SPECTRE ESSENTIEL ET CRITÈRE DE WEYL

MATHIEU LEWIN

Le but est, en utilisant le théorème spectral, de fournir une caractérisation utile des éléments du spectre. On considère un opérateur auto-adjoint A, de domaine $D(A)$ sur un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$. Le théorème spectral fournit l'existence d'une mesure borélienne positive μ localement bornée, définie sur $M \subset \mathbb{R}^d$, et d'une isométrie $U : \mathfrak{H} \to L^2(M, d\mu)$ telles que $A = U^* a U$ où a est un opérateur (maximal) de multiplication défini sur $L^2(M, d\mu)$. Il est possible (mais pas indispensable) de prendre $M = \sigma(A) \times \mathbb{N} \subset \mathbb{R}^2$ et $a(s, n) = s$.

1) Montrer que pour tout borélien $B \subset M$, l'espace $L^2(B, \mu)$ est de dimension finie si et seulement si la mesure μ charge un nombre fini de points dans B.

[*Indication : pour démontrer l'implication $\Rightarrow$, on pourra considérer un pavage de $\mathbb{R}^d$ avec des cubes de plus en plus petits, et utiliser le fait que $L^2(A \cup B, \mu) = L^2(A, \mu) \oplus L^2(B, \mu)$ lorsque $A \cap B = \emptyset$.*]

2) En déduire que $\lambda \in \sigma_{\rm ess}(A)$ si et seulement si, pour tout $\epsilon > 0$, $L^2(a^{-1}([\lambda - \epsilon; \lambda + \epsilon]), \mu)$ est de dimension infinie.

3) Soit λ une valeur propre de multiplicité finie et isolée ($\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_{\rm ess}(A)$) et $(x_n) \subset D(A)$ une suite telle que $\|x_n\| = 1$ pour tout n, et $Ax_n - \lambda x_n \to 0$ fortement dans $\mathfrak{H}$. Montrer que pour tout $x \in D(A) \cap \ker(A - \lambda)^\perp$, on a

$$\|(A - \lambda)x\|^2 \geq \eta \, \|x\|^2$$

pour un certain $\eta > 0$. En écrivant $x_n = x_n^1 + x_n^2$ avec $x_n^1 \in \ker(A - \lambda)$, $x_n^2 \in \ker(A - \lambda)^\perp$, en déduire que, à une sous-suite près, x_n converge fortement vers $x \in \ker(A - \lambda)$.

4) Démontrer le critère de Weyl : $\lambda \in \sigma_{\rm ess}(A)$ si et seulement s'il existe une suite $(x_n) \subset D(A)$ telle que $\|x_n\| = 1$, $x_n \rightharpoonup 0$ et $Ax_n - \lambda x_n \to 0$.

[*Indication : L'implication $\Leftarrow$ est une conséquence de 3). Pour l'implication $\Rightarrow$, il faut construire la suite à la main en utilisant 2) ; pour avoir $x_n \rightharpoonup 0$, il suffit que chaque x_n soit orthogonal à tous les autres.*]

5) Voici un résumé concernant la caractérisation de tous les éléments du spectre avec des suites de Weyl. Démontrer les énoncés manquants.

$\lambda \in \sigma(A)$	Il existe une λ-suite de Weyl $(x_n) \subset D(A)$, c'est-à-dire telle que $\|x_n\| = 1$ et $(A - \lambda)x_n \to 0$ fortement

$\lambda \in \sigma_{\rm ess}(A)$	Il existe une λ-suite de Weyl singulière, c'est-à-dire telle que $x_n \rightharpoonup 0$ faiblement
$\lambda \in \sigma_{\rm disc}(A)$	Toutes les λ-suites de Weyl sont précompactes dans $\mathfrak{H}$

$\lambda \in \sigma_{\rm cont}(A)$	Toutes les λ-suites de Weyl sont singulières
$\lambda \in \sigma_{\rm ponc}(A)$	Il existe une λ-suite de Weyl non singulière. De façon équivalente, il existe $x \in D(A)$ avec $\|x\| = 1$ tel que $(A - \lambda)x = 0$