précédent que  $B$  maximise localement  $\lambda_{1,\beta}$  le long de  $t \mapsto (Id + tV)(B)$ , soit le sous-différentiel dans la direction  $V$  est  $\{0\}$  et alors on ne peut pas conclure avec la dérivée d'ordre 1. Dans ce cas, on a recours à la Proposition 4.3.

**A propos de la preuve de la Proposition 4.2 :** On commence par étudier la dérivée première de forme pour le problème (4.10) en un domaine  $\Omega$ , ce qui généralise des résultats de [90] qui traitent du Laplacien-Beltrami (soit  $\beta = +\infty$ ). Soit  $\lambda$  valeur propre d'ordre  $m \geq 1$  sur  $\Omega$  et  $(u_k)_{k=1,\dots,m}$  les fonctions propres associées. Afin de calculer la dérivée de  $t \mapsto \lambda_{k,\beta}(t)$ , on considère un chemin  $t \mapsto (u(t), \lambda(t))$  régulier et tel que

$$\begin{cases} \Delta u(t, x) = 0 & \text{dans } \Omega_t \\ -\beta \Delta_\tau u(t, x) + \partial_{\mathbf{n}} u(t, x) = \lambda(t) u(t, x) & \text{sur } \partial\Omega_t, \end{cases} \quad (4.13)$$

et on dérive par rapport à  $t$ , ce qui donne<sup>12</sup>

$$\begin{cases} \Delta u' = 0 & \text{dans } \Omega, \\ -\beta \Delta_\tau u' + \partial_{\mathbf{n}} u' - \lambda u' = \beta \Delta_\tau (V_n \partial_{\mathbf{n}} u) - \beta \operatorname{div}_\tau (V_n (2\mathbf{B} - H\operatorname{Id}) \nabla_\tau u) \\ \quad + \operatorname{div}_\tau (V_n \nabla_\tau u) - \lambda'(0) u + \lambda V_n (\partial_{\mathbf{n}} u + H u) & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.14)$$

Ensuite on peut décomposer  $u(0) = \sum_k c_k u_k$ , multiplier par  $u_k$  l'équation (4.14) et on obtient après intégrations par parties

$$\lambda'(0)c = Mc,$$

où  $M$  est la matrice définie par

$$M_{ij} = \int_{\partial\Omega} V_n \left( \nabla_\tau u_i \cdot \nabla_\tau u_j - \partial_{\mathbf{n}} u_i \partial_{\mathbf{n}} u_j - \lambda H u_i u_j + \beta (H\operatorname{Id} - 2\mathbf{B}) \nabla_\tau u_i \cdot \nabla_\tau u_j \right) d\sigma.$$

Ainsi les dérivées de  $t \mapsto \lambda_{k,\beta}(t)$  sont les valeurs propres de cette matrice.

On applique ensuite la formule précédente dans le cas où  $\Omega$  est une boule, qu'on suppose de rayon 1 pour simplifier. Il est classique que  $u_k = \frac{x_k}{\|x_k\|_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})}}$  et on obtient :

$$M_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\omega_d} (1 + \beta(d-3)) \int_{\mathbb{S}^{d-1}} V_n - \frac{d+1}{\omega_d} (1 + \beta(d-2)) \int_{\mathbb{S}^{d-1}} x_i x_j V_n.$$

Si on considère une déformation qui préserve le volume, alors  $\int_{\mathbb{S}^{d-1}} V_n = 0$ ; il est alors facile de calculer la trace de  $M$  et d'obtenir (4.12); on peut aussi déterminer exactement quand cette matrice s'annule, ce qui conclut la preuve.  $\square$

11. Ce qui signifie que  $\int_{\partial B} V \cdot \mathbf{n}_{\partial B} = 0$ .

12. Pour justifier ces calculs, on dérive en fait la formulation variationnelle de (4.13), voir [82, Theorem 3.5].

**La boule est stable :**

**Proposition 4.3** *Soit  $B$  une boule de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$  et  $t \mapsto B_t = T_t(B)$  une déformation préservant le volume à l'ordre 2. Alors il existe  $\mu(= \mu(\beta, d, B))$  tel que si  $V_n = \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} T_t\right) \cdot \mathbf{n}_{\partial B}$  est dans l'espace engendré par les harmoniques sphériques d'ordre supérieur ou égal à 3,<sup>13</sup>*

$$\sum_{k=1}^d \lambda''_{k,\beta}(0) \leq -\mu \int_{\partial B} (|\nabla_\tau V_n|^2 + |V_n|^2) d\sigma = -\mu \|V_n\|_{H^1(\partial B)}^2. \quad (4.15)$$

Pour les calculs à l'ordre 2, il faut dériver une nouvelle fois (4.14), ce qui amène à une très longue étude. Considérons  $B$  la boule unité, et  $t \mapsto T_t = Id + tV(t)$  une déformation préservant le volume : en posant  $V_n = V(0) \cdot \mathbf{n}_{\partial B}$  et  $W = \frac{d}{dt}(V \cdot \mathbf{n}_{\partial B})|_{t=0}$ , on obtient la formulation variationnelle suivante : pour tout  $\phi$  définie et régulière sur  $\partial B$  on a :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{S}^{d-1}} [-\beta \Delta_\tau u'' + \partial_n u'' - \lambda u''] \phi + \beta \int_{\mathbb{S}^{d-1}} [\nabla_\tau [V_n \cdot \partial_n u'] \cdot \nabla_\tau \phi - \Delta_\tau [W \partial_n u] \phi - \operatorname{div}_\tau [V_n \partial_n V_n \nabla_\tau [\partial_n u]] \phi] d\sigma \\ & + \beta \int_{\mathbb{S}^{d-1}} [-\operatorname{div}_\tau [HV_n \nabla_\tau (V_n \partial_n u)] - \operatorname{div}_\tau [\partial_n u \partial_n V_n \nabla_\tau V_n] + \Delta_\tau [V_n \partial_n u \nabla_\tau V_n]] \phi d\sigma \\ & + \beta \int_{\mathbb{S}^{d-1}} [2\operatorname{div}_\tau [V_n \mathbf{B} \cdot \nabla_\tau [V_n \partial_n u]] - \operatorname{div}_\tau [V_n \mathcal{A} \cdot \nabla_\tau u'] - \operatorname{div}_\tau [(W + HV_n^2 + V_n \partial_n V_n) \mathcal{A} \cdot \nabla_\tau u]] \phi d\sigma \\ & + \beta \int_{\mathbb{S}^{d-1}} [-\operatorname{div}_\tau [\partial_n u V_n \mathcal{A} \cdot \nabla_\tau V_n] - \operatorname{div}_\tau [V_n \mathcal{A}' \cdot \nabla_\tau u]] \phi d\sigma + \beta \int_{\mathbb{S}^{d-1}} V_n^2 \partial_n [\mathcal{A} \cdot \nabla_\tau u \cdot \nabla_\tau \phi] d\sigma \\ & + \int_{\mathbb{S}^{d-1}} [-\operatorname{div}_\tau [V_n \nabla_\tau u'] - \operatorname{div}_\tau [(W + HV_n^2 + V_n \partial_n V_n) \nabla_\tau u] + \operatorname{div}_\tau [\partial_n u V_n \nabla_\tau V_n]] \phi d\sigma \\ & + \int_{\mathbb{S}^{d-1}} [\operatorname{div}_\tau [V_n^2 (2\mathbf{B} \nabla_\tau u - \nabla_\tau (\partial_n u))] - 2(\lambda' u' + \lambda V_n (\partial_n u' + H u'))] \phi d\sigma \\ & - \lambda'' \int_{\mathbb{S}^{d-1}} u \phi - \lambda' \int_{\mathbb{S}^{d-1}} V_n \partial_n u \phi d\sigma - \lambda \int_{\mathbb{S}^{d-1}} (W + V_n \partial_n V_n + HV_n^2) (\partial_n u + H u) \phi d\sigma \\ & + \lambda \int_{\mathbb{S}^{d-1}} V_n (\nabla_\tau V_n \cdot \nabla_\tau u + \Delta_\tau V_n u) \phi d\sigma - \lambda \int_{\mathbb{S}^{d-1}} V_n^2 (\partial_n^2 u - u \|\mathbf{B}\|^2 + H \partial_n u) \phi d\sigma = 0 \end{aligned}$$

où  $\mathcal{A}(t) = H(t)Id - 2\mathbf{B}(t)$  (la dépendance en  $t$  fait référence au domaine  $T_t(B)$ , et les valeurs ci-dessus sont prises en  $t = 0$ ). Comme pour la Proposition 4.2, on prendra comme fonctions tests les  $(u_i)_{i=1\dots d}$  une base de vecteurs propres, pour calculer  $\sum_i \lambda''_{i,\beta}(0)$ . Une difficulté supplémentaire est que nous devons calculer  $u'$  (alors que le terme  $u''$  donne un résultat nul), ce que nous faisons en utilisant des décompositions en harmoniques sphériques : pour cela on se restreint à la dimension 2 et 3. Les détails sont présentés dans [82, Appendix C-D, Section 4].

### 4.3 Perspectives

Avec le Théorème 4.1, nous faisons le point sur les hypothèses qui permettent d'obtenir une stabilité non-linéaire. Une possible application est l'étude de la stabilité pour la première valeur propre, ou pour l'énergie de Dirichlet dans le cas de conditions au bord de type Robin. Dans [11], on peut trouver des calculs d'ordre 1 et 2, ainsi qu'une étude du signe de la dérivée seconde dans ce cas. Il reste donc à vérifier les hypothèses  $(\mathbf{C}_{H^s})$  et  $(\mathbf{IC}_{H^s, \mathcal{B}})$  pour des choix judicieux de  $s$  et  $B$ .

Bien sûr, un autre exemple intéressant serait de faire de même pour la fonction valeur propre de Wentzell abordée au Paragraphe 4.2; afin de contourner la difficulté de la non-différentiabilité de  $\lambda_{1,\beta}$ , une nouvelle idée serait de travailler plutôt avec  $S(\Omega) = \sum_{i=1}^d \frac{1}{\lambda_{i,\beta}(\Omega)}$ . En effet, on peut s'attendre naturellement à ce que cette fonction soit différentiable au sens des formes au voisinage de la boule, car c'est une fonction symétrique des valeurs propres; d'ailleurs, les calculs du Paragraphe 4.2.3 s'intéressaient aux traces des matrices de dérivées premières et secondes, qu'on retrouvera naturellement dans le calcul des dérivées de  $S$ . Du fait de l'inégalité (4.15), on sait que  $S$  satisfera l'hypothèse  $(\mathbf{C}_{H^1})$ . Il reste à déterminer un choix d'espace  $\mathcal{B}$  tel que l'hypothèse  $(\mathbf{IC}_{H^1, \mathcal{B}})$  soit satisfaite. Comme les calculs sont très fastidieux, il serait intéressant de commencer par le cas extrême  $\beta = +\infty$  (Laplace-Beltrami); dans ce cas, il est plus naturel de regarder une contrainte sur la mesure surfacique de  $\partial\Omega$ , soit sur le périmètre de  $\Omega$ . Les questions naturelles seraient :

<sup>13</sup>. On considère  $V_n$  orthogonal aux harmoniques d'ordre 0 d'après la contrainte de volume, à celles d'ordre 1 du fait de l'invariance par translation, et à celles d'ordre 2 pour avoir une dérivée d'ordre 1 nulle, voir la Proposition 4.2.

- Peut-on obtenir une inégalité de Hersch quantitative<sup>14</sup>, dans un voisinage régulier ? Si tel est le cas, on pourrait ensuite étudier le principe de sélection pour cette fonctionnelle, ce qui nécessite de comprendre la théorie de la régularité pour ces problèmes, voir dans cette direction [181, 172].
- Peut-on montrer que, même si la boule ne maximise pas  $\lambda_1^{LB}$  en dimension  $d \geq 4$  ([70]), la boule est un maximum local (dans un voisinage régulier) parmi les ouverts de périmètre donné (ou de volume donné) en dimension  $d \geq 4$  ?

Dans la direction de l'inégalité obtenue au Théorème 4.2, qui généralise l'inégalité de Brock (cas  $\beta = 0$ ), il serait intéressant de regarder l'inégalité de Chavel [67] qui traite du cas  $\beta = +\infty$ ; elle est moins précise que l'inégalité de Hersch, mais valable en toute dimension et sans contrainte de géométrie. L'inégalité dit que pour tout  $\Omega$  suffisamment régulier,

$$\lambda_1^{LB}(\partial\Omega) \leq \frac{d-1}{d^2} \frac{P(\Omega)^2}{|\Omega|^2}.$$

Comme la preuve est également basée sur l'utilisation des fonctions coordonnées comme fonctions tests, il est naturel de chercher une inégalité sur  $\lambda_{1,\beta}$  qui généralise à la fois l'inégalité de Brock et l'inégalité de Chavel.

---

14. Rappelons l'inégalité de Hersch : pour tout  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  homéomorphe à la boule,

$$\frac{1}{\lambda_1^{LB}(\partial\Omega)} + \frac{1}{\lambda_2^{LB}(\partial\Omega)} + \frac{1}{\lambda_3^{LB}(\partial\Omega)} \geq \frac{3}{8\pi} P(\Omega).$$

qui implique que la boule maximise  $\lambda_1^{LB}$  parmi les ouverts de périmètre donné et homéomorphes à la boule (et donc d'après l'inégalité isopérimétrique, la même propriété est valable parmi les ouverts de volume donné et homéomorphes à la boule).



# Chapitre 5

## Modèle de dynamique des populations ([A4])

Dans ce chapitre, on décrit les résultats de [148].

### 5.1 Introduction

#### 5.1.1 Le modèle

On s'intéresse ici à l'analyse d'un problème de frontière libre/optimalisation de forme motivé par un modèle de dynamique des populations. La question est de déterminer l'arrangement spatial optimal entre les régions favorables et défavorables pour assurer au mieux la survie d'une espèce. Etant donné  $D$  un ouvert connexe, borné et Lipschitz de  $\mathbb{R}^d$ , il est introduit dans [193] le modèle de diffusion logistique suivant :

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + \omega u[m(x) - u] & \text{dans } D \times \mathbb{R}^+, \\ \partial_{\mathbf{n}} u + \beta u = 0 & \text{sur } \partial D \times \mathbb{R}^+, \\ u(0, x) \geq 0, \quad u(0, x) \not\equiv 0 & \text{dans } \bar{D}, \end{cases} \quad (5.1)$$

où  $u(t, x)$  représente la densité d'une espèce à l'endroit  $x$  au temps  $t$ , et  $\omega, \beta$  sont des paramètres positifs.

Cette équation logistique (5.1) joue un rôle important dans l'étude des effets de dispersion et d'hétérogénéité spatiale en dynamique des populations, voir par exemple [54, 55, 57]. Il est connu qu'il existe un nombre  $\lambda(m)$  tel que si  $\omega \leq \lambda(m)$ , alors  $u(t, x) \rightarrow 0$  uniformément dans  $\bar{D}$  quand  $t \rightarrow \infty$  pour toute donnée initiale positive, c'est-à-dire que l'espèce s'éteint, alors que si  $\omega > \lambda(m)$ ,  $u(t, x) \rightarrow u^*(x)$  uniformément dans  $\bar{D}$  quand  $t \rightarrow \infty$ , où  $u^*$  est l'unique solution positive stationnaire de (5.1), c'est-à-dire que l'espèce survit.

La condition de bord correspond dans le cas  $\beta = 0$  à une condition de Neumann qui modélise le bord comme une barrière 'neutre', c'est-à-dire que tout individu rencontrant la frontière retourne à l'intérieur. Dans le cas  $\beta = +\infty$ , cela correspond à une condition de Dirichlet qui s'interprète comme un bord meurtrier, c'est-à-dire un environnement extérieur très hostile, et tout individu rencontrant le bord décède. Pour les valeurs intermédiaires  $0 < \beta < +\infty$ , on considère le domaine  $D$  entouré par des régions partiellement inhospitalières, et cette inhospitalité grandit avec  $\beta$ . Le poids  $m$  représente le taux de croissance intrinsèque de l'espèce : il est positif dans une zone favorable de l'habitat ( $D_m^+ = \{m > 0\}$ ) et négatif dans une zone défavorable ( $D_m^- = \{m < 0\}$ ). L'intégrale de  $m$  sur  $D$  mesure les ressources totales de l'environnement.

Pour définir  $\lambda(m)$ , on regarde pour tout  $m$  fonction mesurable bornée le problème aux valeurs propres défini dans [99] :

$$\begin{cases} \Delta \varphi + \lambda m \varphi = 0 & \text{dans } D, \\ \partial_{\mathbf{n}} \varphi + \beta \varphi = 0 & \text{sur } \partial D. \end{cases} \quad (5.2)$$

On dit que  $\lambda$  est une valeur principale de (5.2) s'il existe  $\varphi \in H^1(D)$  positive qui satisfait l'équation pour cette valeur  $\lambda$ . L'existence de valeur principale de (5.2) en fonction de  $\beta$  est discuté dans [2, 18] et il est montré que si  $m$  change de signe, on a :

- dans le cas Dirichlet (“ $\beta = +\infty$ ”), il y a exactement deux valeurs propres principales  $\lambda^- < 0 < \lambda^+$ , respectivement associée aux fonctions propres  $\varphi^-$  et  $\varphi^+$  qui satisfont

$$\int_D m(x)\varphi^-(x)^2 dx < 0, \quad \int_D m(x)\varphi^+(x)^2 dx > 0,$$

- le cas  $0 < \beta < +\infty$  a un comportement similaire au cas Dirichlet,
- dans le cas critique  $\beta = 0$ , il y a deux valeurs propres principales, à savoir 0 et  $\lambda$ , respectivement associées aux fonctions propres 1 et  $\varphi$ ; de plus  $\lambda > 0$  si et seulement si  $\int_D m(x)dx < 0$ , auquel cas on a

$$\int_D m(x)\varphi(x)^2 dx > 0.$$

Dans tous les cas où elle existe, on définit  $\lambda(m)$  comme l’unique valeur propre principale positive.

### 5.1.2 Problème d’optimisation

Comme les espèces survivent si et seulement si  $\omega > \lambda(m)$ , on voit que plus  $\lambda(m)$  est petit, plus les chances de survie sont élevées. Dans cet esprit, Cantrell and Cosner posent la question suivante dans [54, 55] :  *parmi les fonctions  $m$ , laquelle donnera la plus petite valeur de  $\lambda(m)$  ?* D’un point de vue biologique, cela revient à déterminer l’arrangement spatial des zones favorables et défavorables de l’environnement pour favoriser la survie de l’espèce. Bien sûr, il faut préciser les contraintes faites sur  $m$ . Le problème d’optimisation s’écrit précisément :

**Arrangement optimal des ressources.** *Etant donné  $D$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\beta \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ ,  $\kappa > 0$  et  $m_0 \in ]-\kappa, 1[$  si  $\beta > 0$  ou  $m_0 \in ]0, 1[$  si  $\beta = 0^1$ , on considère le problème d’optimisation suivant*

$$\min \left\{ \lambda(m), \quad m \in L^\infty(D), \quad -1 \leq m \leq \kappa, \quad |\{m > 0\}| > 0, \quad \int_D m \leq -m_0|D| \right\}. \quad (5.3)$$

Il est bien connu (voir par exemple [124, 162]) que le problème (5.3) a une solution  $m^*$ , et que cette dernière ne prend que 2 valeurs, autrement dit il existe  $E^* \subset D$  mesurable tel que

$$m^* = m_{E^*} \quad \text{où} \quad m_{E^*} = \kappa \mathbb{1}_{E^*} - \mathbb{1}_{D \setminus E^*} \text{ dans } D.$$

De plus, par un simple argument de monotonie sur  $\lambda$  (voir [162, Lemma 2.3]), on a également  $\int_D m_{E^*} = -m_0|D|$ . En d’autres termes, le minimiseur sature à la fois les contraintes ponctuelle et intégrales (ceci se comprend heuristiquement par la structure concave du problème). En conséquence, on est finalement intéressé à un problème d’optimisation de forme :

**Formulation optimisation de forme du problème (5.3).** *Notant  $c = \frac{1-m_0}{\kappa+1} \in ]0, 1[$ , on s’intéresse au problème :*

$$\min \left\{ \lambda(E) := \lambda(\kappa \mathbb{1}_E - \mathbb{1}_{D \setminus E}), \quad E \text{ mesurables et tel que } 0 < |E| \leq c|D| \right\}. \quad (5.4)$$

En conséquence, étant donné  $\beta \geq 0$  et  $\kappa \in ]0, \infty[$ , il est équivalent de considérer le paramètre  $m_0 \in (-\kappa, 1)$  ou le paramètre  $c \in ]0, 1[$  (avec  $c < \frac{1}{\kappa+1}$  si  $\beta = 0^1$ ) et la solution du problème d’optimisation dépend des paramètres  $(\beta, \kappa, m_0)$  ou  $(\beta, \kappa, c)$ , une fois que  $D$  est donné.

Remarquons enfin que  $\lambda(m)$  a une formulation variationnelle : si  $\beta < \infty$ ,

$$\lambda(m) = \min \left\{ \frac{\int_D |\nabla \varphi|^2 + \beta \int_{\partial D} \varphi^2}{\int_D m \varphi^2}, \quad \varphi \in H^1(D), \quad \int_D m \varphi^2 > 0 \right\}.$$

De plus,  $\lambda(m)$  est simple, les fonctions qui réalisent le minimum ci-dessus ne changent pas de signe dans  $\overline{D}$ , et enfin toute fonction propre  $\varphi$  solution de (5.2) qui ne change pas de signe et qui satisfait  $\int_D m \varphi^2 > 0$  est associée à  $\lambda(m)$ .

Dans le cas Dirichlet (on écrira  $\beta = +\infty$ ), on remplace la condition de bord  $\partial_n \varphi + \beta \varphi = 0$  sur  $\partial D$  par  $\varphi = 0$  sur  $\partial D$ , et la formulation variationnelle devient

$$\lambda(m) = \inf \left\{ \frac{\int_D |\nabla \varphi|^2}{\int_D m \varphi^2}, \quad \varphi \in H_0^1(D), \quad \int_D m \varphi^2 > 0 \right\}.$$

1. Cette contrainte permet d’avoir  $\lambda(m)$  strictement positive

### 5.1.3 Modèles similaires et références

**Une formulation équivalente :** Etant donnés  $(\mu_-, \mu_+) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $\mu_- < 0 < \mu_+$  et  $\mu \in L^\infty(D; [\mu_-, \mu_+])$ , le modèle classique de réaction-diffusion pour les environnements homogènes de Fisher [98], Kolmogorov et al. [136] se généralise de la manière suivante :

$$\begin{cases} v_t = \Delta v + v[\mu(x) - \nu(x)v] & \text{dans } D \times \mathbb{R}^+, \\ \partial_n v + \beta v = 0 & \text{sur } \partial D \times \mathbb{R}^+, \\ v(0, x) \geq 0, \quad v(0, x) \not\equiv 0 & \text{dans } \bar{D}, \end{cases}$$

où  $v(t, x)$  représente la densité de population au temps  $t$  et à la position  $x$ . La fonction  $\mu$  représente le taux de croissance intrinsèque de l'espèce alors que la fonction  $\nu$  représente la vulnérabilité aux trop fortes densités et est une fonction de  $L^\infty(D)$  telle que  $\text{essinf} \nu > 0$ .

D'après [13, 185] et de façon similaire au modèle du Paragraphe 5.1.1, une condition nécessaire et suffisante de survie de l'espèce s'écrit  $\gamma(\mu) < 0$ , où  $\gamma(\mu)$  est la valeur propre principale du problème elliptique suivant <sup>2</sup> :

$$\begin{cases} -\Delta \psi = (\mu(x) + \gamma)\psi & \text{dans } D \\ \partial_n \psi + \beta \psi = 0 & \text{sur } \partial D. \end{cases} \quad (5.5)$$

L'unique valeur propre principale positive  $\gamma(m)$  de (5.5) est donnée par

$$\gamma(\mu) = \inf_{\substack{\psi \in H^1(D) \\ \psi \neq 0}} \frac{\int_D |\nabla \psi|^2 - \int_D \mu \psi^2 + \beta \int_{\partial D} \psi^2}{\int_D \psi^2}.$$

Comme précédemment, l'analyse du modèle biologique amène à considérer le problème d'optimisation suivant :

$$\inf \left\{ \gamma(\mu); \mu \in L^\infty(D; [\mu_-, \mu_+]) \text{ tel que } |\{\mu > 0\}| > 0, \text{ et } \int_D \mu \leq -\mu_0 |D| \right\}.$$

où  $\mu_0 \in (\mu_-, \mu_+)$ . A nouveau, les solutions de ce problème prennent deux valeurs,  $\mu_+ \mathbb{1}_{E^*} + \mu_- \mathbb{1}_{D \setminus E^*}$ , et la contrainte de volume est active.

Dans [65] les deux formulations présentées ont été étudiée, et il est montré que les formulations sont équivalentes.

**Modèle de membranes non-homogènes :** Il existe également une littérature vaste sur un problème similaire à (5.3), où on cherche à minimiser la première valeur propre de l'opérateur  $-\frac{1}{m}\Delta$  où  $\Delta$  est le Laplacien-Dirichlet, et où les fonctions  $m$  sont telles que  $a \leq m(\cdot) \leq b$  dans  $D$  avec  $0 < a < b$ , et à nouveau avec une contrainte intégrale. Ces problèmes sont motivés par l'étude des membranes non-homogènes. On réfère par exemple à [137, 133, 134, 135, 79] et [120, Chapter 9], où le cas des conditions de Dirichlet sont considérées. Le problème peut également être étudié dans le cas de condition de Robin <sup>3</sup>; notons que tous nos résultats s'appliquent également pour ce problème, puisque tout se base sur la formulation variationnelle de la valeur propre principale positive, qui est en fait plus simple dans le cas  $m > 0$  que dans le cas que nous considérons.

## 5.2 Nouveaux résultats

Dans tout ce paragraphe, on se donne  $(\beta, \kappa, c) \in [0, +\infty] \times ]0, +\infty[ \times ]0, 1[$ , avec  $c < \frac{1}{1+\kappa}$  si  $\beta = 0$ .

### 5.2.1 Résolution en dimension 1

Nous avons entièrement résolu le problème (5.4) en dimension 1, c'est-à-dire quand  $D$  est un segment.

2. Remarquons que cette condition ne dépend pas de la fonction  $\nu(\cdot)$

3. dans le cas des conditions de Neumann, il n'y a pas de valeur propre principale strictement positive

**Théorème 5.1** *Supposons  $d = 1$  et sans perte de généralité, considérons  $D = ]0, 1[$ . Posons*

$$\beta^* := \begin{cases} \frac{2}{c\sqrt{\kappa}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right) & \text{si } \kappa > 1 \\ \frac{\pi}{2c} & \text{si } \kappa = 1 \\ \frac{1}{c\sqrt{\kappa}} \left( \arctan\left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\kappa-1}\right) + \pi \right) & \text{si } \kappa < 1 \end{cases}$$

Alors

- si  $\beta > \beta^*$ , l'unique<sup>4</sup> solution de (5.4) est l'intervalle de longueur  $c$  centré en  $1/2$ ,
- si  $\beta < \beta^*$ , les solutions de (5.4) sont exactement  $]0, c[$  et  $]1 - c, 1[$ ,
- si  $\beta = \beta^*$ , les solutions de (5.4) sont exactement tous les intervalles de longueur  $c$ .

Ce résultat s'obtient classiquement par symétrisation de Steiner si  $\beta = +\infty$ , mais ce type d'argument ne s'applique plus pour  $\beta < \infty$ . Dans [162] est traité le cas  $\beta = 0$ . Dans le cas plus général  $\beta \in ]0, \infty[$ , le minimiseur parmi les intervalles a été calculé dans [56] si  $\kappa = 1$  et dans [124] pour  $\kappa > 0$  général. Ainsi pour obtenir le résultat ci-dessus, il faut montrer que la solution est un intervalle. Notre méthode se base sur un argument de symétrisation original : comme on ne peut pas utiliser la symétrisation de Steiner, on utilise une sorte de réarrangement monotone à deux côtés (une partie croissante, une partie décroissante), en choisissant un point intermédiaire. On constate alors qu'en choisissant ce point judicieusement, la fonction symétrisée reste admissible, et que le quotient de Rayleigh diminue dans la formulation variationnelle de  $\lambda$ . Précisons que ceci fournit une nouvelle preuve, plus directe, du cas  $\beta = 0$  de [162].

### 5.2.2 La boule est-elle solution ?

Notre second résultat est motivé par une question posée par H. Berestycki lors d'une école d'été à Louvain-la-Neuve en 2008, à savoir si la solution peut être une boule, comme semblaient le suggérer des expérimentations numériques. Dans le cadre évoqué alors, il s'agissait de condition de bord périodique, mais on verra ci-dessous que l'on peut déduire ce cas de notre résultat, par symétrisation.

Notre réponse est en fait bien plus générale, on montre que la boule n'est quasiment jamais une solution, en tout cas cela ne se peut que si la boîte  $D$  est elle-même une boule, et ce quelques soient les valeurs des paramètres  $\beta$ ,  $\kappa$  et  $c$ . On démontre ainsi que, contrairement à l'intuition, *la répartition optimale ne consiste pas à minimiser la surface de contact avec les zones défavorables.*

Plus précisément, on a montré l'énoncé suivant :

**Théorème 5.2** *Soit  $d \geq 2$ ,  $D$  un domaine de  $\mathbb{R}^d$  dont le bord est connexe et de classe  $C^1$ , et  $E$  un ouvert de  $D$  tel que  $|E| = c|D|$ . Supposons que soit  $E$  soit  $D \setminus \overline{E}$  est invariant par rotation (c'est-à-dire est une union d'anneaux concentriques, dont on note  $O$  le centre) et a un nombre fini de composantes connexes.*

- Si l'ensemble  $E$  est un point critique<sup>5</sup> du problème (5.4) alors  $D$  est une boule de centre  $O$ .
- Il existe  $\beta_0 \geq 0$  tel que si  $\beta \geq \beta_0$ , et si  $E$  est solution du problème (5.4), alors  $E$  et  $D$  sont des boules concentriques.

A notre connaissance, ce résultat est entièrement nouveau, même dans les cas  $\beta = 0$  ou  $\beta = +\infty$ . Nous faisons une hypothèse sur  $E$  ou sur son complémentaire, car dans certains cas c'est la zone  $E^c$  qui est la zone d'intérêt. Si  $\partial D$  n'est pas supposé connexe, le résultat n'est plus valable, alors que l'hypothèse de régularité sur  $D$  n'est pas essentielle, nous avons d'ailleurs vérifié<sup>6</sup> que notre stratégie s'applique par exemple dans le cas du carré. L'hypothèse faite sur le nombre de composantes connexes de  $E$  est simplement là pour éviter des situations pathologiques, et implique en particulier que  $\partial E \cap D$  est analytique, ce qui sera utilisé dans la démonstration.

Remarquons que pour la deuxième partie de l'énoncé, nous obtenons en fait un résultat un peu meilleur, à savoir que si  $\beta$  est assez grand et  $D$  est une boule, alors une boule concentrique de volume  $c|D|$  est optimale parmi

4. ici on comprend l'unicité à un ensemble de mesure nulle près.

5. Ceci signifie que  $E$  satisfait la condition d'ordre 1 du problème (5.4), à savoir que  $E$  est un ensemble de niveau supérieur de la fonction propre  $\varphi$  associée à la valeur principale  $\lambda(E)$ . Cette condition est démontrée par exemple dans [65] pour des conditions de bord de Dirichlet, mais les arguments s'adaptent directement au cas de conditions de Robin.

6. Afin de traiter le cas des conditions de bord périodiques

les domaines invariants par rotation.

**A propos de la preuve du Théorème 5.2 :** La condition d'optimalité d'ordre 1 implique que  $\varphi$  est constante sur  $\partial E$ . En étudiant les fonctions  $v_{ij} := x_i \partial_{x_j} u - x_j \partial_{x_i} u$  (qu'on peut voir comme une dérivée angulaire dans le plan  $(x_i, x_j)$ ) et l'EDP (et conditions de bord sur  $\partial E$ ) satisfaite par  $v_{ij} \mathbb{1}_E$ , on en déduit que  $\varphi$  est radiale sur  $E$ , puis sur tout le domaine  $D$ , par un argument de prolongement analytique. Dans le cas  $\beta = \infty$ , on peut déjà conclure puisque  $D$  est un ensemble de niveau de  $\varphi$ . Dans le cas général, on raisonne par l'absurde en analysant la zone de contact entre  $D$  et le cercle de centre  $O$  le plus grand inclus dans  $D$ .

Pour la deuxième partie du théorème, on peut supposer que  $D$  est une boule du fait du premier point. On insiste sur la dépendance en  $\beta$  en écrivant  $\lambda(\beta, m)$  à la place de  $\lambda(m)$ . On note  $m_\beta$  un minimiseur de

$$\min \left\{ \lambda(\beta, m), -1 \leq m \leq \kappa, |\{m > 0\}| > 0, \int_D m \leq -m_0 |D| \text{ et } m \text{ est radial} \right\},$$

et  $\varphi_\beta$  la fonction propre associée à  $\lambda(\beta, m_\beta)$ , normalisée dans  $L^2(D)$ . Il est facile de voir que  $\varphi_\beta$  est radiale, et on utilise ensuite le comportement de  $m_\beta$  quand  $\beta \rightarrow \infty$ . En effet, comme on connaît explicitement la solution pour  $\beta = +\infty$  dans ce cas (par symétrisation de Schwarz), en étudiant la convergence de  $\varphi_\beta$  vers  $\varphi_\infty$ , on peut montrer que si  $\beta$  est assez grand, la fonction  $\varphi_\beta$  atteint son minimum au bord de  $\partial D$ . Avec cette information, on peut utiliser une méthode de symétrisation ; la difficulté est que l'inégalité de Pólya-Szegő ne fonctionne pas dans  $H^1(D)$  a priori, mais seulement pour des fonctions positives de  $H_0^1(D)$ . Grâce à la remarque précédente, on peut l'appliquer à  $[\varphi_\beta - \min_D \varphi_\beta]$ , ce qui fournit le résultat.  $\square$

### Application dans le cas périodique :

On peut construire une correspondance entre les solutions d'un problème avec condition de bord périodique, et un problème avec condition de bord de type Neumann. Considérons par exemple  $D = \prod_{i=1}^d ]0, L_i[$  avec des conditions de bord périodiques. Alors l'ensemble optimal  $E^*$  est Steiner-symétrique par rapport aux coordonnées, c'est-à-dire convexe et symétrique par rapport aux hyperplans  $\{x_i = 0\}$ , voir [13]. En conséquence l'ensemble  $E^* \cap \tilde{D} = \prod_{i=1}^d ]0, L_i[$  est un minimiseur de (5.4) lorsqu'on met des conditions de Neumann au bord de  $\tilde{D}$ . Une construction inverse est également possible. De ce fait, on peut appliquer nos résultats avec des adaptations mineures au cas des conditions de bord périodiques.

### Présence d'arcs de cercles :

On peut déduire du Théorème 5.2 que dans le cas où  $D$  est un pavé  $\prod_{i=1}^d ]0, L_i[$ ,  $\beta = 0$ , et si on suppose  $E$  une solution telle que la frontière libre  $\partial E \cap D$  est analytique, alors celle-ci ne peut contenir un morceau de sphère. Pour cela on utilise la procédure inverse de celle décrite ci-dessus, en faisant des symétrisations par rapport aux côtés de  $D$ , et on trouve un ensemble  $\tilde{E}$  solution dans  $\prod_{i=1}^d ]0, L_i[$  avec conditions de bord périodique. Par analyticité, on en déduit que  $\tilde{E}$  est une boule, ce qui constitue une contradiction.

Remarquons que dans le cas planaire et si  $\beta = +\infty$ , alors la régularité analytique du bord est démontrée dans [66]<sup>7</sup>. Il est vraisemblable que leurs techniques puissent s'adapter au cas  $\beta = 0$  ; par contre, si  $d \geq 3$ , la question de la régularité des frontières libres semble une question encore largement ouverte, voir par exemple [191, 7].

### 5.2.3 La boule centrée est-elle solution ?

Il reste à déterminer, dans le cas où  $D$  est une boule, si la boule centrée est solution, comme c'est le cas si  $\beta = \infty$ . Nous montrons que  a n'est pas le cas, si  $d \in \{2, 3, 4\}$  et si  $\beta = 0$ . Précisément, on montre :

**Théorème 5.3** *Si  $d \in \{2, 3, 4\}$ ,  $\beta = 0$  et  $D = B \subset \mathbb{R}^d$  est une boule centrée en l'origine, alors la boule centrée de volume  $c|D|$  n'est pas un minimiseur pour le problème (5.4).*

Il est très probable que le résultat soit valable pour toute valeur de  $d$ , mais notre méthode ne s'applique que si  $d \leq 4$ . Pour des petites valeurs de  $\beta$ , on s'attend également au même résultat, mais notre preuve se semble pas s'appliquer. Le comportement pour  $\beta$  grand n'est pas clair, voir le Paragraphe 5.3.

7. Il est facile d'obtenir la régularité de la frontière libre là où  $\nabla \varphi \neq 0$ , du fait que  $E$  est un ensemble de niveau de  $\varphi$ , et que par régularité elliptique on a classiquement  $\varphi \in C^{1,\alpha}(D)$  pour tout  $\alpha < 1$  ; mais l'étude des points dégénérés est d elicat e.

**A propos de la preuve du Théorème 5.3 :** On introduit une opération de désymétrisation, qui crée un compétiteur  $\widehat{E}$  qui se colle au bord de  $D$ ; précisément, notons  $x' = (x_2, \dots, x_d)$ , et  $D' := \left\{ x' \in \mathbb{R}^{d-1} : \sum_{i=2}^d x_i^2 \leq 1 \right\}$  l'intersection de  $D$  avec l'hyperplan  $\{x_1 = 0\}$ , et introduisons  $f : x' \in D' \mapsto f(x') = \sqrt{1 - \sum_{i=2}^d x_i^2}$  de sorte que

$$D = B(0, 1) = \{(x_1, x') : x' \in D' \text{ et } -f(x') < x_1 < f(x')\}.$$

Si  $m = \kappa \mathbb{1}_E - \mathbb{1}_{D \setminus E}$  et  $\varphi$  est une fonction propre associée (et normalisée par  $\int_D m \varphi^2 = 1$ ), on introduit

$$\widehat{m}(x_1, x') := m\left(\frac{x_1 + f(x')}{2}, x'\right), \quad \widehat{\varphi}(x_1, x') := \varphi\left(\frac{x_1 + f(x')}{2}, x'\right), \quad \widehat{E} = \{\widehat{m} = \kappa\},$$

qui correspond visuellement à la Figure 5.1 quand  $E$  est une boule centrée.

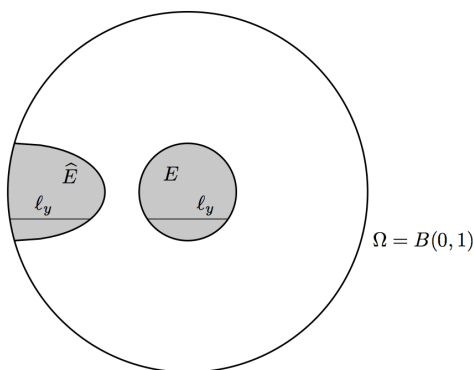


FIGURE 5.1 – Construction de  $\widehat{E}$  à partir de  $E$

On montre que cette déformation décroît strictement la valeur de  $\lambda$  si  $E$  est invariant par rotation (en particulier si c'est une boule centrée), plus précisément on obtient l'estimation suivante

$$\lambda(\widehat{E}) \leq \int_D |\nabla \widehat{\varphi}|^2 < \frac{5d-4}{4d} \int_D |\nabla \varphi|^2 = \frac{5d-4}{4d} \lambda(E),$$

dont on peut déduire le théorème puisque  $\frac{5d-4}{4d} \leq 1$  si  $d \in \{2, 3, 4\}$ .  $\square$

### 5.3 Perspectives

Le Théorème 5.2 donne des conditions suffisantes sur les paramètres pour que la solution soit une boule, mais elles ne sont pas suffisantes. Si on veut une description complète des situations où la solution peut-être une boule, il faut donc supposer que  $D$  est une boule, et voir les cas qui restent à analyser. Par exemple si  $\beta = +\infty$ , la solution est bien une boule (de même centre que  $D$ ), et si  $\beta = 0$ , alors la solution ne peut être une boule (d'après les Théorèmes 5.2 et 5.3); les cas intermédiaires sont ouverts.

Dans le cas uni-dimensionnel, nous avons vu au Théorème 5.1 que si  $\beta$  évolue de 0 à  $+\infty$ , la solution passe de façon discontinue de la solution du cas  $\beta = 0$  à celle du cas  $\beta = +\infty$ . Nous avons effectué des simulations numériques (voir [148, Section 2.8] pour une description de la méthode) qui suggèrent que ça n'est plus le cas si  $d = 2$ , voir la Figure 5.2. On observe en effet des formes optimales qui se déplacent du bord vers le centre, en se rapprochant de plus en plus d'une boule. Mais les simulations numériques ne permettent sans doute pas de déterminer si, comme on l'a montré dans le cas uni-dimensionnel, il existe  $\beta_0$  tel que pour  $\beta > \beta_0$ , la solution est encore une boule centrée, c'est-à-dire devient indépendante de  $\beta$  dès que celui-ci est assez grand.

On peut également se demander si la forme optimale peut contenir des morceaux de sphères. Nous avons montré que c'est impossible dans le cas particulier où  $\beta = 0$  et  $D$  est un rectangle de  $\mathbb{R}^2$ , mais les autres cas sont ouverts<sup>8</sup>.

8. sous réserve d'une théorie de régularité, on pourrait traiter le cas d'un pavé dans  $\mathbb{R}^d$

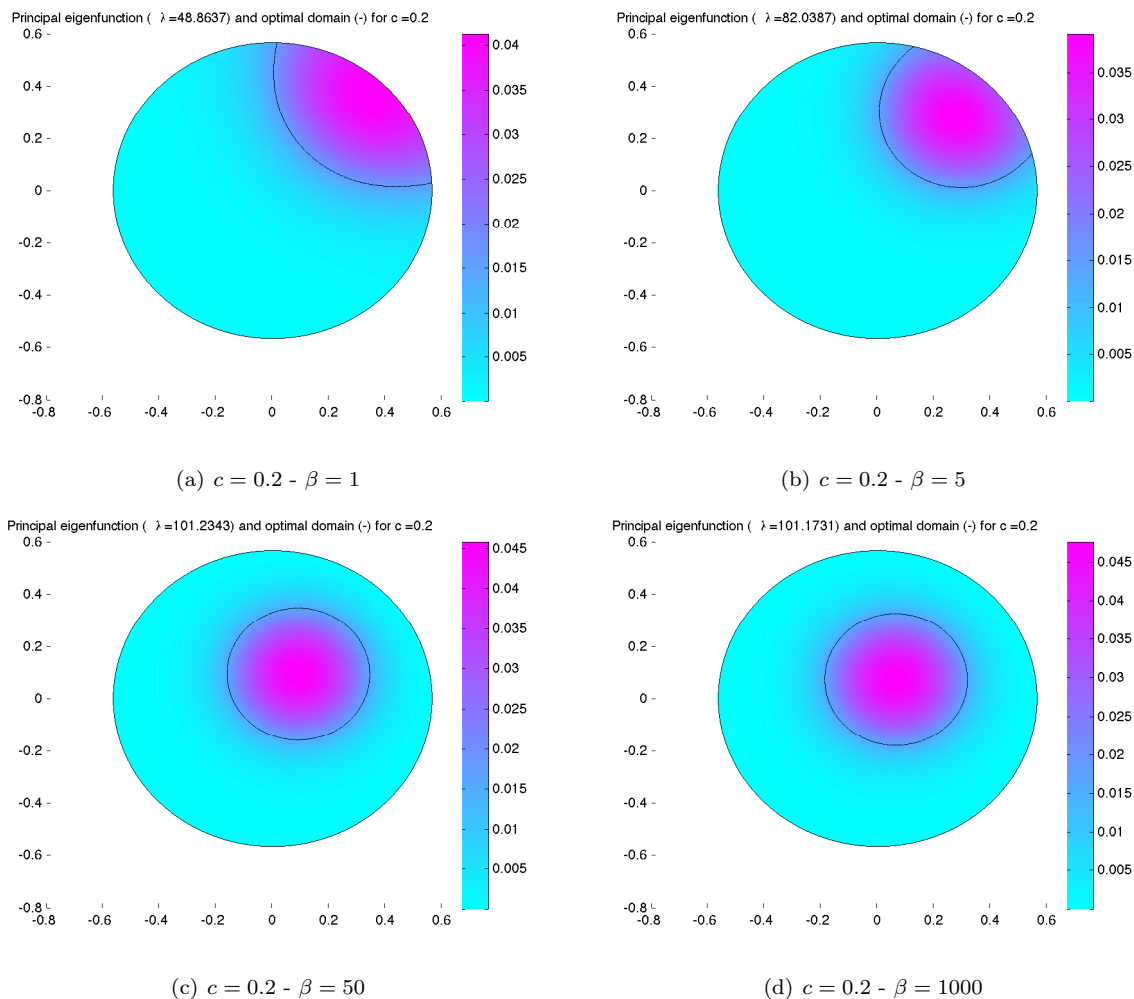


FIGURE 5.2 – Domaines optimaux avec  $D = B(0, 1)$ ,  $\kappa = 0.5$ ,  $c = 0.2$  et  $\beta \in \{1, 5, 50, 1000\}$

Enfin, de façon surprenante la question de savoir, même si  $\beta = 0$ , que la forme optimale touche le bord est ouverte; plus précisément, il est conjecturé (voir [161]) que si  $E$  est solution de (5.4) avec  $\beta = 0$ , alors  $E$  et  $D \setminus E$  sont connexes et  $\partial E \cap \partial D$  a une mesure surfacique strictement positive. Pour cette dernière propriété, une possibilité est d'utiliser des conditions d'ordre 2, de la même nature que [66], et d'utiliser que les translations sont admissibles pour obtenir une contradiction.





# Conclusion et Perspectives

Dans les chapitres précédents, nous avons déjà évoqué plusieurs perspectives possibles suggérées par nos résultats. Nous présentons ici pour conclure des axes de recherches en cours et à venir abordant des difficultés et des problèmes qui n'ont pas été décrits jusqu'à présent. Pour ces directions de recherche, plusieurs des techniques développées dans ce manuscrit seront certainement utiles et devront être adaptées à ces problèmes, et d'autres idées devront également être développées.

## Contrainte de diamètre :

J'évoque ici un travail en cours avec A. Henrot et Y. Privat. Nous nous intéressons à l'analyse de problèmes de la forme

$$\min \left\{ J(K) / K \text{ convexe de } \mathbb{R}^2, \text{Diam}(K) = d_0 \right\}, \quad (6.1)$$

où  $\text{Diam}(K) = \sup_{(x,y) \in K^2} |x - y|$  est le diamètre du domaine  $K$ , et  $d_0 \in ]0, \infty[$ . On peut également être intéressé par le problème :

$$\min \left\{ J(K) / K \text{ de largeur constante } d_0 \text{ dans } \mathbb{R}^2 \right\}. \quad (6.2)$$

*Nous cherchons à analyser les liens entre ces différents problèmes, et à obtenir des propriétés qualitatives des minimiseurs, afin éventuellement de les identifier explicitement pour certaines fonctionnelles intéressantes  $J$ . On peut commencer par les deux remarques élémentaires suivantes :*

- si  $J$  est strictement croissante pour l'inclusion, alors la solution de (6.1) est un segment. Le Problème (6.2) est par contre non trivial, comme le suggère l'exemple de la minimisation de l'aire, c'est-à-dire le cas  $J(K) = |K|$ , qui est résolu par le triangle de Reuleaux de largeur  $d_0$  (résultat connu sous le nom de Théorème de Blaschke-Lebesgue).
- Si  $J$  est strictement décroissante pour l'inclusion, alors les Problèmes (6.1) et (6.2) sont équivalents.

Comme au Chapitre 1, on pourra selon les fonctionnelles considérer des formes admissibles  $K$  compactes, ou des ouverts convexes  $\Omega$ , notamment quand l'énergie fait intervenir une EDP sur le domaine. C'est par exemple le cas si on s'intéresse à la fonction de trou spectral généralisé  $J(\Omega) = \lambda_2(\Omega) - t\lambda_1(\Omega)$  où  $t \in \mathbb{R}_+$ . Remarquons que dans ce cas, si  $t = 0$ , alors  $J$  est strictement décroissante et la solution de (6.1) a une largeur constante, et que si  $t = 1$ , le Théorème de Andrews et Clutterbuck [8] affirme qu'il n'y a pas existence de solution à (6.1) parmi les ouverts, et que l'infimum est atteint pour une suite de rectangles convergeant vers un segment<sup>1</sup>. Si  $t > 1$ , l'infimum est  $-\infty$  pour la même suite minimisante. Dans le cas intermédiaire  $t \in ]0, 1[$ , on peut considérer qu'il y a une compétition entre le cas  $t = 0$  où l'ensemble optimal est contrôlé par la contrainte de diamètre qui est saturée en tout point de son bord, et le cas  $t = 1$  où c'est la contrainte de convexité qui est saturée.

Une description des domaines optimaux pour cette fonctionnelle de trou spectral est certainement un problème très difficile, mais il peut être intéressant d'analyser une fonctionnelle purement géométrique qui manifeste une compétition similaire, à savoir

$$J(\Omega) = t|\Omega| - P(\Omega) \quad (6.3)$$

pour  $t \in \mathbb{R}_+$ . Si  $t = 0$ , les solutions de (6.1) sont exactement les ensembles de largeur constante  $d_0$  (qui ont même périmètre) et si  $t = \infty$  le segment est l'unique solution.

On cherche donc à comprendre la géométrie des solutions lorsqu'il y a compétition ; en particulier, on aimerait étudier l'ensemble

$$D(K) = \{x \in \partial K, x \text{ appartient à un diamètre de } K\},$$

---

1. Ce résultat est valable en toute dimension, autrement dit  $\Omega$  est un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^d$  avec  $d \geq 1$ .

des points diamétraux, et son complémentaire  $\partial K \setminus D(K)$ , lorsque  $K$  est une solution de (6.1).

L'analyse complète du cas (6.3) est liée à l'étude du diagramme de Blaschke-Santalò du triplet (*aire, périmètre, diamètre*), c'est-à-dire l'étude des inégalités qui caractérise les nombres  $(a, p, d)$  tels qu'il existe un ensemble convexe  $K$  tel que  $|K| = a, P(K) = p, \text{Diam}(K) = d$ . Par homogénéité, ceci se ramène à l'étude du domaine

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in [0, 1]^2, \exists K \text{ convexe de } \mathbb{R}^2 \text{ tel que } |K| = x, P(K) = y, \text{Diam}(K) = 1\}.$$

L'étude de la minimisation et de la maximisation de la fonctionnelle (6.3) parmi les convexes de diamètre 1 permettrait en fait de caractériser l'enveloppe convexe du domaine  $\mathcal{D}$ .

### Profil de Faber-Krahn d'une variété :

Ce paragraphe évoque un projet en collaboration avec P. Sicbaldi. La question générale est d'étudier le problème

$$I_{FK}(m_0) = \min \{\lambda_1(\Omega), \text{Vol}(\Omega) = m_0, \Omega \subset M\} \quad (6.4)$$

où  $M$  est une variété Riemannienne de dimension  $d$ ,  $m_0 \in ]0, \text{Vol}(M)[$ , et  $\lambda_1$  est la première valeur propre du Laplacien-Beltrami sur  $M$  avec condition au bord de Dirichlet sur  $\partial\Omega$ . On peut appeler  $I_{FK}(m_0)$  le profil de Faber-Krahn de la variété  $M$ . L'équivalent de ce problème en remplaçant  $\lambda_1$  par le périmètre, qui amène au profil isopérimétrique de la variété  $M$  a été très largement étudié, à la fois d'un point de vue analytique (existence et régularité de domaines optimaux) et d'un point de vue géométrique, alors que (6.4) a été relativement peu abordé dans la littérature. Nous proposons d'étudier les questions d'existence et de régularité pour de tels problèmes : plus précisément,

- nous démontrons l'existence d'un quasi-ouvert solution si  $M$  est compacte,
- nous avons exhibé une variété non compacte  $M$  telle que le problème (6.4) n'admet de solution pour aucune valeur de  $m_0$  (les suites minimisantes partent à l'infini),
- dans le cas où il y a existence d'un domaine optimal  $\Omega^*$ , on propose d'étudier sa régularité : ceci s'inscrit dans la question générale de la régularité des problèmes à frontière libre du type Alt-Caffarelli, voir [3]. Il faut adapter au cas Riemannien les résultats de [33] qui montrent dans le cas euclidien que l'ensemble optimal est un ouvert, dont le bord est régulier (analytique) en dehors d'un ensemble singulier de mesure  $(d-1)$ -dimensionnelle nulle. Nous aimerions également améliorer cette estimation de la taille de l'ensemble singulier, via les formules de monotonie de G. Weiss [203, 204], et l'étude des minimiseurs globaux coniques [128], qui devraient permettre de démontrer que l'ensemble singulier est de dimension de Hausdorff inférieure à  $d-5$ , voir également [152, Paragraphe 2.4.2],
- dans l'esprit de [170, 173] et [95], on aimerait étudier le cas des domaines optimaux pour des petites valeurs de  $m_0$  ; en l'occurrence, on s'attend à ce que les solutions soient une déformation régulière de boules géodésiques. Dans cette direction, on peut citer le résultat de O. Druet [92] qui calcule un développement asymptotique de  $I_{FK}(m_0)$  lorsque  $m_0$  est proche de 0, et également le travail de F. Pacard et P. Sicbaldi [179], où les auteurs construisent pour  $m_0$  petit des domaines critiques pour (6.4), obtenus comme déformations régulières des boules géodésiques.

L'un des objectifs est d'une telle étude est d'établir les points communs et les différences entre les propriétés des profils et des solutions isopérimétriques et de Faber-Krahn. Dans [153] nous avons adapté le résultat de [179] au cas d'une variété à bord (sur lequel on met une condition de bord de type Neumann) en montrant que des perturbations régulières de demi-boules géodésiques fournissent des domaines critiques pour ce problème à conditions mixtes. Ceci nous a permis d'établir une différence intéressante avec le cas isopérimétrique : nous démontrons que la condition surdéterminée  $|\nabla w_\Omega|^2 = \Lambda$  valable sur  $\partial\Omega \cap \overset{\circ}{M}$  (condition d'Euler-Lagrange pour (6.4) où  $w_\Omega$  est la première fonction propre et  $\Lambda$  est une constante) porte l'information de l'angle de contact avec  $\partial M$ , alors que la condition  $H_{\partial\Omega} = \Lambda$  de courbure moyenne constante ne porte pas cette information. Ainsi, les domaines critiques pour le problème isopérimétrique nécessite de considérer des déformations qui agissent au niveau de l'angle de contact, alors que du fait du caractère non local de l'énergie  $\lambda_1$ , des déformations supportées à l'intérieur de  $M$  suffisent à décrire le caractère critique des domaines.

# Bibliographie

- [1] Acerbi E., Fusco N., Morini M., Minimality via second variation for a nonlocal isoperimetric problem, *Comm. Math. Phys.*, 322(2), (2013), 515–557
- [2] Afrouzi G.A., Brown K.J., On principal eigenvalues for boundary value problems with indefinite weight and Robin boundary conditions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 127(1), (1999), 125–130
- [3] Alt H., Caffarelli L., Existence and regularity for a minimum problem with free boundary, *J. Reine Angew. Math.*, 325, (1981), 105–144
- [4] Alt H., Caffarelli L., Friedman A., Variational problems with two phases and their free boundaries, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 282(2), (1984), 431–461
- [5] Ambrosio L., Fusco N., Pallara D., Partial regularity of free discontinuity sets. II, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 24(1), (1997), 39–62
- [6] Ambrosio L., Fusco N., Pallara D., *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York (2000)
- [7] Andersson J., Shahgholian H., Weiss G.S., On the singularities of a free boundary through Fourier expansion, *Invent. Math.*, 187(3), (2012), 535–587
- [8] Andrews B., Clutterbuck J., Proof of the fundamental gap conjecture, *J. Amer. Math. Soc.*, 24(3), (2011), 899–916
- [9] Athanasopoulos I., Caffarelli L., Kenig C., Salsa S., An area-Dirichlet integral minimization problem, *Comm. Pure Appl. Math.*, 54(4), (2001), 479–499
- [10] Ball K., Volume ratios and a reverse isoperimetric inequality, *J. London Math. Soc. (2)*, 44(2), (1991), 351–359
- [11] Bandle C., Wagner A., Second domain variation for problems with Robin boundary conditions, *J. Optim. Theory Appl.*, 167(2), (2015), 430–463
- [12] Bendali A., Lemrabet K., The effect of a thin coating on the scattering of a time-harmonic wave for the Helmholtz equation, *SIAM J. Appl. Math.*, 56(6), (1996), 1664–1693
- [13] Berestycki H., Hamel F., Roques L., Analysis of the periodically fragmented environment model. I. Species persistence, *J. Math. Biol.*, 51(1), (2005), 75–113
- [14] Betta M.F., Brock F., Mercaldo A., Posteraro M.R., A weighted isoperimetric inequality and applications to symmetrization, *J. Inequal. Appl.*, 4(3), (1999), 215–240
- [15] Bianchini C., Henrot A., Optimal sets for a class of minimization problems with convex constraints, *J. Convex Anal.*, 19(3), (2012), 725–758
- [16] Bianchini C., Salani P., Concavity properties for elliptic free boundary problems, *Nonlinear Anal.*, 71(10), (2009), 4461–4470
- [17] Bleecker D.D., The spectrum of a Riemannian manifold with a unit Killing vector field, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 275(1), (1983), 409–416
- [18] Bôcher M., The smallest characteristic numbers in a certain exceptional case, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 21(1), (1914), 6–9
- [19] Bögelein V., Duzaar F., Fusco N., A sharp quantitative isoperimetric inequality in higher codimension, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl.*, 26(3), (2015), 309–362

- [20] Bogosel B., Regularity result for a shape optimization problem under perimeter constraint, *Preprint*
- [21] Bogosel B., Oudet É., Qualitative and numerical analysis of a spectral problem with perimeter constraint, *SIAM J. Control Optim.*, 54(1), (2016), 317–340
- [22] Böhme R., Tomi F., Zur Struktur der Lösungsmenge des Plateauproblems, *Math. Z.*, 133, (1973), 1–29
- [23] Bonnet A., On the regularity of edges in image segmentation, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 13(4), (1996), 485–528
- [24] Borell C., Capacitary inequalities of the Brunn-Minkowski type, *Math. Ann.*, 263(2), (1983), 179–184
- [25] Borell C., Greenian potentials and concavity, *Math. Ann.*, 272(1), (1985), 155–160
- [26] Bourgain J., Milman V.D., New volume ratio properties for convex symmetric bodies in  $\mathbf{R}^n$ , *Invent. Math.*, 88(2), (1987), 319–340
- [27] Bousquet P., Clarke F., Local Lipschitz continuity of solutions to a problem in the calculus of variations, *J. Differential Equations*, 243(2), (2007), 489–503
- [28] Brascamp H.J., Lieb E.H., On extensions of the Brunn-Minkowski and Prékopa-Leindler theorems, including inequalities for log concave functions, and with an application to the diffusion equation, *J. Functional Analysis*, 22(4), (1976), 366–389
- [29] Brasco L., De Philippis G., Ruffini B., Spectral optimization for the Stekloff-Laplacian : the stability issue, *J. Funct. Anal.*, 262(11), (2012), 4675–4710
- [30] Brasco L., De Philippis G., Velichkov B., Faber-Krahn inequalities in sharp quantitative form, *Duke Math. J.*, 164(9), (2015), 1777–1831
- [31] Briançon T., Regularity of optimal shapes for the Dirichlet’s energy with volume constraint, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 10(1), (2004), 99–122 (electronic)
- [32] Briançon T., Hayouni M., Pierre M., Lipschitz continuity of state functions in some optimal shaping, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 23(1), (2005), 13–32
- [33] Briançon T., Lamboley J., Regularity of the optimal shape for the first eigenvalue of the Laplacian with volume and inclusion constraints, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 26(4), (2009), 1149–1163
- [34] Brock F., An isoperimetric inequality for eigenvalues of the Stekloff problem, *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.*, 81(1), (2001), 69–71
- [35] Brock F., Ferone V., Kawohl B., A symmetry problem in the calculus of variations, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 4(6), (1996), 593–599
- [36] Bucur D., Uniform concentration-compactness for Sobolev spaces on variable domains, *J. Differential Equations*, 162(2), (2000), 427–450
- [37] Bucur D., Regularity of optimal convex shapes, *J. Convex Anal.*, 10(2), (2003), 501–516
- [38] Bucur D., Minimization of the  $k$ -th eigenvalue of the Dirichlet Laplacian, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 206(3), (2012), 1073–1083
- [39] Bucur D., Fragalà I., Blaschke-Santaló and Mahler inequalities for the first eigenvalue of the Dirichlet Laplacian, *Preprint*, preprint
- [40] Bucur D., Fragalà I., Lamboley J., Optimal convex shapes for concave functionals, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 18(3), (2012), 693–711
- [41] Bucur D., Mazzoleni D., Pratelli A., Velichkov B., Lipschitz regularity of the eigenfunctions on optimal domains, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 216(1), (2015), 117–151
- [42] Burenkov V.I., Lamberti P.D., Spectral stability of general non-negative self-adjoint operators with applications to Neumann-type operators, *J. Differential Equations*, 233(2), (2007), 345–379
- [43] Burenkov V.I., Lamberti P.D., Spectral stability of Dirichlet second order uniformly elliptic operators, *J. Differential Equations*, 244(7), (2008), 1712–1740
- [44] Buttazzo G., Dal Maso G., An existence result for a class of shape optimization problems, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 122(2), (1993), 183–195

- [45] Buttazzo G., Mainini E., Stepanov E., Stationary configurations for the average distance functional and related problems, *Control Cybernet.*, 38(4A), (2009), 1107–1130
- [46] Buttazzo G., Oudet E., Stepanov E., Optimal transportation problems with free Dirichlet regions, in *Variational methods for discontinuous structures*, volume 51 of *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, 41–65, Birkhäuser, Basel (2002)
- [47] Buttazzo G., Pratelli A., Solimini S., Stepanov E., *Optimal urban networks via mass transportation*, volume 1961 of *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin (2009)
- [48] Buttazzo G., Santambrogio F., Asymptotical compliance optimization for connected networks, *Netw. Heterog. Media*, 2(4), (2007), 761–777
- [49] Buttazzo G., Stepanov E., Optimal transportation networks as free Dirichlet regions for the Monge-Kantorovich problem, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 2(4), (2003), 631–678
- [50] Buttazzo G., Stepanov E., Minimization problems for average distance functionals, in *Calculus of variations : topics from the mathematical heritage of E. De Giorgi*, volume 14 of *Quad. Mat.*, 48–83, Dept. Math., Seconda Univ. Napoli, Caserta (2004)
- [51] Caffarelli L.A., Carlier G., Lions P.,  $C^{1,\alpha}$ -regularity for variational problems with a convexity constraint and related issues, *en préparation*
- [52] Caffarelli L.A., Jerison D., Kenig C.E., Some new monotonicity theorems with applications to free boundary problems, *Ann. of Math. (2)*, 155(2), (2002), 369–404
- [53] Caffarelli L.A., Jerison D., Lieb E.H., On the case of equality in the Brunn-Minkowski inequality for capacity, *Adv. Math.*, 117(2), (1996), 193–207
- [54] Cantrell R.S., Cosner C., Diffusive logistic equations with indefinite weights : population models in disrupted environments, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 112(3-4), (1989), 293–318
- [55] Cantrell R.S., Cosner C., Diffusive logistic equations with indefinite weights : population models in disrupted environments. II, *SIAM J. Math. Anal.*, 22(4), (1991), 1043–1064
- [56] Cantrell R.S., Cosner C., The effects of spatial heterogeneity in population dynamics, *J. Math. Biol.*, 29(4), (1991), 315–338
- [57] Cantrell R.S., Cosner C., *Spatial ecology via reaction-diffusion equations*, Wiley Series in Mathematical and Computational Biology, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester (2003)
- [58] Carlier G., Calculus of variations with convexity constraint, *J. Nonlinear Convex Anal.*, 3(2), (2002), 125–143
- [59] Carlier G., Lachand-Robert T., Regularity of solutions for some variational problems subject to a convexity constraint, *Comm. Pure Appl. Math.*, 54(5), (2001), 583–594
- [60] Carlier G., Lachand-Robert T., Convex bodies of optimal shape, *J. Convex Anal.*, 10(1), (2003), 265–273
- [61] Carlier G., Lachand-Robert T., Maury B.,  $H^1$ -projection into the set of convex functions : a saddle-point formulation, in *CEMRACS 1999 (Orsay)*, volume 10 of *ESAIM Proc.*, 277–289 (electronic), Soc. Math. Appl. Indust., Paris (1999)
- [62] Carlier G., Lachand-Robert T., Maury B., Une méthode numérique pour les problèmes variationnels sous contrainte de convexité, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 330(5), (2000), 397–402
- [63] Carlier G., Lachand-Robert T., Maury B., A numerical approach to variational problems subject to convexity constraint, *Numer. Math.*, 88(2), (2001), 299–318
- [64] Chambolle A., Lamboley J., Lemenant A., Stepanov E., Regularity for the optimal compliance problem with length penalization, *Soumis*
- [65] Chanillo S., Grieser D., Imai M., Kurata K., Ohnishi I., Symmetry breaking and other phenomena in the optimization of eigenvalues for composite membranes, *Comm. Math. Phys.*, 214(2), (2000), 315–337
- [66] Chanillo S., Kenig C.E., To T., Regularity of the minimizers in the composite membrane problem in  $\mathbb{R}^2$ , *J. Funct. Anal.*, 255(9), (2008), 2299–2320
- [67] Chavel I., On A. Hurwitz' method in isoperimetric inequalities, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 71(2), (1978), 275–279

- [68] Cicalese M., Leonardi G.P., A selection principle for the sharp quantitative isoperimetric inequality, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 206(2), (2012), 617–643
- [69] Colbois B., Dodziuk J., Riemannian metrics with large  $\lambda_1$ , *Proc. Amer. Math. Soc.*, 122(3), (1994), 905–906
- [70] Colbois B., Dryden E.B., El Soufi A., Bounding the eigenvalues of the Laplace-Beltrami operator on compact submanifolds, *Bull. Lond. Math. Soc.*, 42(1), (2010), 96–108
- [71] Colesanti A., Brunn-Minkowski inequalities for variational functionals and related problems, *Adv. Math.*, 194(1), (2005), 105–140
- [72] Colesanti A., From the Brunn-Minkowski inequality to a class of Poincaré-type inequalities, *Commun. Contemp. Math.*, 10(5), (2008), 765–772
- [73] Colesanti A., Cuoghi P., The Brunn-Minkowski inequality for the  $n$ -dimensional logarithmic capacity of convex bodies, *Potential Anal.*, 22(3), (2005), 289–304
- [74] Colesanti A., Fimiani M., The Minkowski problem for torsional rigidity, *Indiana Univ. Math. J.*, 59(3), (2010), 1013–1039
- [75] Colesanti A., Salani P., The Brunn-Minkowski inequality for  $p$ -capacity of convex bodies, *Math. Ann.*, 327(3), (2003), 459–479
- [76] Comte M., Lachand-Robert T., Existence of minimizers for Newton’s problem of the body of minimal resistance under a single impact assumption, *J. Anal. Math.*, 83, (2001), 313–335
- [77] Comte M., Lachand-Robert T., Newton’s problem of the body of minimal resistance under a single-impact assumption, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 12(2), (2001), 173–211
- [78] Comte M., Lachand-Robert T., Functions and domains having minimal resistance under a single-impact assumption, *SIAM J. Math. Anal.*, 34(1), (2002), 101–120 (electronic)
- [79] Cox S.J., McLaughlin J.R., Extremal eigenvalue problems for composite membranes. I, II, *Appl. Math. Optim.*, 22(2), (1990), 153–167, 169–187
- [80] Crasta G., Fragalà I., Gazzola F., On a long-standing conjecture by Pólya-Szegő and related topics, *Z. Angew. Math. Phys.*, 56(5), (2005), 763–782
- [81] Dambrine M., On variations of the shape Hessian and sufficient conditions for the stability of critical shapes, *RACSAM. Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Mat.*, 96(1), (2002), 95–121
- [82] Dambrine M., Kateb D., Lamboley J., An extremal eigenvalue problem for the Wentzell-Laplace operator, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 33(2), (2016), 409–450
- [83] Dambrine M., Lamboley J., Stability in shape optimization with second variation, *Soumis*
- [84] Dambrine M., Pierre M., About stability of equilibrium shapes, *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 34(4), (2000), 811–834
- [85] David G.,  $C^1$ -arcs for minimizers of the Mumford-Shah functional, *SIAM J. Appl. Math.*, 56(3), (1996), 783–888
- [86] David G., *Singular sets of minimizers for the Mumford-Shah functional*, volume 233 of *Progress in Mathematics*, Birkhäuser Verlag, Basel (2005)
- [87] De Philippis G., Lamboley J., Pierre M., Velichkov B., Regularity of Minimizers of Shape Optimization Problems involving Perimeter, *J. Math. Pures Appl.*
- [88] De Philippis G., Maggi F., Sharp stability inequalities for the Plateau problem, *J. Differential Geom.*, 96(3), (2014), 399–456
- [89] De Philippis G., Velichkov B., Existence and regularity of minimizers for some spectral functionals with perimeter constraint, *Appl. Math. Optim.*, 69(2), (2014), 199–231
- [90] Desaint F.R., Zolésio J.P., Manifold derivative in the Laplace-Beltrami equation, *J. Funct. Anal.*, 151(1), (1997), 234–269
- [91] Descloux J., A stability result for the magnetic shaping problem, *Z. Angew. Math. Phys.*, 45(4), (1994), 543–555

- [92] Druet O., Asymptotic expansion of the Faber-Krahn profile of a compact Riemannian manifold, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 346(21-22), (2008), 1163–1167
- [93] Esposito L., Fusco N., A remark on a free interface problem with volume constraint, *J. Convex Anal.*, 18(2), (2011), 417–426
- [94] Figalli A., Fusco N., Maggi F., Millot V., Morini M., Isoperimetry and stability properties of balls with respect to nonlocal energies, *Comm. Math. Phys.*, 336(1), (2015), 441–507
- [95] Figalli A., Maggi F., On the shape of liquid drops and crystals in the small mass regime, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 201(1), (2011), 143–207
- [96] Figalli A., Maggi F., Pratelli A., A mass transportation approach to quantitative isoperimetric inequalities, *Invent. Math.*, 182(1), (2010), 167–211
- [97] Finn R., Editorial comments on “On stability of a catenoidal liquid bridge”, by L. Zhou, *Pac. J. Math.*, 178(1), (1997), 197–198
- [98] Fisher R.A., The advance of advantageous genes, *Ann. Eugenics*, 7, (1937), 335–369
- [99] Fleming W.H., A selection-migration model in population genetics, *J. Math. Biol.*, 2(3), (1975), 219–233
- [100] Fragalà I., Gazzola F., Pierre M., On an isoperimetric inequality for capacity conjectured by Pólya and Szegő, *J. Differential Equations*, 250(3), (2011), 1500–1520
- [101] Fromm S.J., Potential space estimates for Green potentials in convex domains, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 119(1), (1993), 225–233
- [102] Fuglede B., Stability in the isoperimetric problem for convex or nearly spherical domains in  $\mathbf{R}^n$ , *Trans. Amer. Math. Soc.*, 314(2), (1989), 619–638
- [103] Fusco N., Julin V., A strong form of the quantitative isoperimetric inequality, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 50(3-4), (2014), 925–937
- [104] Fusco N., Maggi F., Pratelli A., The sharp quantitative isoperimetric inequality, *Ann. of Math. (2)*, 168(3), (2008), 941–980
- [105] Fusco N., Maggi F., Pratelli A., Stability estimates for certain Faber-Krahn, isocapacitary and Cheeger inequalities, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 8(1), (2009), 51–71
- [106] Fusco N., X. Z., On the Euler-Lagrange equation of a functional by Pólya and Szegő, *Preprint*
- [107] Fusco N., Y. Z.Y., A quantitative form of the Faber-Krahn inequality, *Preprint*
- [108] Gardner R.J., The Brunn-Minkowski inequality, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 39(3), (2002), 355–405
- [109] Giusti E., *Minimal surfaces and functions of bounded variation*, volume 80 of *Monographs in Mathematics*, Birkhäuser Verlag, Basel (1984)
- [110] Goldman M., Novaga M., Ruffini B., Existence and stability for a non-local isoperimetric model of charged liquid drops, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 217(1), (2015), 1–36
- [111] Goldman M., Novaga M., Ruffini B., On minimizers of an isoperimetric problem with long-range interactions and convexity constraint, *preprint*
- [112] Gonzalez E., Massari U., Tamanini I., On the regularity of boundaries of sets minimizing perimeter with a volume constraint, *Indiana Univ. Math. J.*, 32(1), (1983), 25–37
- [113] Grinberg E., Zhang G., Convolutions, transforms, and convex bodies, *Proc. London Math. Soc. (3)*, 78(1), (1999), 77–115
- [114] Grisvard P., *Elliptic problems in nonsmooth domains*, volume 24 of *Monographs and Studies in Mathematics*, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA (1985)
- [115] Grosse-Brauckmann K., Stable constant mean curvature surfaces minimize area, *Pacific J. Math.*, 175(2), (1996), 527–534
- [116] Guasoni P., Problemi di ottimizzazione di forma su classi di insiemi convessi, *Tesi di Laurea, Pisa*
- [117] Haddar H., Joly P., Nguyen H.M., Generalized impedance boundary conditions for scattering by strongly absorbing obstacles : the scalar case, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 15(8), (2005), 1273–1300

- [118] Harrell E.M., Henrot A., Lamboley J., On the local minimizers of the Mahler volume, *J. Convex Anal.*, 22(3), (2015), 809–825
- [119] Harrell II E.M., Henrot A., On the maximization of a class of functionals on convex regions, and the characterization of the farthest convex set, *Mathematika*, 56(2), (2010), 245–265
- [120] Henrot A., *Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators*, Frontiers in Mathematics, Birkhäuser Verlag, Basel (2006)
- [121] Henrot A., Pierre M., *Variation et Optimisation de Formes*, volume 16 of *Springer Series in Computational Mathematics*, Springer (2005), une analyse géométrique
- [122] Hersch J., Quatre propriétés isopérimétriques de membranes sphériques homogènes, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 270, (1970), A1645–A1648
- [123] Hile G.N., Xu Z.Y., Inequalities for sums of reciprocals of eigenvalues, *J. Math. Anal. Appl.*, 180(2), (1993), 412–430
- [124] Hintermüller M., Kao C.Y., Laurain A., Principal eigenvalue minimization for an elliptic problem with indefinite weight and Robin boundary conditions, *Appl. Math. Optim.*, 65(1), (2012), 111–146
- [125] Jerison D., The direct method in the calculus of variations for convex bodies, *Adv. Math.*, 122(2), (1996), 262–279
- [126] Jerison D., A Minkowski problem for electrostatic capacity, *Acta Math.*, 176(1), (1996), 1–47
- [127] Jerison D., Kenig C.E., The inhomogeneous Dirichlet problem in Lipschitz domains, *J. Funct. Anal.*, 130(1), (1995), 161–219
- [128] Jerison D., Savin O., Some remarks on stability of cones for the one-phase free boundary problem, *Geom. Funct. Anal.*, 25(4), (2015), 1240–1257
- [129] Jia H., Li D., Wang L., Global regularity for divergence form elliptic equations on quasiconvex domains, *J. Differential Equations*, 249(12), (2010), 3132–3147
- [130] Kadlec J., The regularity of the solution of the Poisson problem in a domain whose boundary is similar to that of a convex domain, *Czechoslovak Math. J.*, 14 (89), (1964), 386–393
- [131] Kim J., Minimal volume product near Hanner polytopes, *J. Funct. Anal.*, 266(4), (2014), 2360–2402
- [132] Kim J., Reisner S., Local minimality of the volume-product at the simplex, *Mathematika*, 57(1), (2011), 121–134
- [133] Kohn R.V., Strang G., Optimal design and relaxation of variational problems. I, *Comm. Pure Appl. Math.*, 39(1), (1986), 113–137
- [134] Kohn R.V., Strang G., Optimal design and relaxation of variational problems. II, *Comm. Pure Appl. Math.*, 39(2), (1986), 139–182
- [135] Kohn R.V., Strang G., Optimal design and relaxation of variational problems. III, *Comm. Pure Appl. Math.*, 39(3), (1986), 353–377
- [136] Kolmogorov A., Petrovsky I., N.S. P., Étude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique, *Bulletin Université d'État à Moscou*, A(1), (1937), 1–26
- [137] Krein M.G., On certain problems on the maximum and minimum of characteristic values and on the Lyapunov zones of stability, *Amer. Math. Soc. Transl. (2)*, 1, (1955), 163–187
- [138] Kuperberg G., From the Mahler conjecture to Gauss linking integrals, *Geom. Funct. Anal.*, 18(3), (2008), 870–892
- [139] Lachand-Robert T., Minimisation sous contraintes de convexité ou globales. Applications au problème de résistance minimale de Newton, *Preprint*, habilitation
- [140] Lachand-Robert T., Oudet E., Minimizing within convex bodies using a convex hull method, *SIAM J. Optim.*, 16(2), (2005), 368–379 (electronic)
- [141] Lachand-Robert T., Peletier M., Minimisation de fonctionnelles dans un ensemble de fonctions convexes, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 325(8), (1997), 851–855



- [142] Lachand-Robert T., Peletier M., Extremal points of a functional on the set of convex functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 127(6), (1999), 1723–1727
- [143] Lachand-Robert T., Peletier M., An example of non-convex minimization and an application to Newton’s problem of the body of least resistance, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 18(2), (2001), 179–198
- [144] Lachand-Robert T., Peletier M., Newton’s problem of the body of minimal resistance in the class of convex developable functions, *Math. Nachr.*, 226, (2001), 153–176
- [145] Lachand-Robert T., Peletier M., The minimum of quadratic functionals of the gradient on the set of convex functions, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 15(3), (2002), 289–297
- [146] Lamboley J., About Hölder-regularity of the convex shape minimizing  $\lambda_2$ , *Appl. Anal.*, 90(2), (2011), 263–278
- [147] Lamboley J., Regularity in calculus of variations and shape optimization under convexity constraint, *En cours de finalisation*
- [148] Lamboley J., Laurain A., Nadin G., Privat Y., Properties of minimizers of the principal eigenvalue with indefinite weight and robin conditions, *Calc. Var. and Partial Differential Equations*
- [149] Lamboley J., Novruzi A., Polygons as optimal shapes with convexity constraint, *SIAM J. Control Optim.*, 48(5), (2009/10), 3003–3025
- [150] Lamboley J., Novruzi A., Pierre M., Regularity and singularities of optimal convex shapes in the plane, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 205(1), (2012), 311–343
- [151] Lamboley J., Novruzi A., Pierre M., Estimates of first and second order shape derivatives in nonsmooth multidimensional domains and applications, *J. Funct. Anal.*, 270(7), (2016), 2616–2652
- [152] Lamboley J., Pierre M., Regularity of Optimal Spectral domains, *Chapitre du livre “Shape Optimization and Spectral Theory” édité par A. Henrot et publié par De Gruyter*
- [153] Lamboley J., Sicbaldi P., New examples of extremal domains for the first eigenvalue of the Laplace-Beltrami operator in a Riemannian manifold with boundary, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (18), (2015), 8752–8798
- [154] Landais N., Hölder continuity in a shape-optimization problem with perimeter, *Differential Integral Equations*, 20(6), (2007), 657–670
- [155] Landais N., A regularity result in a shape optimization problem with perimeter, *J. Convex Anal.*, 14(4), (2007), 785–806
- [156] Lemenant A., About the regularity of average distance minimizers in  $\mathbb{R}^2$ , *J. Convex Anal.*, 18(4), (2011), 949–981
- [157] Lemenant A., A presentation of the average distance minimizing problem, *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)*, 390(Teoriya Predstavlenii, Dinamicheskie Sistemy, Kombinatornye Metody. XX), (2011), 117–146, 308
- [158] Lemenant A., A selective review on Mumford-Shah minimizers., *to appear in Bollettino UMI*
- [159] Lemrabet K., Teniou D., Vibrations d’une plaque mince avec raidisseur sur le bord, *Maghreb Math. Rev.*, 2(1), (1992), 27–41
- [160] Lions P.L., Identification du cône dual des fonctions convexes et applications, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 326(12), (1998), 1385–1390
- [161] Lou Y., Some challenging mathematical problems in evolution of dispersal and population dynamics, in *Tutorials in mathematical biosciences. IV*, volume 1922 of *Lecture Notes in Math.*, 171–205, Springer, Berlin (2008)
- [162] Lou Y., Yanagida E., Minimization of the principal eigenvalue for an elliptic boundary value problem with indefinite weight, and applications to population dynamics, *Japan J. Indust. Appl. Math.*, 23(3), (2006), 275–292
- [163] Lu X.Y., Slepčev D., Properties of minimizers of average-distance problem via discrete approximation of measures, *SIAM J. Math. Anal.*, 45(5), (2013), 3114–3131
- [164] Maggi F., *Sets of finite perimeter and geometric variational problems*, volume 135 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge (2012), an introduction to geometric measure theory

- [165] Mahler K., Ein Minimalproblem für konvexe Polygone, *Mathematica (Zutphen)*, B(3), (1939), 118–127
- [166] Mazzoleni D., Pratelli A., Existence of minimizers for spectral problems, *J. Math. Pures Appl. (9)*, 100(3), (2013), 433–453
- [167] Mérigot Q., Oudet É., Handling convexity-like constraints in variational problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, 52(5), (2014), 2466–2487
- [168] Mirebeau J.M., Adaptive, anisotropic and hierarchical cones of discrete convex functions, *Numer. Math.*, 132(4), (2016), 807–853
- [169] Morgan F.,  $(M, \epsilon, \delta)$ -minimal curve regularity, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 120(3), (1994), 677–686
- [170] Morgan F., Johnson D.L., Some sharp isoperimetric theorems for Riemannian manifolds, *Indiana Univ. Math. J.*, 49(3), (2000), 1017–1041
- [171] Morgan F., Ros A., Stable constant-mean-curvature hypersurfaces are area minimizing in small  $L^1$  neighborhoods, *Interfaces Free Bound.*, 12(2), (2010), 151–155
- [172] Nadirashvili N., Sire Y., Conformal spectrum and harmonic maps, *Mosc. Math. J.*, 15(1), (2015), 123–140, 182
- [173] Nardulli S., The isoperimetric profile of a noncompact Riemannian manifold for small volumes, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 49(1-2), (2014), 173–195
- [174] Nazarov F., Petrov F., Ryabogin D., Zvavitch A., A remark on the Mahler conjecture : local minimality of the unit cube, *Duke Math. J.*, 154(3), (2010), 419–430
- [175] Neumayer R., A strong form of the quantitative Wulff inequality, *SIAM J. on Math. Anal.*
- [176] Nitsch C., An isoperimetric result for the fundamental frequency via domain derivative, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 49(1-2), (2014), 323–335
- [177] Novruzi A., Pierre M., Structure of shape derivatives, *J. Evol. Equ.*, 2(3), (2002), 365–382
- [178] Ortega J.H., Zuazua E., Generic simplicity of the eigenvalues of the Stokes system in two space dimensions, *Adv. Differential Equations*, 6(8), (2001), 987–1023
- [179] Pacard F., Sicbaldi P., Extremal domains for the first eigenvalue of the Laplace-Beltrami operator, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 59(2), (2009), 515–542
- [180] Paolini E., Stepanov E., Qualitative properties of maximum distance minimizers and average distance minimizers in  $\mathbf{R}^n$ , *J. Math. Sciences (N. Y.)*, 122(3), (2004), 105–122
- [181] Petrides R., Existence and regularity of maximal metrics for the first Laplace eigenvalue on surfaces, *Geom. Funct. Anal.*, 24(4), (2014), 1336–1376
- [182] Pommerenke C., *Univalent functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen (1975), with a chapter on quadratic differentials by Gerd Jensen, *Studia Mathematica/Mathematische Lehrbücher*, Band XXV
- [183] Reisner S., Zonoids with minimal volume-product, *Math. Z.*, 192(3), (1986), 339–346
- [184] Reisner S., Schütt C., Werner E.M., Mahler’s conjecture and curvature, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (1), (2012), 1–16
- [185] Roques L., Hamel F., Mathematical analysis of the optimal habitat configurations for species persistence, *Math. Biosci.*, 210(1), (2007), 34–59
- [186] Salani P., A Brunn-Minkowski inequality for the Monge-Ampère eigenvalue, *Adv. Math.*, 194(1), (2005), 67–86
- [187] Sallee G.T., Minkowski decomposition of convex sets, *Israel J. Math.*, 12, (1972), 266–276
- [188] Santalò L., Un invariante afin para los cuerpos convexos del espacio de n dimensiones, *Portugal. Math.*, 8, (1949), 155–161
- [189] Santambrogio F., Tilli P., Blow-up of optimal sets in the irrigation problem, *J. Geom. Anal.*, 15(2), (2005), 343–362
- [190] Schneider R., *Convex bodies : the Brunn-Minkowski theory*, volume 151 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, expanded edition (2014)

- [191] Shahgholian H., The singular set for the composite membrane problem, *Comm. Math. Phys.*, 271(1), (2007), 93–101
- [192] Shen Z., Bounds of Riesz transforms on  $L^p$  spaces for second order elliptic operators, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 55(1), (2005), 173–197
- [193] Skellam J.G., Random dispersal in theoretical populations, *Biometrika*, 38, (1951), 196–218
- [194] Slepčev D., Counterexample to regularity in average-distance problem, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 31(1), (2014), 169–184
- [195] Stancu A., Two volume product inequalities and their applications, *Canad. Math. Bull.*, 52(3), (2009), 464–472
- [196] Stepanov E., Partial geometric regularity of some optimal connected transportation networks, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 132(4), (2006), 522–552
- [197] Tao T., <http://terrytao.wordpress.com/2007/03/08/open-problem-the-mahler-conjecture-on-convex-bodies/>
- [198] Tilli P., Some explicit examples of minimizers for the irrigation problem, *J. Convex Anal.*, 17(2), (2010), 583–595
- [199] Tilli P., Compliance estimates for two-dimensional problems with Dirichlet region of prescribed length, *Netw. Heterog. Media*, 7(1), (2012), 127–136
- [200] van den Berg M., On the minimization of Dirichlet eigenvalues, *Bull. Lond. Math. Soc.*, 47(1), (2015), 143–155
- [201] Vogel T.I., Non-linear stability of a certain capillary surface, *Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems*, 5(1-4), (1999), 1–15, differential equations and dynamical systems (Waterloo, ON, 1997)
- [202] Vogel T.I., Sufficient conditions for capillary surfaces to be energy minima, *Pacific J. Math.*, 194(2), (2000), 469–489
- [203] Weiss G., Partial regularity for weak solutions of an elliptic free boundary problem, *Comm. Partial Differential Equations*, 23(3-4), (1998), 439–455
- [204] Weiss G., Partial regularity for a minimum problem with free boundary, *J. Geom. Anal.*, 9(2), (1999), 317–326
- [205] White B., A strong minimax property of nondegenerate minimal submanifolds, *J. Reine Angew. Math.*, 457, (1994), 203–218