Examen de M2 ANEDP (2018-19)

Théorie spectrale et méthodes variationnelles

(Éric Cancès & Mathieu Lewin)

Avril 2019

Les notes de cours sont autorisées. Il sera tenu compte de la rédaction, qui doit être concise mais précise.

Dans ce problème nous étudions la restriction du Laplacien sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ au sous-espace des fonctions radiales, un opérateur que nous identifions ensuite à un opérateur différentiel sur $L^2(]0;+\infty[)$.

A. Restriction d'un opérateur auto-adjoint

Soit $(A, D(A))$ un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert séparable $\mathfrak{H}$. On rappelle que $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ est son ensemble résolvant.

1. Montrer que $(A, D(A))$ n'admet aucune restriction auto-adjointe.
2. Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace fermé de $\mathfrak{H}$, tel que $(A-z)^{-1}\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$ pour un $z \in \rho(A) \subset \mathbb{C}$. Montrer que $(A-z')^{-1}\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$ pour tout z' appartenant au disque ouvert de centre z et de rayon
$$r = \frac{1}{\|(A-z)^{-1}\|},$$
dans le plan complexe.
3. On suppose qu'il existe $z \in \rho(A)$ tel que $(A-z)^{-1}\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$ et $(A-\overline{z})^{-1}\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$. Montrer alors que $(A-z')^{-1}\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$ pour tout $z' \in \rho(A)$.
4. En déduire l'équivalence des propositions
   - *(i)* $(A-z)^{-1}\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$ et $(A-\overline{z})^{-1}\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$ pour au moins un $z \in \rho(A)$;
   - *(ii)* $(A-z)^{-1}\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$ pour tout $z \in \rho(A)$.
   - *(iii)* $f(A)\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$ pour toute fonction f continue sur $\mathbb{R}$ qui tend vers 0 à l'infini.

   On rappelle que l'algèbre engendrée par les $x \mapsto (x-z)^{-1}$ *avec* $\Im(z) \neq 0$ *est dense dans* $C^0_0(\mathbb{R})$ *(l'algèbre des fonctions continues qui tendent vers 0 à l'infini).*
5. Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace fermé de $\mathfrak{H}$ satisfaisant l'une des conditions équivalentes de la question précédente et tel que de plus $D(A) \cap \mathcal{V}$ soit dense dans $\mathcal{V}$. Sur l'espace de Hilbert $\mathcal{V}$, muni du produit scalaire de $\mathfrak{H}$, on pose $D(B) = D(A) \cap \mathcal{V}$ et $Bf = Af$. Montrer que B est à valeurs dans $\mathcal{V}$ et que $(B, D(B))$ est un opérateur auto-adjoint sur $\mathcal{V}$, avec $\sigma(B) \subset \sigma(A)$.

B. Laplacien radial

Dans toute cette section on se place en dimension $d \geqslant 2$.

On rappelle qu'une fonction mesurable $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est *radiale* lorsque pour toute matrice orthogonale $U \in SO(d)$ on a $f(Ux) = f(x)$ pour presque tout x. Ceci implique $f(x) = f(|x|e_1)$ où e_1 est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire f ne dépend que de la norme euclidienne $|x|$ de x.

Dans la suite on note $L^2_r(\mathbb{R}^d)$ le sous-espace des fonctions radiales dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et
$$H^k_r(\mathbb{R}^d) = H^k(\mathbb{R}^d) \cap L^2_r(\mathbb{R}^d)$$
les espaces de Sobolev correspondants, pour $k \geqslant 1$. De façon similaire, on appelle $C^\infty_{c,r}(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions radiales C^∞ à support compact.

6. Montrer que $L^2_r(\mathbb{R}^d)$ est un sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R}^d)$.
7. Montrer que $H^k_r(\mathbb{R}^d)$ est un sous-espace fermé de $H^k(\mathbb{R}^d)$, pour tout $k \geqslant 1$.
8. Montrer que $C^\infty_{c,r}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^k_r(\mathbb{R}^d)$, pour tout $k \geqslant 0$.

   On pourra utiliser, sans le redémontrer, que pour tout $f \in H^k(\mathbb{R}^d)$, la fonction $(f\eta_n) * \zeta_n$ appartient à $C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ et converge vers f fortement dans $H^k(\mathbb{R}^d)$, où $\eta_n(x) = \chi(x/n)$ et $\zeta_n(x) = n^d\chi(nx)$ avec χ une fonction radiale à support compact, telle que $\chi(0) = 1$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \chi = 1$.
9. Pour $U \in SO(d)$ et $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, calculer la transformée de Fourier de $x \mapsto f(Ux)$. En déduire que $\widehat{f} \in L^2_r(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si $f \in L^2_r(\mathbb{R}^d)$.

On rappelle que l'opérateur $-\Delta$ est auto-adjoint sur le domaine $D(-\Delta) = H^2(\mathbb{R}^d)$ dans l'espace de Hilbert $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$, de spectre $\sigma(-\Delta) = \mathbb{R}_+$.

10. Montrer que la restriction $-\Delta_r$ de l'opérateur $-\Delta$ à
$$D(-\Delta_r) = H^2_r(\mathbb{R}^d)$$
définit un opérateur auto-adjoint sur l'espace de Hilbert $\mathcal{V} = L^2_r(\mathbb{R}^d)$.
11. On introduit l'opérateur minimal $-\Delta_{r,\min}$ défini sur $D(-\Delta_{r,\min}) = C^\infty_{c,r}(\mathbb{R}^d) \subset L^2_r(\mathbb{R}^d)$. Montrer que sa fermeture dans $L^2_r(\mathbb{R}^d)$ est $-\Delta_r$, c'est-à-dire que ce dernier est essentiellement auto-adjoint sur $C^\infty_{c,r}(\mathbb{R}^d)$.
12. Montrer que $\sigma(-\Delta_r) = \mathbb{R}_+$.

C. Laplacien radial 3D comme opérateur sur $L^2(]0; +\infty[)$

On se place maintenant sur $L^2(]0; +\infty[)$ (muni de la mesure de Lebesgue). On rappelle que les fonctions $u \in H^1(]0; +\infty[)$ ont toutes un représentant continu qui admet une limite en 0^+ et qui tend vers 0 à l'infini. On rappelle finalement que si u et u'' (entendu au sens des distributions sur $]0; +\infty[$) sont toutes les deux dans $L^2(]0; +\infty[)$ alors on a automatiquement $u' \in L^2(]0; +\infty[)$, c'est-à-dire $u \in H^2(]0; +\infty[)$.

On introduit l'opérateur Laplacien sur la demi-droite avec condition de Dirichlet au bord
$$Lu := -u'', \qquad D(L) = \left\{u \in H^2(]0; +\infty[) \ : \ u(0^+) = 0\right\}.$$

13. Montrer que L est symétrique et fermé sur son domaine $D(L)$.
14. Soient $f, g \in L^2(]0; +\infty[)$ telles que
$$\langle -h'', f\rangle_{L^2(]0;+\infty[)} = \langle h, g\rangle_{L^2(]0;+\infty[)}$$
pour tout $h \in D(L)$. Montrer que $f \in D(L)$ et que $-f'' = g$. En déduire que L est auto-adjoint sur $D(L)$.

On étudie maintenant l'opérateur $-\Delta_r$ de la partie B, mais seulement en dimension $d = 3$. On introduit l'opérateur
$$\mathcal{U} : L^2_r(\mathbb{R}^3) \to L^2(]0; +\infty[)$$
défini par
$$(\mathcal{U}f)(r) = \sqrt{4\pi}\, r\, f(re_1).$$

15. Montrer que $\mathcal{U}$ est un opérateur unitaire (une application linéaire bijective qui conserve le produit scalaire).

16. Soit $f \in C^\infty_{c,r}(\mathbb{R}^3)$ et $u = \mathcal{U}f \in L^2(]0;+\infty[)$. Montrer que $\nabla f(0) = 0$, puis que $u \in C^\infty([0,+\infty[)$ et $u(0^+) = u''(0^+) = 0$. Prouver ensuite la relation

$$\Delta f(x) = \frac{u''(|x|)}{|x|\sqrt{4\pi}} \tag{1}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et en déduire que

$$\int_0^\infty |u''(r)|^2\, dr = \int_{\mathbb{R}^3} |\Delta f(x)|^2\, dx \tag{2}$$

et

$$\int_0^\infty \overline{u(r)}u''(r)\, dr = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{f(x)}\, \Delta f(x)\, dx. \tag{3}$$

17. Montrer que si $f \in H^2_r(\mathbb{R}^3)$ alors $\mathcal{U}f \in D(L)$ et que les formules (1), (2) et (3) restent vraies.

18. Montrer que $\mathcal{U}H^2_r(\mathbb{R}^3) = D(L)$ et $\mathcal{U}(-\Delta_r)\mathcal{U}^{-1} = L$.

19. Soit V une fonction radiale sous la forme $V(x) = v(|x|)$, avec $v \in C^0_0(\mathbb{R}_+)$.
    (a) Montrer que l'opérateur $-\Delta + V$ est auto-adjoint sur $H^2(\mathbb{R}^3)$, que son spectre est minoré et que son spectre essentiel vaut $\sigma_{\rm ess}(-\Delta+V) = [0;+\infty[$.
    (b) On suppose que $-\Delta + V$ possède une plus petite valeur propre $\lambda_1 < 0$. Montrer que λ_1 est non dégénérée et que la fonction propre correspondante f est radiale et strictement positive (à une phase près). En déduire que $u = \sqrt{4\pi}\, r\, f(re_1)$ résout l'équation différentielle

$$\begin{cases} -u''(r) + v(r)u(r) = \lambda_1\, u(r), \\ u(0^+) = 0. \end{cases}$$

D. Laplacien radial en toute dimension

20. Étudier de la même façon $-\Delta_r$ en toute dimension $d \geqslant 2$.