Théorie spectrale et méthodes variationnelles
M2 ANEDP

Examen du 4 mai 2018 - Notes de cours autorisées

NB : la note finale tiendra fortement compte de la précision des arguments.

Notations :

- on note $L^2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions L^2 sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions L^2 sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes, $(\cdot,\cdot)_{L^2}$ le produit scalaire usuel sur ces espaces et $\|\cdot\|_{L^2}$ la norme associée ;
- on note $\widehat{u}$ la transformée de Fourier de la fonction (ou de la distribution tempérée) u ;
- pour $\lambda \in \mathbb{R}$ (resp. $\lambda \in \mathbb{C}$) et V un espace vectoriel réel (resp. complexe), on note λ l'opérateur $\lambda\, 1_V$ où 1_V est l'opérateur identité sur V ;
- si A et B sont deux opérateurs linéaires bornés sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, on note $[A,B] := AB - BA$ le commutateur de A et de B ;
- si A, B et C sont trois opérateurs linéaires (non-nécessairement bornés) sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de domaines respectifs $D(A)$, $D(B)$ et $D(C)$, et si D est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$ dense dans $\mathcal{H}$, on dit que
  - $AB = C$ sur D si
  $$D \subset D(B),\ D \subset D(C),\ BD \subset D(A) \text{ et } \forall \phi \in D,\ AB\phi = C\phi,$$
  - $[A,B] = C$ sur D si
  $$D \subset D(A),\ D \subset D(B),\ D \subset D(C),\ AD \subset D(B),\ BD \subset D(A) \text{ et } \forall \phi \in D,\ AB\phi - BA\phi = C\phi.$$

Partie I : Oscillator harmonique quantique

On note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'espace de Schwartz défini par

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \left\{ \phi \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \forall p \in \mathbb{N},\ \mathcal{N}_p(\phi) := \max_{0 \leqslant m,n \leqslant p} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^m \frac{d^n \phi}{dx^n}(x) \right| < \infty \right\},$$

avec la convention $x^0 = 1$ et $\frac{d^0\phi}{dx^0} = \phi$. On rappelle que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par dérivation, multiplication par des polynômes, et transformation de Fourier.

On considère l'opérateur a sur $L^2(\mathbb{R})$ défini par

$$D(a) = \left\{u \in L^2(\mathbb{R}) \mid u' + xu \in L^2(\mathbb{R})\right\}, \quad \forall u \in D(a),\ (au)(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u'(x) + xu(x)\right).$$

Question 1. Calculer l'adjoint a^* de a.

Question 2. Vérifier que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par a et a^* et donner une expression très simple de

$$[a^*, a]\phi := a^*a\phi - aa^*\phi$$

pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Question 3. On note H_0 l'opérateur sur $L^2(\mathbb{R})$ de domaine $D(H_0) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ défini par

$$H_0 = a^*a + \frac{1}{2} \quad \text{sur } \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Montrer que H_0 est un opérateur symétrique et positif (on rappelle que H_0 est dit positif si $\forall \phi \in D(H_0)$, $(\phi, H_0\phi)_{L^2} \geqslant 0$).

Question 4. On note H l'extension de Friedrichs de H_0, $Q(H)$ le domaine de forme de H et $h(\cdot,\cdot)$ la forme quadratique associée à H. On rappelle que

- $Q(H)$ est le complété de $D(H_0) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ pour la norme définie par $\|\phi\|_{Q(H)} = \left((\phi, H_0\phi)_{L^2} + \|\phi\|_{L^2}^2\right)^{1/2}$;
- $h(\cdot,\cdot) : Q(H) \times Q(H) \to \mathbb{R}$ est l'unique prolongement continu de la forme bilinéaire symétrique $(\phi, \psi) \mapsto (\phi, H_0\psi)$ définie sur $D(H_0)$;
- H est l'opérateur auto-adjoint défini par

$$D(H) := \left\{u \in Q(H) \mid Q(H) \ni v \mapsto h(u,v) \in \mathbb{R} \text{ se prolonge en une forme linéaire continue sur } L^2(\mathbb{R})\right\},$$

Hu étant alors l'unique représentant de Riesz de cette forme linéaire continue.

4a. Montrer que $Q(H) = \left\{u \in H^1(\mathbb{R}) \mid xu \in L^2(\mathbb{R})\right\}$ (où xu désigne le produit de u par la fonction $x \mapsto x$).

4b. Expliciter $D(H)$ et exprimer Hu pour $u \in D(H)$ en fonction de u et de ses dérivées. Pourquoi l'opérateur H est-il appelé un hamiltonien d'oscillateur harmonique quantique ?

Question 5. On considère la famille de fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ définie par

$$\phi_0(x) = \pi^{-1/4}\, e^{-x^2/2}, \qquad \phi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^*)^n\phi_0.$$

5a Vérifier que $a\phi_0 = 0$.

5b Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $[(a^*)^n, a] = -n(a^*)^{n-1}$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

5c Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad H\phi_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\phi_n.$$

5d En déduire que $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une famille orthonormée de fonctions de $L^2(\mathbb{R})$.

Question 6. Soit $g \in L^2(\mathbb{R})$ et f_g la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f_g(z) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\phi_0(x)e^{xz}\, dx.$$

6a. Montrer que f_g est une fonction entière (i.e. une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ tout entier ; on rappelle que pour vérifier que la fonction f_g est entière, il suffit de montrer qu'elle est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de $\mathbb{C}$, autrement dit que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction $\mathbb{C}\backslash\{0\} \ni h \mapsto \frac{f_g(z+h)-f_g(z)}{h} \in \mathbb{C}$ a une limite en 0).

6b. Montrer que $f_g = 0$ implique $g = 0$.

6c. On suppose que g est orthogonale (pour le produit scalaire L^2) à l'espace engendré par les $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que la fonction f_g et toutes ses $\mathbb{C}$-dérivées successives sont nulles en 0, et en déduire que $f_g = 0$.

6d. En déduire que $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

Question 7. Expliciter le spectre ponctuel $\sigma_{\mathrm{p}}(H)$, le spectre discret $\sigma_{\mathrm{d}}(H)$, le spectre continu $\sigma_{\mathrm{c}}(H)$ et le spectre essentiel $\sigma_{\mathrm{ess}}(H)$ de H.

Question 8. Montrer que H est inversible et à résolvante compacte.

Question 9. On pose $\mathcal{N} := a^*a$. Calculer $a\phi_n$, $a^*\phi_n$ et $\mathcal{N}\phi_n$. Les opérateurs a, a^* et $\mathcal{N}$ sont appelés respectivement opérateur d'annihilation, opérateur de création et opérateur nombre. Justifier ces dénominations.

Partie II : opérateurs position et quantité de mouvement en dimension 1

Dans toute cette partie, $\mathcal{H}$ désigne un espace de Hilbert complexe séparable.

Question 1. Montrer qu'il n'existe pas d'opérateurs auto-adjoints bornés P et Q sur $\mathcal{H}$ vérifiant la relation de commutation (dite canonique)

$$[P, Q] = -i \quad \text{sur } \mathcal{H}. \tag{1}$$

Indication : raisonner par l'absurde en supposant P et Q bornés, montrer qu'on peut alors supposer sans perte de généralité que $\|P\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = 1$, et calculer $[P^n, Q]$.

Question 2. On considère les opérateurs q (position) et p (impulsion) sur $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ définis (en représentation position) par

$$D(q) = \left\{u \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}) \mid xu(x) \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})\right\} \quad \text{et} \quad \forall u \in D(q),\ (qu)(x) = xu(x),$$

$$D(p) = H^1(\mathbb{R},\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad \forall u \in D(p),\ pu = -iu',$$

On rappelle que ces deux opérateurs sont auto-adjoints sur $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Vérifier que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable pour ces deux opérateurs et que sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $[p, q] = -i$.

Question 3. Soit T un opérateur auto-adjoint sur $\mathcal{H}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on peut définir par le calcul fonctionnel l'opérateur $U_T(t) = \exp(-itT)$. Montrer que la famille d'opérateurs $(U_T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ forme un groupe fortement continu d'opérateurs unitaires, c'est-à-dire que

$$\forall (t,t') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \quad U_T(t)U_T(t') = U_T(t+t'), \quad U_T(t)U_T(t)^* = 1, \quad U_T(0) = 1,$$
$$\forall u \in \mathcal{H},\ U_T(t)u \xrightarrow[t\to 0]{} u \text{ fortement dans } \mathcal{H}.$$

Question 4. Expliciter l'action sur $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ des opérateurs $U_q(t) = \exp(-itq)$ et $U_p(t) = \exp(-itp)$ ($t \in \mathbb{R}$), où les opérateurs p et q sont définis à la question 2, puis vérifier que

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad U_p(s)U_q(t) = e^{its}U_q(t)U_p(s).$$

Indication : pour calculer $U_p(t)$, on pourra utiliser le fait que la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ est une isométrie de $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$, que $\exp(-itp) = \mathcal{F}^{-1}\exp(-it\mathcal{F}p\mathcal{F}^{-1})\mathcal{F}$, et que $\mathcal{F}p\mathcal{F}^{-1}$ est un opérateur de multiplication.

Question 5. Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tel que $\|\psi\|_{L^2} = 1$. On pose

$$V_x = \int_{\mathbb{R}} x^2|\psi(x)|^2\,dx - \left(\int_{\mathbb{R}} x|\psi(x)|^2\,dx\right)^2,$$
$$V_p = \int_{\mathbb{R}} |-i\psi'(x)|^2\,dx - \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x)}(-i\psi'(x))\,dx\right)^2.$$

5a. Vérifier que les quantités V_x et V_p sont des nombres réels positifs bien définis. Donner une interprétation physique de ces deux nombres. On pose $\Delta x = V_x^{1/2}$ et $\Delta p = V_p^{1/2}$.

5b. Montrer que si A et B sont deux opérateurs auto-adjoints sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et si $\phi \in \mathcal{H}$ est tel que $\phi \in D(A) \cap D(B)$, $A\phi \in D(B)$ et $B\phi \in D(A)$, alors

$$(\phi, i[A,B]\phi)_{\mathcal{H}} = 2\mathrm{Re}(i(A\phi, B\phi)).$$

En déduire que

$$\frac{1}{2}(\phi, i[A,B]\phi)_{\mathcal{H}} \leqslant \|A\phi\|_{\mathcal{H}}\|B\phi\|_{\mathcal{H}}.$$

Dans quels cas l'inégalité ci-dessus est-elle une égalité ?

5c. Déduire de ce qui précède l'inégalité de Heisenberg

$$\Delta x\,\Delta p \geqslant \frac{1}{2}.$$

Quelles sont les fonctions $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ pour lesquelles cette inégalité est en fait une égalité ?