Ecole Normale Supérieure **2006-2007**
Cours d'Analyse Fonctionnelle et EDP mars 2007

Chapitre 2 - Introduction aux Distributions.

II.0 - Introduction.

L'objet *"distribution"* permet de généraliser l'objet *"fonction"* grâce au concept de *dualité*. L'idée centrale est de ne pas regarder une fonction f (disons $f \in C(\Omega)$) ponctuellement mais à travers les quantités

$$\varphi \mapsto \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

où φ décrit une classe de *"fonctions testes"*, par exemple $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Grâce au concept de distributions, il est possible de définir convenablement des opérations (dérivation, transformation de Fourier) qui ne sont pas légitimes (qui n'ont pas de sens!) si l'on reste dans le cadre des fonctions. L'idée est de faire porter l'opération que l'on souhaite définir sur les fonctions testes (dès que cette opération à un sens sur celles-ci). On généralise ainsi une partie du *"calcul différentiel"* et du *"caluc l intégral"*. Dans ce cours, l'intérêt des distributions est triple

- Résoudre explicitement un certain nombre d'équations. Cependant, par le calcul, ce sont essentiellement les équations (différentielles, aux dérivées partielles, intégrales) linéaires qui se laissent résoudre.

- Donner un sens aux équations aux dérivées partielles de manière très générale: une solution sera solution "au sens des distributions". Cependant, il est toujours possible de se passer du concept de distribution, car une solution est toujours solution en un sens beaucoup plus fort (vit dans un espace beaucoup plus petit que dans l'*énorme* espace des distributions).

- Introduire un tout petit peu de "géométrie différentielle", et en particulier, démontrer la formule de Stokes (et donc définir la mesure de surface).

Ce qu'il faut retenir, est que l'espace des distributions est l'union de tous les espaces possibles et imaginables. Plutôt que de définir les opérations dans chaque espace que l'on rencontre il suffit de les définir, une fois pour toute, *"au sens des distributions"*. Enfin, ce chapitre permet de nous concentrer sur l'essence même des distributions: la *dualité*, et de laisser de côté les autres concepts d'analyse que l'on retrouvera par la suite.

Pour commencer un cours sur les distributions, il est fondamental de bien connaître la topologie de $\mathbb{R}^N$, le calcul différentiel dans $\mathbb{R}^N$ et le calcul intégrale de Lebesgue. Nous supposerons ces notions connues. On renvoie au préambule du chapitre 4 pour des rappels sur l'intégrale de Lebesgue et à vos livres de référence préférés pour le reste.

Rappelons la définition d'une distribution comme elle a été définie au chapitre I. Dans tout ce chapitre Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}^*$.

Définitions et Propriétés des Distributions 0.1. On dit que T est une distribution sur Ω si $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire continue selon un des sens équivalents suivants:
(a) T est continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$;
(b) Pour tout $K \subset \Omega$ compact, $T|_K$ est continue sur $C_0^\infty(K)$:

$$\forall\, K \subset \Omega \text{ compact } \exists\, m,\ \exists\, C_{K,m} \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \operatorname{supp} \varphi \subset K \quad |\langle T, \varphi\rangle| \le C_{K,m}\, p_{K,m}(\varphi);$$

(c) T est séquentiellement continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$: ($\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$) implique ($\langle T, \varphi_n\rangle \;\to\; \langle T, \varphi\rangle$), ou de manière plus précise; pour toute suite (φ_n) de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour laquelle il existe un compact $K \subset \Omega$ telle que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$

$$\operatorname{supp}\varphi_n \subset K,\;\; \partial^\alpha\varphi_n \to 0 \;\text{ uniformément,} \quad \text{alors} \quad \langle T, \varphi_n\rangle \;\to\; 0.$$

(d) Pour tout $K \subset \Omega$ compact, $T|_K$ est séquentiellement continue sur $C_0^\infty(K)$;

L'espace des distributions est un evtlcs lorsqu'il est muni de la topologie induite par les formes linéaires $T \mapsto \langle T, \varphi\rangle$, pour tous les $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. En d'autres termes, la convergence d'une suite (T_n) vers T dans $\mathcal{D}'$ est la suivante:

$$T_n \rightharpoonup T \;\text{ dans }\; \mathcal{D}'(\Omega) \qquad \text{si} \qquad \forall\,\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \langle T_n, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle.$$

On acceptera les trois résultats suivants (démontrés au chapitre 1):

(e) Soit $A \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. Alors A est faiblement borné ($\forall\,\varphi \in \mathcal{D}\ \exists\, C_\varphi$ tel que $\forall\, T \in A\ |\langle T, \varphi\rangle| \le C_\varphi$) si, et seulement si, A est uniformément borné ($\forall\, K \subset \Omega$ compact $\exists\, m$, $\exists\, C$ tels que $\forall\, T \in A\ \forall\,\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ $|\langle T, \varphi\rangle| \le C\, p_{m,K}(\varphi)$).

(f) Soit (T_n) une suite de $\mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $\langle T_n, \varphi\rangle$ converge lorsque $n \to \infty$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Alors il existe $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $T_n \rightharpoonup T$ au sens $\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})$. De plus, (T_n) est bornée, et si $\phi_n \to \phi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ alors $\langle T_n, \phi_n\rangle \to \langle T, \phi\rangle$.

(g) Soit (T_n) une suite de $\mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $\langle T_n, \varphi\rangle$ est bornée pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Alors il existe une sous-suite (T_{n_k}) et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $T_{n_k} \rightharpoonup T$ au sens $\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})$.

Il n'est pas nécessaire de faire appel à la "théorie des evtlcs" présentée dans le chapitre 1 pour définir les distributions. Dans les espaces X ci-dessous on définit la convergence dans X de la manière suivante. Soit (φ_n) une suite de X et $\varphi \in X$. On dit que φ_n converge vers φ dans X, on note $\varphi_n \to \varphi$ dans X:

- pour $X = \mathcal{D}(\Omega)$ si $\exists\, K$ compact tel que $\varphi_n \in \mathcal{D}_K(\Omega)\ \forall\, n$ et $\forall\,\alpha$ on a $\partial^\alpha\varphi_n \to \partial^\alpha\varphi$ uniformément sur Ω;
- pour $X = C_c^m(\Omega)$ si $\exists\, K$ compact tq $\varphi_n \in \mathcal{D}_K(\Omega)\ \forall\, n$ et $\forall\,\alpha \le m$ on a $\partial^\alpha\varphi_n \to \partial^\alpha\varphi$ uniformément sur Ω;
- pour $X = C^m(\Omega)$ si $\forall\, K$ compact et $\forall\,\alpha \le m$ on a $\partial^\alpha\varphi_n \to \partial^\alpha\varphi$ uniformément sur K;
- pour $X = \mathcal{E}(\Omega)$ si $\forall\, K$ compact et $\forall\,\alpha$ on a $\partial^\alpha\varphi_n \to \partial^\alpha\varphi$ uniformément sur K;
- pour $X = \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ si $\forall\,\alpha$, β on a $x^\beta\,\partial^\alpha\varphi_n \to x^\beta\,\partial^\alpha\varphi$ uniformément sur $\mathbb{R}^N$.

On dit que T est une forme linéaire (séquentiellement) continue sur X, on note $T \in X'$ et on appelle T une distribution, si $T : X \to \mathbb{R}$ est une application linéaire et

$$\varphi_n \to \varphi \text{ dans } X \quad \Longrightarrow \quad \langle T, \varphi_n\rangle \to \langle T, \varphi\rangle.$$

Compte tenu de l'exercice suivant, cette définition est suffisante pour l'usage des distributions que nous aurons dans ce cours.

Exercices 0.2. Montrer à partir de la définition ci-dessus et de manière élémentaire (directement) les résultats suivants (en fait, on demande de redémontrer que dans un espace de Fréchet, ou une limite inductive d'espaces de Fréchet, il y a équivalence, pour une forme linéaire, entre être séquentiellement continue et être borné sur une "boule"):

a) - $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si, et seulement si,

$$\forall\, K \subset \Omega \text{ compact, } \exists\, m, \exists\, C \qquad \forall\,\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) \quad |\langle T, \varphi\rangle| \le C \sup_{|\alpha|\le m}\sup_{x\in\Omega} |\partial^\alpha\varphi(x)|.$$

b) - $T \in (C_c^m(\Omega))'$ si, et seulement si,

$$\forall\, K \subset \Omega \text{ compact, } \exists\, C \qquad \forall\,\varphi \in C_K^m(\Omega) \quad |\langle T, \varphi\rangle| \le C \sup_{|\alpha|\le m}\sup_{x\in\Omega} |\partial^\alpha\varphi(x)|.$$

c) - $T \in (C^m(\Omega))'$ si, et seulement si,

$$\exists\, K \subset \Omega \text{ compact, } \exists\, C \qquad \forall\, \varphi \in C^m(\Omega) \quad |\langle T, \varphi \rangle| \,\leq\, C \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

d) - $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ si, et seulement si,

$$\exists\, K \subset \Omega \text{ compact, } \exists\, m, \exists\, C \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{E}(\Omega) \quad |\langle T, \varphi \rangle| \,\leq\, C \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Remarquer que $\mathcal{E}'(\Omega) = \bigcup \big(C^m(\Omega)\big)'$.
e) - $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ si, et seulement si,

$$\exists\, m, \exists\, C \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \quad |\langle T, \varphi \rangle| \,\leq\, C \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{|\beta| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |x^\beta\, \partial^\alpha \varphi(x)|.$$

II.1 - Exemples, dérivation, multiplication, ordre, support, ...

On résume dans ce lemme, trois résultats élementaires fondamentaux pour la suite.
Lemme 1.1. 1) Pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ on a $\mathcal{D}(\Omega) \neq \emptyset$.
2) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert contenant l'origine. Pour toute fonction $\rho \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\rho \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)\, dx = 1$, on définie une suite d'approximation de l'identité (ρ_n) en posant $\rho_n(x) = n^{-N}\, \rho(n^{-1}\, x)$. Alors pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega \rho_n(x)\, \varphi(x)\, dx \;\to\; \varphi(0) \qquad \text{lorsque} \qquad n \to \infty.$$

En d'autres termes, $\rho_n \rightharpoonup \delta_0$ au sens des distributions, ou plus précisément, au sens de la convergence faible $\sigma(M^1_{loc}(\Omega), C_c(\Omega))$-$*$.
3) Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Alors

$$\int_\Omega f\, \varphi\, dx = 0 \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

implique $f \equiv 0$.

Preuve du lemme 1.1. 1) Lorsque $\Omega = B_{\mathbb{R}^N}(0,1)$ il suffit de remarquer que la fonction

$$\varphi(x) = \exp\left(-\frac{1}{1 - |x|^2}\right) \quad \text{si} \quad |x| \leq 1, \qquad \varphi(x) = 0 \quad \text{si} \quad |x| \geq 1,$$

appartient à $\mathcal{D}(\Omega)$. Dans le cas général, il suffit de translater et dilater cette fonction.
3) On définit la "fonction signe de f" $\mathrm{sign}(f)$ en posant $(\mathrm{sign} f)(x) = +1$ si $f(x) > 0$, $(\mathrm{sign} f)(x) = -1$ si $f(x) < 0$ et $(\mathrm{sign} f)(x) = 0$ si $f(x) = 0$. Pour tout compact $K \subset \Omega$ et pour une suite d'approximation de l'identité (ρ_n), on définit $\varphi_n = (\mathbf{1}_K\, \mathrm{sign}\, f) * \rho_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ pour n assez grand, de sorte que

$$\int_K |f| = \lim_{n \to \infty} \int_\Omega f\, \varphi_n\, dx = 0,$$

et donc $f = 0$ sur K, puis $f = 0$ sur Ω (au sens p.p.). ◫

Exemples 1.2. (i) Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Montrer que

$$\langle T, \varphi \rangle := \int_\Omega f\, \varphi\, dx \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

définit une distribution que l'on note T_f, $\{f\}$ ou simplement f. Remarquer que $T \in M^1_{loc}(\Omega) = (C_c(\Omega))'$ et même $T \in (L^\infty_c(\Omega))'$.
(ii) Soit $a \in \Omega$, $\alpha \in \mathbb{N}^N$. Montrer que

$$\langle T, \varphi \rangle := \partial^\alpha \varphi(a) \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

définit une distribution que l'on note $\delta^{(\alpha)}_a$. Remarquer que $T \in M^1_{loc}(\Omega)$. On note parfois $\delta^{(\alpha)} = \delta^{(\alpha)}_0$.
(iii) Soit μ une mesure (positive) borélienne σ-finie sur Ω. Montrer

$$\langle T, \varphi \rangle := \int_\Omega \varphi\, d\mu \qquad \forall\, \varphi \in C_0(\Omega)$$

définit une distribution. Remarquer que $T \in M^1_{loc}(\Omega)$ (et que cela à un sens sans notion de différentiabilité sur Ω).
(iv) *Valeur principale de* $1/x$. Montrer que pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \text{ admet une limite lorsque } \varepsilon \to 0, \quad \text{que l'on note} \quad \langle \mathrm{vp}\, \frac{1}{x}, \varphi \rangle.$$

Montrer que $\mathrm{vp}(1/x)$ est une distribution temperée. On l'appelle valeur principale de $1/x$.

Exercices 1.2. *Espaces de fonctions tests et espaces de distributions.*
1) - Soit $u, v \in C^m(\Omega)$, montrer que $u\, v \in C^m(\Omega)$ et $\partial^\alpha(u\, v) = \sum_{\gamma \le \alpha} C^\gamma_\alpha\, \partial^{\alpha-\gamma} u\, \partial^\gamma v$ où on note $\gamma \le \alpha$ si $\alpha_i \le \alpha_i$ pour tout i et $C^\gamma_\alpha = \prod_i C^{\gamma_i}_{\alpha_i}$.
2) - Soit $u \in C^p(\mathbb{R}^N)$, $v \in C^q(\mathbb{R}^N)$ avec l'une des fonctions à support compact. Montrer que $u * v \in C^{p+q}(\mathbb{R}^N)$, $\partial^\alpha(u * v) = (\partial^\beta u) * (\partial^\gamma v)$ pour tout couple (β, γ) tel que $\alpha = \beta + \gamma$, $\underline{|\beta| \le p,\ |\gamma| \le q}$. Montrer que $\mathrm{supp}\,(u * v) \subset \mathrm{supp}\, u + \mathrm{supp}\, v$ où pour une fonction $\psi \in C(\Omega)$ on définit $\mathrm{supp}\, \psi = \overline{\{x \in \Omega,\ \psi(x) \ne 0\}} = \Omega \backslash \omega$, avec ω le plus grand ouvert (l'union des ouverts!) sur lequel ψ s'annule. En particulier si $u \in C^p_c(\mathbb{R}^N)$, $v \in C^q_c(\mathbb{R}^N)$ alors $u * v \in C^{p+q}_c(\mathbb{R}^N)$. Montrer enfin que si $u \in C^p(\Omega)$ et $v \in C^q_c(\mathbb{R}^N)$ avec $\mathrm{supp}\, v \subset B_{\mathbb{R}^N}(0, \delta)$ alors $u * v \in C^{p+q}(\Omega_\delta)$ avec $\Omega_\delta := \{x \in \Omega,\ \mathrm{dist}(x, \Omega^c) > \delta\}$. En particulier si de plus $u \in C^p_c(\Omega_\delta)$ alors $u * v \in C^{p+q}_c(\Omega)$. En déduire que pour tout $\varphi \in C^m_c(\Omega)$ il existe une suite (φ_j) de $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\varphi_j \to \varphi$ dans $C^m_c(\Omega)$.
3) - Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Montrer qu'il existe une "suite exhaustive de compacts" (K_j) telle que $K_j \subset \mathrm{int}(K_{j+1})\ \forall\, j$ et $\Omega = \lim K_j$. En déduire que tout compact $K \subset \Omega$ satisfait $K \subset K_j$ pour tout $j \ge J_K$. Montrer qu'il existe une suite (χ_j) de $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que $0 \le \chi_j \le 1$ sur Ω, $\chi_j \equiv 1$ dans un voisinage de K_j et $\mathrm{supp}\, \chi_j \subset \mathrm{int}(K_{j+1})$. En déduire que pour tout $\varphi \in C^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ alors $\varphi_j = \varphi\, \chi_j$ satisfait $\varphi_j \in C^m_c(\Omega)$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $\varphi_j \to \varphi$ au sens de $C^m(\Omega)$.
4) - *Partition de l'unité.* Soit K un compact et soit (V_j) un recouvrement (quelconque) de K par des ouverts. Montrer qu'il existe des fonctions $\psi_j \in \mathcal{D}(\Omega)$ telles que $\mathrm{supp}\, \psi_j \subset V_j$ et $\sum_j \psi_j = 1$ sur un voisinage de K.
5) - Montrer que (avec inclusion continue stricte)

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccc}
\mathcal{D} & \subset & \mathcal{S} & \subset & \mathcal{E} & \subset & C^{m+1} & \subset & C^m & \subset & C & \subset & L^\infty_{loc} & \subset & L^2_{loc} & \subset & L^1_{loc} & \subset & M^1_{loc} & \subset & (C^m_c)' & \subset & (C^{m+1}_c)' & \subset & \mathcal{D}' \\
 & & & & & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
 & & & & & & \mathcal{D} & \subset & C^{m+1}_c & \subset & C^m_c & \subset & C_c & \subset & L^\infty_c & \subset & L^2_c & \subset & L^1_c & \subset & (C^0)' & \subset & (C^m)' & \subset & (C^{m+1})' & \subset & \mathcal{E}' & \subset & \mathcal{S}' & \subset & \mathcal{D}'
\end{array}$$

sachant que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ ne sont définis que lorsque $\Omega = \mathbb{R}^N$.
6) - Montrer que $1/|x|^k$, $k \ge 1$ est une distribution de $\mathbb{R}^*$ mais pas de $\mathbb{R}$. Montrer que $\varphi \mapsto \sum_{i \in I} a_i\, \varphi^{(i)}(0)$, $I \subset \mathbb{N}$, $a_i \ne 0$, est une distribution de $\mathbb{R}$ si, et seulement si, I est fini.
7) - Montrer les convergences suivantes au sens des distributions (ou des mesures) lorsque $n \to \infty$ ou $\varepsilon \to 0$.
a) - $\lim \dfrac{\varepsilon\, x}{x^2 + \varepsilon^2} = 0, \quad \lim \dfrac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \pi\, \delta, \quad \lim \dfrac{\sin^2(nx)}{n\, x^2} = \pi\, \delta.$
b) - Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f \ge 0$, $\int f(x)\, dx = 1$, $\mathrm{supp}\, f \subset \mathbb{R}_+$ et $v_n(x) = n^N(f(n\,x) - f(-n\,x))$, alors $\lim u_n = 2\, \delta^{(1)}$. De même, $\lim(\delta_{1/n} - \delta_{-1/n}) = 2\, \delta^{(1)}$.

c) - $\lim \cos(nx) = \lim \sin(nx) = 0, \quad \lim \dfrac{\sin(nx)}{n\,x} = \pi\,\delta, \quad \lim \dfrac{\varepsilon\,x}{(x^2+\varepsilon^2)^2} = -\dfrac{\pi}{2}\,\delta^{(1)}.$

Définition 1.3. *Dérivation d'une distribution.* On veut définir une opération de dérivation qui prolonge classique pour les fonction régulière: si $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ alors $\partial_i\,\{f\} = \{\partial_i\,f\}$.
Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^N$. Montrer que

$$\varphi \;\mapsto\; (-1)^{|\alpha|}\,\langle T, \partial^\alpha \varphi\rangle$$

définit une distribution, que l'on note $\partial^\alpha T$. On appelle dérivée de T d'ordre α la distribution $\partial^\alpha T$. On note ∇T le vecteur des dérivées premières.

Exercice 1.4. a) Le résultat élementaire et fondamental (le démontrer!) pour bien comprendre l'opération de dérivation au sens des distributions est le suivant: pour tout $\psi \in C^1_c(\mathbb{R}^N)$ et tout $j \in \{1, \dots, N\}$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \psi}{\partial x_j}\,dx = 0.$$

b) - Montrer que si $f \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ alors $\{\partial^\alpha f\} = \partial^\alpha\,\{f\}$. Montrer que $\partial^\alpha \delta_a = (-1)^{[\alpha|}\,\delta_a^{(\alpha)}$.
c) - Montrer que $T \in \mathcal{S}'$ implique $\partial^\alpha T \in \mathcal{S}'$ et $T \in \mathcal{E}'$ implique $\partial^\alpha T \in \mathcal{E}'$.
d) - Montrer que l'application $T \mapsto \partial^\alpha T$ est continue de $\mathcal{D}'$ dans lui-même (de $\mathcal{E}'$ dans lui-même, de $\mathcal{S}'$ dans lui-même).
e) - Soit $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction de Heaviside définie par $H(x) = 0$ si $x \le 0$, $H(x) = 1$ si $x > 0$. Montrer que $\{H\}' = \delta_0$. Calculer les dérivées distributions de $f_1(x) = H(x) - H(-x)$; $f_2(x) = |x|$; $f_3(x) = x - 1$ si $x < 0$ et $f_3(x) = x + 1$ si $x > 0$. Montrer que $\big(\dfrac{d}{dx} - k\big)H(x)\,e^{k\,x} = \delta$; $\big(\dfrac{d^2}{dx^2} + k^2\big)H(x)\,\sin(k\,x) = k\,\delta$, $k \neq 0$.
f) - Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux, et que en notant $\omega_i =]a_i, b_i[$, $i \in I \subset \mathbb{Z}$, $-\infty \le a_i < b_i = a_{i+1} < b_{i+1} \le +\infty$, la famille des (plus grands) ouverts (non vides) de $\mathbb{R}$ sur lesquels f est continue ($f : \omega_i \to \mathbb{R}$ est continue et si U est un ouvert contenant ω_i tel que $f : U \to \mathbb{R}$ est continue alors $U = \omega_i$) on a $f \in C^1(\bar\omega_i)$ (ou seulement $f \in W^{1,1}(\omega_i) \cap C(\bar\omega_i)$ ou même $f \in W^{1,1}(\omega_i)$ avec la définition ci-dessous), alors

$$\{f\}' = \{f'\} + \sum_{i \in I} (f(b_i) - f(a_{i+1})\,\delta_{a_{i+1}}.$$

g) - Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $S' = T$. Montrer que les solutions de $T' = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ sont les constantes.

Définition 1.5. *Espace de Sobolev.* Pour $1 \le p \le \infty$, on définit l'espace de Sobolev d'orde 1

$$W^{1,p}(\Omega) := \left\{ f \in L^p(\Omega);\ \frac{\partial}{\partial x_i}\{f\} \in L^p(\Omega)\ \forall\, i = 1, ..., N \right\},$$

i.e. $\forall\, i = 1, ..., N\ \exists\, g_i \in L^p(\Omega)$ (et on notera $g_i = \partial_i u$) tel que

$$\int_\Omega f\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i\,\varphi \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

On définit de la même manière $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ en remplaçant L^p par L^p_{loc}, et $W^{m,p}(\Omega)$, $W^{m,p}_{loc}(\Omega)$ les espaces de Sobolev d'ordre $m \in \mathbb{N}$.

Lemme 1.6. On munit $W^{1,p}$ de la norme

$$\forall\, u \in W^{1,p} \qquad \|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|\nabla\,u\|_{L^p},\ \max(\|u\|_{L^p}, \|\nabla\,u\|_{L^p}) \ \text{ ou } \ (\|u\|^p_{L^p} + \|\nabla\,u\|^p_{L^p})^{1/p}.$$

Alors $W^{1,p}$ est un espace de Banach. Idem pour $W^{m,p}$. Les espaces $W^{m,p}_{loc}$ sont des espaces de Fréchet.

Preuve du Lemme 1.6. Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $W^{1,p}$ et notons u la limite de (u_n) dans L^p et g_i la limite de $(\partial_i u_n)$ dans L^p. On a pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_\Omega g_i\,\varphi = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega (\partial_i u_n)\,\varphi = -\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n\,(\partial_i\varphi) = -\int_\Omega u\,(\partial_i\varphi),$$

ce qui prouve que $u \in W^{1,p}$ et $\partial u_i = g_i$. ◻

Définition 1.7. *Multiplication d'une distribution par une fonction.* On veut définir une opération de multiplication d'une distribution par une fonction régulière $\psi \in \mathcal{E}(\Omega)$ qui soit compatible avec la multiplication usuelle pour une fonction: si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ alors $\psi\,\{f\} = \{\psi\, f\}$.
Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\psi \in \mathcal{E}(\Omega)$. Montrer que

$$\varphi \;\mapsto\; \langle T, \psi\,\varphi\rangle$$

définit une distribution, que l'on note $\psi\,T$.

Exercice 1.7. a) - On se place sur $\mathbb{R}$. Montrer que $x\,\mathrm{Vp}(1/x) = 1$, $x\,\delta_0 = 0$ et $x\,\delta^{(n)} = n\,\delta^{(n-1)}$ si $n \geq 1$. En déduire $x^m\,\delta^{(n)} = (-1)^m\,n\,(n-1)\ldots(n-m+1)\,\delta^{(n-m)}$ si $1 \leq m \leq n$, $\quad = 0$ si $m > n$. Montrer enfin que $\dfrac{d^n}{dx^n}\dfrac{x^{n-1}\,H(x)}{(n-1)!} = \delta$. Que peut-on généraliser à $\mathbb{R}^N$?
b) - Montrer $\mathcal{D}'\,\mathcal{D} \subset \mathcal{E}'$, $\mathcal{E}'\,\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$, $\mathcal{S}'\,\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$. Montrer que dans ces espaces l'application $T \mapsto \psi\,T$ y est continue.
c) - Montrer que si $f \in L^1 + L^\infty$ alors pour tout α, β on a $x^\alpha\,\partial^\beta f \in \mathcal{S}'$. On appelle fonctions régulières à croissance lente, on note $\mathcal{O}$, l'espace des fonctions $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que pour tout α, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $(1+|x|)^{-m}\,\partial^\alpha\psi \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Montrer que l'application $f \mapsto \psi\,f$ est continue de $\mathcal{S}$ dans lui-même si, et seulement si, $\psi \in \mathcal{O}$. Montrer que $\mathcal{S}'\,\mathcal{O} \subset \mathcal{S}'$ et que l'application $T \mapsto \psi\,T$ y est continue.
d) - Trouver les solutions de $x\,T' = \lambda\,T$, $\lambda \in \mathbb{R}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Définition 1.8. On dit qu'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est d'ordre au plus $m \in \mathbb{N}$ si pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante C_K telle que

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C_K \sup_{|\alpha|\leq m}\,\sup_{x\in K} |D^\alpha\varphi(x)| \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \operatorname{supp}\varphi \subset K. \tag{1}$$

Exercice 1.8. a) - Montrer que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est d'ordre au plus $m \in \mathbb{N}$ si, et seulement si, T satifait à la propriété suivante: pour toute suite (φ_n) de $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\varphi_n \to 0$ au sens de $C^m_c(\Omega)$ alors $\langle T, \varphi_n\rangle \to 0$.
b) - Remarquer qu'une mesure et une fonction de L^1_{loc} sont des distributions d'ordre 0. Montrer que $\mathrm{vp}(1/x)$ et δ_0' sont des distributions d'ordre 1 (exactement). Plus généralement, montrer que si T est une distribution d'ordre au plus $m \in \mathbb{N}$ alors $\partial^\alpha T$ est une distribution d'ordre au plus $m + |\alpha|$. Montrer que $\sum j\,\delta_j^{(j)}$ est d'ordre infini.
c) - Montrer qu'une distribution d'ordre m peut être prolongée en une forme linéaire continue sur $C^m_c(\Omega)$, continue au sens où on a l'estimation (1) pour tout $\varphi \in C^m_c(\Omega)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset K$. (Ind. Montrer que $\langle T, \varphi{*}\rho_n\rangle$ est de Cauchy). Pour T d'ordre m, on a donc $T \in (C^m_c(\Omega))'$. On identifie désormais l'espace des distributions d'ordre au plus m et l'espace $(C^m_c(\Omega))'$. On dit que T est d'ordre exactement m si $T \in (C^m_c(\Omega))'$ mais $T \notin (C^{m-1}_c(\Omega))'$.
d) - Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ d'ordre m et soit $\psi \in C^m(\Omega)$. Montrer que $\psi\,T$ est bien défini comme distribution et est d'ordre m. En d'autres termes $(C^m_c)'\,C^m \subset (C^m_c)'$.

Définition 1.9. On dit qu'une distribution T est positive, on note $T \geq 0$, si pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, on a $\langle T, \varphi\rangle \geq 0$. Montrer que si $T_n \geq 0$ et $T_n \rightharpoonup T$ dans $\mathcal{D}'$ alors $T \geq 0$.

Exercice 1.9. Montrer qu'une distribution T positive est nécessairement une distribution d'ordre 0; et donc $T \in M^1_{loc}(\Omega) = (C_c(\Omega))'$ est une mesure de Radon.

Lemme 1.10. On dit que $T = 0$ sur un ouvert $\omega \subset \Omega$ si pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset \omega$, on a $\langle T, \varphi\rangle = 0$. Soit $(\omega_i)_i$ une famille d'ouverts. Si $T = 0$ sur chaque ω_i alors $T = 0$ sur $\omega = \cup\omega_i$.

Preuve du Lemme 1.10. Soit $K \subset \omega$ compact. Il existe alors ω_1, ..., ω_J tel que $K \subset \cup \omega_j$. Il existe donc $\delta > 0$ tel que $K \subset \cup \omega_{j,3\,\delta}$ où $\omega_{j,\delta} := \{x \in \omega_j;\ \mathrm{dist}(x, \omega_j^c) > \delta\}$. En effet, cela provient du fait que la suite décroissante de compacts $K_n := K \cap (\cap_j \omega_{j,1/n})^c)$ est d'intersection vide (c'est $K \cap (\cap_j \omega_j)^c)$) et donc K_n est vide pour n assez grand. Il existe alors $\chi_j \in \mathcal{D}(\omega_j)$ telle que $\chi_j = 1$ sur $\omega_{j,\delta}$. On pose $\psi_j = \chi_j / (\sum_k \chi_k) \in C^\infty(\cup \omega_{j,\delta})$ qui satisfait $\sum \psi_j = 1$ sur $\cup_j \omega_{j,\delta}$. Soit maintenant, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, tel que $\mathrm{supp}\, \varphi \subset K$. On a $\psi_j\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ pour tout j et $(\sum \psi_j)\, \varphi = \varphi$, de sorte que

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_j \langle T, \varphi\, \psi_j \rangle = 0,$$

puisque $\mathrm{supp}\, \psi_j\, \varphi \subset \omega_j$. ⊓⊔

Définition 1.11. On appelle support de T, on note $\mathrm{supp}\, T$, le plus petit fermé F tel que: pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\mathrm{supp}\, \varphi \subset \Omega \backslash F$ on ait $\langle T, \varphi \rangle = 0$. Montrer que si $T_n \rightharpoonup T$ dans $\mathcal{D}'$ et $\mathrm{supp}\, T_n \subset F$ avec F fermé alors $\mathrm{supp}\, T \subset F$.

Exercice 1.11. 1) Montrer que si $T = \{f\}$ avec $f \in C(\Omega)$ alors $\mathrm{supp}\, T = \mathrm{supp}\, f$. Montrer que si $T = \{f\}$ avec $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ alors $\mathrm{supp}\, T = \omega$ où ω est le grand ouvert tel que $f = 0$ p.p. sur ω. Montrer que $\mathrm{supp}\, \delta_a^{(\alpha)} = \{a\}$ et que $\mathrm{supp}\, (\mathrm{vp}\, (1/x)\,) = \mathbb{R}$.
2) Montrer que si $T \in \mathcal{D}'$, $\psi \in \mathcal{E}$ alors $\mathrm{supp}\, (\psi\, T) = \mathrm{supp}\, T \cap \mathrm{supp}\, \psi$ (*Ind.* On a $x_0 \in \mathrm{supp}\, T$ si $\forall\, \delta > 0$ il existe $\varphi_\delta \in \mathcal{D}(B(x_0, \delta))$ telle que $\langle T, \varphi_\delta \rangle \neq 0$ de sorte que $\langle \psi\, T, \psi^{-1}\, \varphi_\delta \rangle \neq 0$). Montrer que si $T \in \mathcal{D}'$, $\alpha \in \mathbb{N}^N$ alors $\mathrm{supp}\, (\partial^\alpha\, T) \subset \mathrm{supp}\, T$ (sans nécessairement avoir l'égalité). Plus généralement, montrer que pour tout opérateur différentiel $P = \sum_{\alpha \in \Lambda} a_\alpha\, \partial^\alpha$, avec $\Lambda \subset \mathbb{N}^N$ fini, $a_\alpha \in \mathcal{E}$, on a $\mathrm{supp}\, P\, T \subset \mathrm{supp}\, T$.
3) Soit $T \in \mathcal{D}'$. Montrer que si $\varphi \in \mathcal{D}'(\Omega)$ satisfait $\varphi \equiv 0$ sur $\mathrm{supp}\, T$ alors $\langle T, \varphi \rangle = 0$. En particulier si $\varphi, \psi \in \mathcal{D}'(\Omega)$ sont tels que $\varphi \equiv \psi$ sur $\mathrm{supp}\, T$ alors $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \psi \rangle$.

Définition 1.12. On note $\mathcal{E}(\Omega) = C^\infty(\Omega)$. On dit qu'une distribution T sur Ω est continue sur $\mathcal{E}(\Omega)$ si il existe une constante $C > 0$ et un entier m tels que

$$|\langle T, \varphi \rangle| \,\le\, C \sup_{|\alpha| \le m} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha \varphi(x)| \qquad \forall \varphi \in \mathcal{E}(\Omega). \tag{2}$$

On note $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Remarquer que $\mathcal{E}'(\Omega) = \bigcup \big(C^m(\Omega)\big)'$.

Exercice 1.13. 1) a) - Soit T une distribution à support compact. Montrer que T est une distribution d'ordre fini $m \in \mathbb{N}$. Montrer que T peut être prolongée en une distribution de $\mathcal{E}'(\Omega)$.
b) - Montrer que $\mathcal{E}'(\Omega) :=$ dual de $\mathcal{E}(\Omega) = \{T \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \mathrm{supp}\, T \text{ compact}\,\}$.
2) L'objectif de cet exercice est de démontrer que dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ on a équivalence entre
 (i) $\mathrm{supp}\, T \subset \{0\}$;
 (ii) $\exists\, m \in \mathbb{N}$, $\exists \lambda_1, ..., \lambda_m$ tels que $T = \sum_{i=1}^m \lambda_i\, \delta_0^{(i)}$;
 (iii) $\exists\, n \in \mathbb{N}\ x^n\, T = 0$.
Comment généraliser à $\mathbb{R}^N$?
a) - Montrer que (ii) implique (iii).
b) - Montrer que (iii) implique (i).
c) - Montrer que si $\mathrm{supp}\, T \subset \{0\}$ alors pour tout χ, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\chi = 1$ au voisinage de 0 on a $T(\varphi) = T(\chi\, \varphi)$.
d) - Montrer que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $a \in \Omega$, $k \in \mathbb{N}$, il existe $\psi_k \in \mathcal{E}(\Omega)$ tel que

$$\varphi(x) = \varphi(a) + (x-a)\, \varphi'(a) + ... + \frac{(x-a)^k}{k!}\, \varphi^k(a) + (x-a)^{k+1}\, \psi_k(x).$$

En particulier, si φ s'annule jusquà l'ordre k en a, alors $\varphi(x) = (x-a)^{k+1}\, \psi_k(x)$, $\psi_k \in \mathcal{D}(\Omega)$.
En déduire (avec l'aide de c) que (iii) implique (ii).

On suppose désormais que $\mathrm{supp}\, T \subset \{0\}$.
e) - Montrer que T est d'ordre fini (disons m).

f) - Montrer que si φ s'annule jusqu'à l'ordre m en 0 alors $T(\varphi)=0$. [Ind. On pourra considérer $\chi\in\mathcal{D}(\Omega)$, $\chi=1$ au voisinage de 0, poser $\chi_j(x)=\chi(j\,x)$ et montrer que pour tout $|\alpha|\le m$, $|D^\alpha(\chi_j\,\varphi)(x)|\le C/j$, puis $T(\chi_j\,\varphi)\to 0$].
g) - Montrer que $x^mT=0$ et conclure.

En résumé, on a

$$\begin{array}{rcl}
T\in\mathcal{D}' & \text{si} & \forall K\subset\Omega \text{ compact},\ \exists\, m\in\mathbb{N},\ \exists C_K \ \text{ tel que}\\
& & \quad \forall\,\varphi\in\mathcal{D}(\Omega),\ \operatorname{supp}\varphi\subset K \quad |\langle T,\varphi\rangle|\le C_K\,p_{K,m}(\varphi);\\
T \text{ est d'ordre fini} & \text{si} & \exists\, m\in\mathbb{N}\ (m \text{ est l'ordre de } T, \text{ i.e.}\, T\in(C_c^m)'),\ \forall\, K\subset\Omega \text{ compact},\ \exists C_K \ \text{ tel que}\\
& & \quad \forall\,\varphi\in\mathcal{D}(\Omega),\ \operatorname{supp}\varphi\subset K \quad |\langle T,\varphi\rangle|\le C_K\,p_{K,m}(\varphi);\\
T\in\mathcal{E}' & \text{si} & \exists\, K\subset\Omega \text{ compact } (T \text{ est à support compact } \subset K),\ \exists\, m\in\mathbb{N},\ \exists C \ \text{ tel que}\\
& & \quad \forall\,\varphi\in\mathcal{D}(\Omega) \quad |\langle T,\varphi\rangle|\le C\,p_{K,m}(\varphi).
\end{array}$$

Remarquons qu'une distribution quelconque est "localement" d'ordre fini.

Encore quelques Définitions 1.14. (i) Si $\omega\subset\Omega$ ouvert et $T\in\mathcal{D}'(\Omega)$, on définit la restriction $T|_\omega\in\mathcal{D}'(\omega)$ par $\forall\,\varphi\in\mathcal{D}(\omega)$ $\langle T|_\omega,\varphi\rangle=\langle T,\varphi\rangle$.
(ii) Si $T\in\mathcal{D}'(\Omega)$ est à support compact $K\subset\Omega$, on définit le prolongement $\bar T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ en fixant $\chi\in\mathcal{D}(\Omega)$ $\chi\equiv 1$ sur K (quelconque!) et en posant $\forall\,\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ $\langle\bar T,\varphi\rangle=\langle T,\chi\,\varphi\rangle$.
Soit $T\in\mathcal{D}'(\Omega)$. Pour tout $\omega\subset\subset\Omega$ et pour une fonction (quelconque) $\chi\in\mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\chi=1$ sur ω on définit $\bar T=T\,\chi\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. Alors $\bar T|_\omega=T|_\omega$.
(iii) Si $h\in\mathbb{R}^N$ et $T\in\mathcal{D}'(\Omega)$ on définit la translation τ_hT comme distribution sur $\tau_h\Omega:=\{x\in\mathbb{R}^N;\ x+h\in\Omega\}=\Omega-h$ par $\forall\,\varphi\in\mathcal{D}(\tau_h\Omega)$ $\langle\tau_hT,\varphi\rangle=\langle T,\tau_{-h}\varphi\rangle$, avec $(\tau_h\varphi)(x)=\varphi(x-h)$. La convention est telle que $\tau_h\,\mathbf{1}_A=\mathbf{1}_{h+A}$.
(iv) Soit Ω (étoilé par rapport à l'origine). Si $\lambda>0$ et $T\in\mathcal{D}'(\Omega)$ on définit la dilatation $\delta_\lambda T$ comme distribution sur $\Omega_\delta:=...$ par $\forall\,\varphi\in\mathcal{D}(\Omega_\delta)$ $\langle\delta_\lambda T,\varphi\rangle=\lambda^N\langle T,\delta_{\lambda^{-1}}\varphi\rangle$, avec $(\delta_\lambda\varphi)(x)=\varphi(x/\lambda)$. La convention est telle que $\delta_\lambda\,\mathbf{1}_A=\mathbf{1}_{\lambda\,A}$.
(v) Soit Ω une boule centrée en l'origine. Pour $R\in SO(n)$ une rotation de $\mathbb{R}^N$ et $T\in\mathcal{D}'(\Omega)$ on définit la rotation ρ_RT comme distribution sur Ω par $\forall\,\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$ $\langle\rho_RT,\varphi\rangle=\langle T,\rho_{R^{-1}}\varphi\rangle$, avec $(\rho_R\varphi)(x)=\varphi(R^{-1}\,x)$. La convention est telle que $\rho_R\,\mathbf{1}_A=\mathbf{1}_{R\,A}$. Soit Ω invariant par rotation (une boule ou une série de couronnes). On dit que $T\in\mathcal{D}'(\Omega)$ est invariant par rotation si $\forall\,R\in SO(\mathbb{R}^N)$ on a $\rho_RT=T$.
(vi) Pour $T\in\mathcal{D}'(\Omega)$ on définit le symétrique T comme distribution sur $-\Omega$ par $\langle T^\vee,\varphi\rangle=\langle T,\varphi^\vee\rangle$ $\forall\,\varphi\in\mathcal{D}(-\Omega)$, avec $(\varphi^\vee)(x)=(\check\varphi)(x)=\varphi(-x)$. La convention est telle que $\mathbf{1}_A^\vee=\mathbf{1}_{-A}$. On dit qu'une distribution T est paire (resp. impaire) si $T^\vee=T$ (resp. $T^\vee=-T$).

Encore quelques Exercices 1.15. 1) a) - Montrer que la suite de fonction $\dfrac{x}{x^2+\varepsilon^2}$ converge, quand $\varepsilon\to 0$, vers $\mathrm{Vp}\big(1/x\big)$ et au sens des distributions tempérees:

$$\langle\mathrm{Vp}(\frac{1}{x}),\varphi\rangle=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}}\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\,\varphi(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx,\quad \forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

b) - Montrer que $\mathrm{Vp}(1/x)$ est une distribution impaire et vérifie $x\,\mathrm{Vp}(1/x)=1$. Montrer que c'est la seule distribution impaire vérifiant cette équation. Quelles sont toute les solutions de cette équation?
c) - Montrer que la fonction $\log|x|$ définit une distribution tempérée de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et que sa dérivée distribution est $\mathrm{Vp}(1/x)$.
d) - Montrer que $\dfrac{1}{x\pm i\,0}:=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^\pm}\dfrac{1}{x+i\,\varepsilon}=\mathrm{Vp}(\dfrac{1}{x})\mp i\,\pi\delta$.

2) a) - Soit $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Montrer que $\langle\mathrm{Pf}(\dfrac{1}{x^2}),\varphi\rangle=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\displaystyle\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,dx$ définit une distribution appellée Partie finie de $1/x^2$.

b) - Démontrer que la dérivée de $\mathrm{Vp}\big(1/x\big)$ est $\mathrm{Pf}\big(1/x^2\big)$.

c) - Pour quelle valeur de $\alpha > 0$ peut-on définir la Valeur principale de $x/|x|^\alpha$, la Partie finie de $1/|x|^\alpha$ dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{R}^N$?

c) Montrer que la fonctionnelle suivante définie une distribution tempérée

$$\langle \mathrm{Pf}\big(\frac{H(x)}{x}\big), \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\big\{\int_{x>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx - \varphi(0)\, \log\varepsilon\big\}.$$

II.2 - D'avantage sur la dérivation: formule de Stokes et solution élementaire pour le Laplacien.

Définition 2.1. On dit qu'un ouvert Ω est de classe C^k, $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, s'il existe une fonction "distance au bords" $d \in C^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ telle que

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N;\ d(x) < 0\}, \quad \partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N;\ d(x) = 0\} \quad \text{et} \quad \nabla d(x) \neq 0\ \forall\, x \in \partial\Omega.$$

On appelle normale extérieure unitaire à Ω en $x \in \partial\Omega$ le vecteur $n(x) = \nabla d(x)|/|\nabla d(x)|$.

Exemples 2.2. (i) Pour $\Omega = B_{\mathbb{R}^N}(0,R)$, on prend $d(x) = (x^2 - R^2)/(2R)$.
(ii) Pour $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N; x_N > \psi(x_1, ..., x_{N-1})\}$, avec $\psi : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ de classe C^k, on prend $d(x) = \psi(x_1, ..., x_{N-1}) - x_N$.

Théorème 2.3 (Formule de Stokes). Soit Ω un ouvert de classe C^2. Il existe une mesure positive $d\sigma$ sur $\partial\Omega$ telle que

$$\forall\, E \in C^1_c(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N) \qquad \int_\Omega \mathrm{div}_x\, E(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} E(y)\cdot n(y)\, d\sigma(y). \tag{2.1}$$

Preuve du théorème 2.3. On procède en 5 étapes.
Etape 1. Définition et approximation régulière de T. On pose $T := -\sum \partial_j d\, \partial_j \mathbf{1}_\Omega$. Alors T est bien définie comme distribution d'ordre 1 car c'est le produit d'une fonction de classe C^1 et de la dérivée d'une distribution d'ordre 0 (voir l'exercice 1.8). Soit maintenant $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$ décroissante telle que $\theta(t) = 1$ si $t \le -1$, $\theta(t) = 0$ si $t \ge 0$. Posons $\theta_k(x) = \theta(k\, d(x))$. De $\theta_k(x) \to \mathbf{1}_\Omega(x)$ p.p. dans $\mathbb{R}^N$ lorsque $k \to \infty$ et du théorème de convergence dominée on déduit que $\theta_k \to \mathbf{1}_\Omega$ au sens $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, et donc $M^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ et $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. Posons $T_k = -\sum \partial_j d\, \partial_j \theta_k \in C^1(\mathbb{R}^N)$. On a alors $T_k \rightharpoonup T$.
Etape 2. T est une mesure positive portée par $\partial\Omega$. D'une part, T est positive puisque

$$T_k = -\sum (\partial_j d)\, (\partial_j d)\, (k\, \theta'(k\, d) = -|\nabla d|^2\, \theta'(k\, d) \ge 0$$

de sorte que $T = \lim T_k \ge 0$ également. D'autre part, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ tel que $\mathrm{supp}\,\varphi \cap \partial\Omega = \emptyset$ on a

$$\langle T, \varphi\rangle = -\sum_{j=1}^N \langle \frac{\partial d}{\partial x_j}\, \frac{\partial}{\partial x_j}\mathbf{1}_\Omega, \varphi\rangle = \sum_{j=1}^N \langle \mathbf{1}_\Omega, \partial_j(\varphi\, \partial_j d)\rangle = \int_\Omega \mathrm{div}(\varphi\, \nabla d)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{div}(\,\overline{\varphi\, \nabla d}\,)\, dx = 0,$$

où pour une fonction $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ on note $\bar\psi$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^N$ par $\bar\psi(x) = \psi(x)$ si $x \in \Omega$, $\bar\psi(x) = 0$ si $x \in \Omega^c$. Pour la dernière égalité on utilise (N fois) que pour une fonction $u \in C^1_c(\mathbb{R})$ on a $\displaystyle\int_\mathbb{R} u'(x)\, dx = 0$. On a donc $\mathrm{supp}\, T \subset \partial\Omega$.
Etape 3. Pour $a \in \mathbb{R}^N$ un vecteur non nul (unitaire) et T une fonction de classe C^1 ou simplement une distribution, on note $\partial_a T = e_a \cdot \nabla T$ avec $e_a = a/|a|$, $|.|$ désignant la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^N$, la dérivée de T dans la direction a. Posons $d\sigma := |\nabla d(x)|^{-1}\, T = -n \cdot \nabla \mathbf{1}_\Omega = -\frac{\partial}{\partial n}\mathbf{1}_\Omega$. Cette mesure est bien définie

puisque $\operatorname{supp} T \subset \partial\Omega$ et, $|\nabla d(x)|$ étant continue et $\neq 0$ sur $\partial\Omega$, $|\nabla d|^{-1}$ est une fonction continue sur $\partial\Omega$. On a également $\operatorname{supp} d\sigma \subset \partial\Omega$. Montrons que

$$n_j\, d\sigma = -\frac{\partial}{\partial x_j}\mathbf{1}_\Omega \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N).$$

En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ on a

$$\begin{aligned}\langle n_j d\sigma, \varphi\rangle &= \langle \frac{\partial_j d}{|\nabla d|^2}\, T, \varphi\rangle = \langle T, \frac{\partial_j d}{|\nabla d|^2}\, \varphi\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle T_k, \frac{\partial_j d}{|\nabla d|^2}\, \varphi\rangle = -\lim_{k\to\infty} k\, \langle |\nabla d|^2\, \theta'(k\, d), \frac{\partial_j d}{|\nabla d|^2}\, \varphi\rangle \\ &= -\lim_{k\to\infty} \langle k\, \theta'(k\, d)\, \partial_j d, \varphi\rangle = -\lim_{k\to\infty} \langle \partial_j \theta_k, \varphi\rangle = -\langle \partial_j \mathbf{1}_\Omega, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Pour $E \in C^1_c(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$, on en déduit la formule de Stokes

$$\int_\Omega \operatorname{div} E\, dx = \langle \mathbf{1}_\Omega, \sum_j \partial_j E_j\rangle = \langle -\sum_j \partial_j \mathbf{1}_\Omega, E_j\rangle = \langle \sum_j n_j\, d\sigma, E_j\rangle = \langle d\sigma, n\cdot E\rangle.$$

Etape 4. Pour conclure, il nous faut expliquer pourquoi la notation sous forme d'intégrale de bord dans (2.1) est justifiée.
Commençons par montrer que $d\sigma$ définit une mesure de Radon sur $\partial\Omega$, i.e. $d\sigma \in M^1_{loc}(\partial\Omega) = (C_c(\partial\Omega))'$. Soit en effet $\varphi \in C_c(\partial\Omega)$. D'après le théorème de prolongement de Tietze-Urysohnn, il existe une fonction $\phi \in C_b(K)$, avec K un compact tel que $\operatorname{int}(K)$ est un voisinage de $L := \partial\Omega \cap \operatorname{supp}\varphi$, telle que $\phi|_{\partial\Omega} = \varphi$. On peut prendre, par exemple, $\phi(x) = \varphi(x)$ si $x \in L$ et $\phi(x) = \inf_{y\in L}[\varphi(y)\, d(x,y)/d(x,\partial\Omega)]$ si $x \in K\backslash L$. On note $\bar\phi$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^N$ en prolongeant ϕ par 0 en dehors de K. La fonction $\psi := \bar\phi * \rho_n \in C_c(\mathbb{R}^N)$ satisfait $\psi|_{\partial\Omega} = \varphi$ pour n assez grand. On définit alors $d\sigma' \in M_{loc}(\partial\Omega)$ par $\langle d\sigma', \varphi\rangle = \langle d\sigma, \psi\rangle$. Cette définition ne dépend pas bien sûr de la construction de ψ puisque $\operatorname{supp} d\sigma \subset \partial\Omega$.
L'étape suivante est d'utiliser le théorème de représentation de Riesz (ou Radon-Riesz, ou Markov-Riesz) qui affirme (entre autres) que toute forme linéaire positive Λ de $C_c(\partial\Omega)$ (cela signifie $\Lambda : C_c(\partial\Omega) \to \mathbb{R}$ est linéaire et $\forall\, \varphi \in C_c(\partial\Omega)$ telle que $\varphi \geq 0$ alors $\langle \Lambda, \varphi\rangle \geq 0$) s'identifie avec une mesure borélienne λ positive σ-finie sur $\partial\Omega$ (celle du cours d'intégrale de Lebesgue: λ est une "mesure ensembliste" définie sur la tribu borélienne de $\partial\Omega$ (pour la topologie induite par la norme euclidienne de $\mathbb{R}^N$) et finie sur les compacts de $\partial\Omega$) de la manière suivante:

$$\forall\, \varphi \in C_c(\partial\Omega) \qquad \langle \Lambda, \varphi\rangle = \int_{\partial\Omega} \varphi\, d\lambda.$$

En notant encore $d\sigma$ la "mesure borélienne" associée à la "mesure de Radon" $d\sigma'$ on obtient le résultat escompté. ◫

Exercice 2.4. (i) Montrer que la normale extérieure n ne dépend pas de la fonction distance d choisie dans la définition du fait que Ω est de classe C^2. [Ind. On pourra montrer que "localement" Ω est toujours de la forme de l'exemple (ii) ci-dessus]. En déduire que $d\sigma$ ne dépend pas du choix de d.
(ii) Supposons que Ω est de la forme de l'exemple (ii) ci-dessus avec $\psi \in C^2(\mathbb{R}^{N-1})$. Etablir l'identité

$$\int_{\partial\Omega} \varphi\, d\sigma = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \varphi(x', \psi(x'))\, \sqrt{1 + |\psi(x')|^2}\, dx'.$$

En déduire que pour tout ouvert de classe C^2 on a $\operatorname{supp} d\sigma = \partial\Omega$.
(iii) Soit $\chi \in C^1(\mathbb{R}^N)$ telle que $\chi \equiv 1$ sur un voisinage de $\partial\Omega$ et $\chi \equiv 0$ sur un voisinage de $\{x \in \mathbb{R}^N;\ \nabla d(x) = 0\}$. On définit $n(x) := \chi(x)\, \nabla d(x)/|\nabla d(x)| \in C^1(\mathbb{R}^N)$. Montrer que

$$\forall\, \varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^N) \qquad \int_{\partial\Omega} \varphi(\sigma)\, d\sigma = \int_\Omega \operatorname{div}(\varphi(x)\, n(x))\, dx. \tag{2.2}$$

(iv) Montrer que $d\sigma = \lim \varepsilon^{-1}\, \mathbf{1}_{\{-\varepsilon<d<\varepsilon\}}$ (lorsque l'on a normalisé d de sorte que $|\nabla d| = 1$ sur $\partial\Omega$?).

Applications 2.5.

• Si $\Omega =]0,1[$, on prend $d(x) = x\,(x-1)$ de sorte que $n(0) = -1$, $n(1) = 1$, $d\sigma = \delta_0 + \delta_1$ et on retrouve la formule usuelle de l'intégrale de la dérivée d'une fonction ("formule fondamentale du calcul intégral").

• Si $\Omega = B_{\mathbb{R}^N}(0,R)$ alors on prend $d(x) = R^2 - |x|^2$ de sorte que $n(x) = x/R$. La mesure associée $d\sigma_R$ sur $\partial\Omega = S^{N-1}_R$ est la mesure de Lebesgue portée par S^{N-1}_R. Elle vérifie les propriétés suivantes:
(i) *homothétie :* $d\sigma_R$ se déduit de $d\sigma_1 = d\omega$ par la relation:

$$\forall\, R > 0, \quad \forall\, \varphi \in C(S^{N-1}_1) \qquad \int_{S^{N-1}_R} \varphi\, d\sigma_R = R^{N-1} \int_{S^{N-1}} \varphi_R\, d\omega, \qquad \varphi_R(x) = \varphi(R\,x).$$

En particulier, $\mathrm{mes}(S_R) = R^{N-1}\,\mathrm{mes}(S_1)$.
(ii) *invariance par rotation :* $d\omega$ est invariante par rotation:

$$\forall\, R \in SO(\mathbb{R}^N), \quad \forall\, \varphi \in C(S^{N-1}_1) \qquad \int_{S^{N-1}} \varphi \circ R\, d\omega = \int_{S^{N-1}} \varphi\, d\omega.$$

En particulier, $\mathrm{supp}\,(d\omega) = S^{N-1}$.
(iii) On a le lien suivant entre intégrale de volume et intégrale de surface: pour toute fonction $\varphi \in C(B_R)$

$$\frac{d}{dR}\int_{B_R} \varphi\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\int_{R<|x|<R+\varepsilon} \varphi\, dx = \int_{S_R} \varphi\, d\sigma_R \quad \text{et} \quad \int_{B_R} \varphi\, dx = \int_0^R \int_{S_r} \varphi\, d\sigma_r\, dr.$$

(iv) Il est habituel de définir la mesure de surface $\tilde\omega$ sur S^{N-1} induite par la mesure de Lebesgue λ dans $\mathbb{R}^N$ de la manière suivante. Pour tout A borélien de S^{N-1} on définit $C_A = \{t\,x,\ x \in A,\ t \in [0,1]\}$ le borélien de $\mathbb{R}^N$ et $\tilde\omega(A) = \lambda(C_A)$. Vérifier que $\omega = \tilde\omega$.

Preuve des propriétés de la mesure uniforme sur la sphère. On démontre les propriétés pour $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^N)$ en utilisant la formule de Stokes, puis on généralise par densité.
(i) En posant $x = r\,y$, on a $y \cdot \nabla_y(\varphi_r(y)) = x \cdot (\nabla\varphi)(x)$. On en déduit

$$\begin{aligned}
\int_{S_r} \varphi\, d\sigma_r &= \int_{B_r} \mathrm{div}_x\,(\frac{x}{r}\,\varphi)\, dx = r^{-1}\int_{B_r} (x\cdot\nabla_x\varphi + N\,\varphi)\, dx \\
&= r^{N-1}\int_{B_1} (y\cdot\nabla_y\varphi_r(y) + N\,\varphi_r(y))\, dy = r^{N-1}\int_{B_1} \mathrm{div}_y\,(y\,\varphi_r)\, dy = r^{N-1}\int_{S_1} \varphi_r\, d\sigma_1.
\end{aligned}$$

(ii) On remarque que $x \cdot \nabla(\varphi\circ R) = (R\,x)\cdot(\nabla\varphi)(R\,x)$ [c'est juste $\nabla = D^t$ et $D(\varphi\circ R) = (D\varphi)\circ R\,DR$]. On en déduit en posant $x = R\,y$

$$\int_{S_1} \varphi\circ R\, d\omega = \int_{B_1} (x\cdot\nabla_x(\varphi\circ R) + N\,\varphi\circ R)\, dx = \int_{B_1} (y\cdot\nabla_y\varphi(y) + N\,\varphi(y))\, dy = \int_{S_1} \varphi\, d\omega.$$

(iii) On a d'une part avec les notations de (i)

$$\frac{d}{dR}\int_{B_R} \varphi\, dx = \frac{d}{dR}\left[R^N \int_{B_1} \varphi_R\, dx\right] = R^N \int_{B_1} \frac{d}{dR}\varphi_R\, dx + N\,R^{N-1}\int_{B_1} \varphi_R\, dx.$$

Or $\frac{d}{dR}\varphi_R(x) = x\cdot(\nabla\varphi)(R\,x)$. On en déduit

$$\frac{d}{dR}\int_{B_R} \varphi\, dx = R^{N-1}\int_{B_1} [(x\cdot\nabla\varphi)_R + N\,\varphi_R]\, dx = \int_R \mathrm{div}(\varphi\, x/R)\, dx = \int_{S_R} \varphi\, d\sigma_R.$$

• Soit $\mathcal{O}$ un ouvert (de classe C^2) et notons $d_{\mathcal{O}}$, $n_{\mathcal{O}}$ et $d\sigma_{\mathcal{O}}$ la distance au bord, la normale unitaire extérieure et la mesure de surface du bord associées et définie au théorème 2.3. Alors pour tout ouvert Ω (de classe C^2) on peut prendre $d_{\bar\Omega^c} = -d_{\Omega}$, de sorte que $n_{\bar\Omega^c} = -n_{\Omega}$, et enfin $d\sigma_{\Omega^c} = d\sigma_{\Omega}$ puisque pour toute fonction $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^N)$, d'après l'exercice 1.4.a,

$$\int_{\partial\Omega} \varphi \, d\sigma_{\Omega} = \int_{\Omega} \mathrm{div}_x(n_\Omega \, \varphi) \, dx = -\int_{\Omega^c} \mathrm{div}_x(n_\Omega \, \varphi) \, dx = \int_{\Omega^c} \mathrm{div}_x(n_{\Omega^c} \, \varphi) \, dx = \int_{\partial(\Omega^c)} \varphi \, d\sigma_{\Omega^c} = \int_{\partial\Omega} \varphi \, d\sigma_{\Omega^c}.$$

• Formule de Green. En prenant $E = u \, \nabla v$ puis $E = v \, \nabla u$ avec $u, v \in C^2(\bar\Omega)$ on obtient

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + u \, \Delta v = \int_{\partial\Omega} u \, \frac{\partial v}{\partial n} \, d\sigma$$

et

$$\int_{\Omega} (u \, \Delta v - v \, \Delta u) = \int_{\partial\Omega} (u \, \frac{\partial v}{\partial n} - v \, \frac{\partial u}{\partial n}) \, d\sigma.$$

• Solution élémentaire du Laplacien. On a

$$-\Delta \, \frac{1}{|x|^{N-2}} = (N-2) \, \mathrm{mes}(S^{N-1}) \, \delta_0 \quad \text{au sens} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N).$$

On commence par remarquer que $\partial_i |x| = x_i/|x|$, $\partial_i |x|^a = a \, x_i \, |x|^{a-2}$ puis $\partial^2_{ij} |x|^a = a \, \delta_{ij} \, |x|^{a-2} + a \, (a - 2) \, x_i \, x_j \, |x|^{a-4}$ et donc

$$\Delta |x|^a = |x|^{a-2} \sum_i (a + a \, (a-2) \, x_i^2 \, |x|^{-2}) = a \, |x|^{a-2} \, (N + a - 2) = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$$

si, et seulement si, $a = 2 - N$. Pour effectuer le calcul dans $\mathbb{R}^N$, on remarque que $|x|^{2-N} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ de sorte que la première identié qui suit est vraie au sens des distributions dans $\mathbb{R}^N$, la seconde résulte du théorème de convergence dominée et la troisième est la seconde formule Green présentée ci-dessus (ainsi que le fait que $\Delta |x|^{2-N} = 0$ dans $\mathbb{R}^N \backslash \{0\}$):

$$\langle \Delta \, \frac{1}{|x|^{N-2}}, \varphi \rangle \quad = \quad \langle \frac{1}{|x|^{N-2}}, \Delta \, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B^c_\varepsilon} \frac{\Delta\varphi(x)}{|x|^{N-2}} \, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial(B^c_\varepsilon)} (\varphi \, \frac{\partial |x|^{2-N}}{\partial n} - |x|^{2-N} \, \frac{\partial \varphi}{\partial n}) \, d\sigma_\varepsilon,$$

où $n(x) = -n_{(B_\varepsilon)^c} = x/|x|$ désigne la normale extérieure à B_ε. Pour la première intégrale, on a grâce à $\frac{\partial}{\partial n} |x| = n \cdot \nabla |x| = (x/|x|) \cdot (x/|x|) = 1$ sur S^{N-1}_ε

$$\int_{S_\varepsilon} \varphi \, \frac{\partial |x|^{2-N}}{\partial n} \, d\sigma_\varepsilon = (2-N) \int_{S_\varepsilon} \varphi \, |x|^{1-N} \, d\sigma_\varepsilon = (2-N) \int_{S_1} \varphi(\varepsilon \, \omega) \, d\omega \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} (2-N) \, \varphi(0) \int_{S_1} d\omega.$$

Pour la seconde intégrale, on a

$$-\int_{S_\varepsilon} |x|^{2-N} \, \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, d\sigma_\varepsilon = -\varepsilon \int_{S_1} \frac{\partial \varphi}{\partial n} (\varepsilon \, \omega) \, d\omega \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

II.3 - Autours de la convolution.

Commençons par quelques résultats généraux

Lemme 3.1. *(Interversion de la dualité, de la dérivation et de l'intégration).* Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^M$.

(i) Soient $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\varphi = \varphi(x,y) \in C(\Omega \times \mathcal{O})$ qui satisfait $\partial_x^\alpha \varphi \in C^k(\Omega \times \mathcal{O})$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ et un certain $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ fixé et pour tout $y \in \mathcal{O}$ il existe $\delta_y > 0$ et $K_y \subset \Omega$ compact tels que $\operatorname{supp} \varphi(.,y') \subset K_y$ $\forall\, y' \in B_{\mathbb{R}^M}(y,\delta_y)$. Alors $y \mapsto \langle T, \varphi(.,y)\rangle \in C^k(\mathcal{O})$ et pour tout $\beta \in \mathbb{N}^M$, $|\beta| \le k$, pour tout $L \subset \mathcal{O}$ compact on a

$$\partial^\beta \langle T, \varphi(.,y)\rangle = \langle T, (\partial_y^\beta \varphi)(.,y)\rangle \quad \text{et} \quad \int_L \langle T, \varphi(.,y)\rangle\, dy = \langle T, \int_L \varphi(.,y)\, dy\rangle. \tag{3.1}$$

Si de plus $\varphi \in C_c(\Omega \times \mathcal{O})$ on a $y \mapsto \langle T, \varphi(.,y)\rangle \in C_c^k(\mathcal{O})$ et on peut prendre $L = \mathcal{O}$.

Preuve du Lemme 3.1. D'une part, pour tout $y \in \mathcal{O}$, $1 \le i \le M$, on a

$$t^{-1}(\varphi(.,y+t\,e_i) - \varphi(.,y+t\,e_i) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial e_i}(,y+t\,s\,e_i)\, ds \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \varphi(,y) \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}(\Omega),$$

et donc $G(y) = \langle T, \varphi(.,y)\rangle$ est dérivable au sens de Gâteaux, $\nabla_y G = \langle T, \nabla_y \varphi(.,y)\rangle$. On obtient le premier résultat par itération des dérivations.

D'autre part, pour toute partition $(\omega_k^n)_{1\le k\le n}$ de $\mathcal{O}$, i.e. ω_k^n ouverts disjoints pour $k = 1,...,n$, $\mathcal{O} = \cup_{k=1}^n \bar\omega_k^n$, $y_k^n \in \omega_k^n$, $sup_{1\le k\le n}\Delta_k^n \to 0$ lorsque $n \to \infty$, $\Delta_k^n = \operatorname{diam}(\omega_i^k)$ on a

$$\int_{\mathcal{O}} \langle T, \varphi(.,y)\rangle\, dy = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \Delta_k^n \langle T, \varphi(.,y_k^n)\rangle = \langle T, \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \Delta_k^n \varphi(.,y_k^n)\rangle = \langle T, \int_{\mathcal{O}} \varphi(.,y)\, dy\rangle,$$

puisque les intégrales qui inteviennent sont des intégrales de Riemann pour des fonctions uniformément continues. ◫

Exercice 3.1. a) - Soient $\varphi = \varphi(x,y) \in \mathcal{D}(\Omega \times \mathcal{O})$ et $T_n \rightharpoonup T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Montrer $\langle T_n, \varphi(.,y)\rangle \to \langle T, \varphi(.,y)\rangle$ dans $\mathcal{D}(\mathcal{O}_y)$. Montrer de même que si $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega \times \mathcal{O})$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ alors $\langle T, \varphi_n(.,y)\rangle \to \langle T, \varphi(.,y)\rangle$ dans $\mathcal{D}(\mathcal{O}_y)$.

b) - Généraliser a) au cadre du Lemme 3.1.

Corollaire 3.2. *(Lemme fondamental du calcul intégral).* Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $x \in B(0,\delta_\varphi)$, $\delta_\varphi := \operatorname{dist}(\operatorname{supp} \varphi, \Omega^c)$, on a

$$\langle T, \varphi_x\rangle - \langle T, \varphi\rangle = \int_0^1 \langle x \cdot \nabla T, \varphi_{tx}\rangle\, dt, \tag{3.3}$$

où pour une fonction ψ et un vecteur y on note $\psi_y := \tau_y \psi$. En particulier, pour $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$, on a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^N \qquad u(y+x) - u(y) = \int_0^1 x \cdot \nabla u(y+t\,x)\, dt \quad \text{pour p.t.} \quad y \in \widetilde{\Omega}_x = \bigcap_{0\le t\le 1} \tau_{t\,x}\Omega. \tag{3.4}$$

Preuve du Corollaire 3.2. Commençons par démontrer (3.3). On a, grâce au lemme 3.1 et au lemme fondamental du calcul intégral pour les fonctions régulières que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et tout $x \in B(0,\delta_\varphi)$

$$\int_0^1 \langle x \cdot \nabla T, \varphi_{tx}\rangle\, dt = \langle T, \int_0^1 (-x) \cdot \nabla \varphi_{tx}\, dt\rangle = \langle T, \varphi_x - \varphi\rangle,$$

où on a utilisé que $(-x) \cdot (\nabla\varphi)_{tx}(y) = \frac{d}{dt}[\varphi(x - t\,x)]$ pour tout $y \in \Omega$ et $t \in (0,1)$.

Lorsque $T = \{u\}$ avec $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$, on a donc par changement de variables et théorème de Fubini

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u(y+x)\, \varphi(y)\, dy &= \int_\Omega u(z)\, \varphi_x(z)\, dz = \int_\Omega u(z)\, \varphi(z)\, dz + \int_0^1 \int_\Omega u(z)\, (-x) \cdot \nabla \varphi(z - t\,x)\, dz dt \\
&= \int_\Omega \left\{ u(y) + \int_0^1 x \cdot \nabla u(y+t\,x)\, dt \right\} \varphi(y)\, dy.
\end{aligned}$$

On conclut grâce au lemme 1.1 (iii) ◫

Nous cherchons une définition de la convolution au sens des distributions compatible avec celle définie pour des fonctions. Soient $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ et g, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et prenons $\Omega = \mathbb{R}^N$ pour ne pas discuter des domaines de définition. D'une part, par définition de la convolution, on a pour tout $x \in \Omega$

$$x \mapsto (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\, g(x-y)\, dy = \langle \{f\}, \tau_x(g^\vee)\rangle \in C^\infty(\Omega). \tag{3.8}$$

D'autre part, par Fubini, on a

$$\langle \{f * g\}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} (f*g)(x)\, \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\, (g^\vee * \varphi)(y)\, dy = \langle \{f\}, g^\vee * \varphi\rangle. \tag{3.9}$$

Nous allons définir ci-dessous la convolution à partir des deux identités précédentes. Toutefois, il est courant de définir la convolution à partir d'une troisième expression qui fait intervenir le produit tensoriel de distributions. Nous renvoyons cette définition à plus tard, mais nous présentons ci-dessous le calcul qui permettra de motiver cette troisème définition. Par le théorème de Fubini et changement de variable, on a

$$\langle \{f * g\}, \varphi\rangle_{\mathbb{R}^N} = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} f(x) g(z-x)\varphi(z)\, dxdz = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)g(y)\varphi(x+y)\, dxdy = \langle \{f \otimes g\}, \tilde\varphi\rangle_{\mathbb{R}^{2N}}, \tag{3.10}$$

où le produit tensoriel des fonctions f et g est défini par $(f\otimes g)(x,y) = f(x)\, g(y)$ et $\tilde\varphi(x,y) = \varphi(x+y)$.

Définition-Proposition 3.4. Soient $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\Omega = \mathbb{R}^N$. On définit la convolution de T et φ comme fonction par

$$(T *_1 \varphi)(x) = \langle T, \tau_x \varphi^\vee\rangle \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.11}$$

On définit la convolution de T et φ comme distribution par

$$\langle T *_2 \varphi, \psi\rangle = \langle T, \varphi^\vee * \psi\rangle \qquad \forall\, \psi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{3.12}$$

Alors $T *_1 \varphi \in C^\infty(\Omega)$, $\partial^\alpha(T *_1 \varphi) = T *_1 (\partial^\alpha \varphi)\ \forall\, \alpha$, $T *_2 \varphi \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $*_1$ et $*_2$ coïncident: $\{T *_1 \varphi\} = T *_2 \varphi$, ou encore il y a *"permutation de la convolution et de la dualité"*

$$\langle \{T *_1 \varphi\}, \psi\rangle = \int_\Omega \langle T, \tau_x\varphi^\vee\rangle\, \psi(x)\, dx = \langle T, \int_\Omega (\tau_x \varphi^\vee)\, \psi(x)\, dx\rangle = \langle T, \varphi^\vee * \varphi\rangle \quad \forall\, \psi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ ou } L^1_c(\Omega). \tag{3.13}$$

On note $T * \varphi = T *_1 \varphi = T *_2 \varphi$. Enfin donc,

$$\partial^\alpha (T * \varphi) = T * (\partial^\alpha \varphi) = (\partial^\alpha T * \varphi) \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^N \tag{3.14}$$

Remarques 3.5. a) - On montre que

$$\mathcal{D}' \star \mathcal{D} \subset \mathcal{E}; \qquad \mathcal{S}' \star \mathcal{S} \subset \mathcal{E}; \qquad \mathcal{E}' \star \mathcal{E} \subset \mathcal{E}; \qquad \mathcal{E}' \star \mathcal{D} \subset \mathcal{D}.$$

b) - Si $\Omega \neq \mathbb{R}^N$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ alors $T * \varphi$ est définie sur $\mathcal{O}_\varphi = \{x \in \Omega;\ \mathrm{supp} \tau_x \varphi \subset \Omega\} = \{x \in \Omega;\ \mathrm{supp}\varphi \subset \tau_x\Omega\}$. Autrement dit, si ω est un ouvert tel que $\bar\omega \subset \Omega$, alors $T * \varphi$ est définie sur ω pour tout $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que $\mathrm{supp}\,\varphi \subset B(0,\delta)$, $\delta = \mathrm{dist}(\bar\omega, \Omega^c) > 0$. Cela doit être possible de faire un argument de prolongement et de définir la convolution par l'expression $T * \varphi = \bar T * \varphi$ où $\bar T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ est définie dans la définition 1.14.(ii).
c) - Soient T et S deux distributions. On définit la convolution de T et S comme distribution, dès que l'expression de droite a un sens:

$$\langle T \star S, \varphi\rangle := \langle T, S^\vee \star \varphi\rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \tag{3.15}$$

On a

$$\mathcal{D}' \star \mathcal{E}' = \mathcal{E}' \star \mathcal{D}' \subset \mathcal{D}'; \qquad \mathcal{E}' \star \mathcal{E}' \subset \mathcal{E}'; \qquad \mathcal{S}' \star \mathcal{S} \subset \mathcal{S}' \,(\cap \mathcal{E}).$$

d) - Pour $f \in L^1_{loc}$ ou même $\mu \in M^1_{loc}$, cette notion de convolution coïncide avec la convolution usuelle

$$(\mu * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x-y)\, d\mu(y) \qquad \forall\, \varphi \in C_c(\Omega).$$

e) - La masse de Dirac centrée en l'origine δ_0 est l'élément neutre: $T * \delta_0 = T \;\forall\, T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.
f) - Pour $S, T \in \mathcal{E}'$ on a $\operatorname{supp}(S * T) \subset \operatorname{supp} S + \operatorname{supp} T$.

Preuve de la Proposition 3.4. Les propriétés de $*_1$ proviennent de l'exercice 3.1.b. Pour établir (3.13) on fixe $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et on applique le lemme 3.1 à la fonction $\phi(y,x) = (\tau_x(\varphi^\vee))(y)\, \psi(x) = \varphi(x-y)\, \psi(x)$. L'identité (3.13) a également lieu pour tout $\psi \in L^1_c(\Omega)$, ce que l'on voit en raisonnant par densité et en remarquant que les deux termes extrêmes ont un sens pour de telles fonctions. Pour établir la formule de dérivation qui manque dans (3.14), on calcule

$$\langle \partial^\alpha (T * \varphi), \psi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \varphi^\vee * \partial^\alpha \psi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha (\varphi^\vee * \psi) \rangle = \langle (\partial^\alpha T) * \varphi, \psi \rangle$$

pour $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ fixé. ◫

Exercice 11. a) - Calculer à partir de la définition (6) et (6′) le produit de convolution $H \star H$. Retrouver le résultat en calculant à partir d'une intégrale $H \star H$.
c) - Calculer les produits de convolutions $\delta' \star 1$, $\delta' \star H$, puis $(1 \star \delta') \star H$ et $1 \star (\delta' \star H)$. Conclure et expliquer.
d) - Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Montrer que $T \star \delta = T$, $T \star \delta_a = \tau_a T$. Montrer que $\delta_a \star \delta_b = \delta_{a+b}$.

Théorème 3.6. *(Approximation d'une distribution par des fonctions régulières).* Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Il existe une suite (T_n) de $C^\infty(\Omega)$ telle que $T_n \rightharpoonup T$ au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Preuve du Théorème 3.6. Soient ρ_n une suite régularisante et ζ_n une suite de troncatures dans Ω (i.e. $\zeta_n \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\zeta_n \equiv 1$ sur $\operatorname{supp} \zeta_{n+1}$ et $\operatorname{supp} \zeta_n \to \Omega$) telles que $\operatorname{supp} \rho_n + \operatorname{supp} \zeta_n \subset \Omega$. Alors $T_n = (\zeta_n\, T) \star \rho_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $T_n \rightharpoonup T$ dans $\mathcal{D}'$. ◫

Lemme 3.7. *(Les distributions de dérivées nulles sont les constantes).* Soit Ω un ouvert connexe et soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $\nabla T = 0$. Alors il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que $T = \{C\}$.

Nous donnerons une preuve complète du Lemme 3.7 après le Théorème 3.9. Nous proposons ici en exercice une preuve (légèrement) différente.

Preuve du Lemme 3.7 en exercice.

a) - On suppose d'abord $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$. Montrer qu'il existe une suite régularisante (ρ_n) et une suite réelle (C_n) telles que $\{T * \rho_n\} = C_n$. Montrer que (C_n) est bornée et en déduire que T est une constante.
b) - Traiter le cas général. ◫

Théorème 3.7. *(Equivalence de la dérivation au sens classique et au sens des distributions).* Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $G_i = \partial_i T$. Il y a équivalence entre
(i) T est une fonction $f \in C^1(\Omega)$;
(ii) G_i est une fonction $g_i \in C(\Omega)$ pour tout $i = 1, ..., N$.
Dans ce cas $g_i = \partial_i f$ au sens classique.

Preuve du Théorème 3.7. L'implication (i) ⇒ (ii) étant claire, nous ne démontrons que (ii) ⇒ (i). Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Partant de l'identité (3.4), on a pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $|x| < \delta := \operatorname{dist}(\operatorname{supp} \varphi, \Omega^c)$

$$\begin{aligned} \langle T, \varphi \rangle &= \langle T, \varphi_x \rangle - \int_0^1 \langle x \cdot \nabla T, \varphi_{tx} \rangle \, dt \\ &= \langle T, \varphi_x \rangle - \int_0^1 \sum_{i=1}^N x_i \int_\Omega g_i(z)\, \varphi(z - t\, x)\, dx dt \end{aligned}$$

Fixons $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ tel que $\rho \geq 0$, $\operatorname{supp} \rho \subset B_{\mathbb{R}^N}(0, \delta)$ et $\displaystyle\int \rho = 1$. On calcule alors grâce au lemme 3.1

$$
\begin{aligned}
\langle T, \varphi \rangle &= \int \langle T, \varphi_x \rangle \, \rho(x) \, dx - \int \int_0^1 \sum_{i=1}^N x_i \int_\Omega g_i(z) \, \varphi(z - t\, x) \, dz dt \, \rho(x) \, dx \\
&= \int_\Omega \varphi(y) \left(\langle T, \rho_y \rangle - \int \int_0^1 \sum_{i=1}^N x_i \int_\Omega g_i(y + t\, x) \; \rho(x) \, dx dt \right) dy =: \int_\Omega \varphi(y) \, f(y) \, dy.
\end{aligned}
$$

Ainsi $T = \{f\}$, et on note juste $T = f$, avec $f \in C(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$. En particulier $f \in W^{1,1}_{loc}$ puisque $\partial_i \{f\} = g_i \in C(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$. Enfin, grâce à (3.5), on en déduit $\forall\, x, y$ (puisque les fonctions sont continues)

$$
f(x + y) - f(x) = \int_0^1 \sum_{i=1}^N y_i \, g_i(x + t\, y) \, dt = y \cdot g(x) + o_x(|y|),
$$

ce qui prouve que f est de classe C^1 et $\partial_i f = g_i$. ◻

Preuve du Lemme 3.7. Comme $\partial_i T = 0$ on a $T = \{f\}$ avec $f \in C^1$ et $\partial_i f = 0$. On en déduit que f est constante. ◻

Définition 3.7. Soit $p(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \, \xi^\alpha$ un polynôme à N variables. On lui associe l'opérateur différentiel à coefficient constant

$$
P := p(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \, \partial^\alpha.
$$

On dit qu'une distribution $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ est une solution fondamentale ou élémentaire si

$$
P \, E = \delta_0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N).
$$

Lemme 3.7. Soit P opérateur différentiel à coefficient constant et soit E une solution fondamentale. Alors pour tout $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ il existe une solution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ à l'équation aux dérivées partielles non homogènes

$$
P \, u = f \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^N,
$$

et celle-ci est donnée par $u := E \star f$.

Preuve du Lemme. Il suffit de claculer

$$
Pu = P \, (E \star f) = (PE) \star f = \delta \star f = f.
$$

Application 3.7. Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$, $p > N/2$, $N \geq 3$ l'équation

$$
-\Delta \, u = f \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^N
$$

possède une solution au sens des distributions $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ qui est donnée par la formule

$$
u(x) = c_N \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(y)}{|x - y|^{N-2}} \, dy.
$$

Cela résulte du fait que $|x|^{2-N} \in L^\infty + L^q \; \forall \, q < N/(N-2)$.

II.4 - Transformation de Fourier et EDP.

Nous commençons par donner la définition (directe) de la transformée de Fourier et les "propriétés élementaires" dans les espaces L^1, M^1, $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{S}$.

Définition 4.1 - Définition pour une fonction de L^1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. On définit la transformation de Fourier de f comme étant la fonction $\mathcal{F} f = \hat{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^N \qquad \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\, e^{-i\, x\cdot\xi}\, dx.$$

On rappelle que l'on définit $(\mathcal{F}^{\vee} f)(x) = (\mathcal{F} f)(-x)$.

Remarque 4.2. a) - $(\mathcal{F}f)(\xi)$ est bien définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$.
b) - L'application $f \mapsto \mathcal{F}f$ est linéaire.
c) - Il y a bien d'autres façons de définir $\mathcal{F}f$ dans la littérature, par exemple en divisant l'expression (4.1) par $(2\pi)^N$ ou $(2\pi)^{N/2}$ ou en remplaçant $e^{-i\,x\cdot\xi}$ par $e^{-2\,i\,\pi\,x\cdot\xi}$.
d) - On définira la "transformée de Fourier inverse" $\mathcal{F}^{\vee}$ en posant $(\mathcal{F}^{\vee} f)(\xi) = (\mathcal{F}f)(-\xi)$. Celle-ci possède les mêmes propriétés que $\mathcal{F}$.

Propriétés 4.3 (de la TF dans L^1). Pour tout $f \in L^1$, on a
a) - $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^N)$, $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \le \|f\|_{L^1}$.
b) - On définit $(\tau_h f)(x) = f(x-h)$ et $e_\eta(y) = e^{i\,y\cdot\eta}$. On a $\mathcal{F}(\tau_h f) = e_h\, \mathcal{F}(f)$ et $\tau_h(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}(e_h\, f)$.
c) - On définit $(\delta_\lambda f)(x) = f(x/\lambda)$. On a $\mathcal{F}(\delta_\lambda f)(\xi) = \lambda^N\, \delta_{\lambda^{-1}}\, \mathcal{F}(f)(\xi)$.
d) - Pour tout $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ on a $\displaystyle\int \hat{f}\, g = \int f\, \hat{g}$ et $\mathcal{F}(f * g) = \hat{f}\, \hat{g}$.

Preuve de la Propriétés 4.3. On a $\hat{f} \in C(\mathbb{R}^N)$ par convergence dominée. Le seul point délicat est de montrer que $\hat{f}(\xi) \to 0$ lorsque $|\xi| \to \infty$. Pour $f = \mathbf{1}_{[a,b]}$ avec $a, b \in \mathbb{R}^N$, $[a,b] = [a_1, b_1] \times ... \times [a_N, b_N]$ on a

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \int_{[a,b]} e^{-i\,x\cdot\xi}\, dx = \prod_{j=1}^{N} \int_{a_j}^{b_j} e^{-i\,x_j\,\xi_j}\, dx_j = \prod_{j=1}^{N} \left[\frac{e^{-i\,x_j\,\xi_j}}{-i\,\xi_j}\right] \le \frac{C}{|x|}$$

et on raisonne par densité (des combinaisons linéaires de fonctions caractéristiques de pavés dans L^1) pour traiter le cas général. Toutes les autres identités résultent du théorème de Fubini et/ou d'un changement de variables. ◻

Théorème 4.4 (TF d'une Gaussienne). On pose $G_\theta(x) = \exp(-\frac{|x|^2}{2\,\theta})$. On a

$$\hat{G}_\theta(\xi) = (2\,\pi\,\theta)^{N/2}\, \exp\big(-\frac{\theta\,|\xi|^2}{2}\big).$$

Preuve du Théorème 4.4. On se ramène au cas $N = 1$ et $\theta = 1$ par factorisation et dilatation. Dans ce cas, on a

$$\hat{G}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\,x\,\xi}\, e^{-|x|^2/2}\, dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-|x+i\xi|^2/2}\, e^{-|\xi|^2}\, dx =: F(\xi)\, G(\xi)$$

avec $F \in C^1$ (par convergence dominé) et

$$F'(\xi) = \frac{d}{d\xi}\int_{\mathbb{R}} e^{-|x+i\xi|^2/2}\, dx = -\int_{\mathbb{R}} (x+i\,\xi)\, e^{-|x+i\,\xi|^2/2}\, dx = i\int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx} e^{-|x+i\,\xi|^2/2}\, dx = 0.$$

On en déduit $\forall \xi \in \mathbb{R}$ $F(\xi) = F(0) = \sqrt{2\,\pi}$. ◻

Théorème 4.5 (TF inverse). On a $\mathcal{F} \circ \mathcal{F} = (2\pi)^N \, Id^{\vee}$ dans $\mathcal{A}(\mathbb{R}^N) = \{f \in L^1(\mathbb{R}^N); \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^N)\}$. En particulier, pour tout $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^N \qquad f(x) = \frac{1}{(2\,\pi)^N}\, \mathcal{F}^{\vee}(\mathcal{F} f)(x),$$

soit encore $\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-N}\, \mathcal{F}^{\vee}$.

Preuve du Théorème 4.5. D'une part d'après la proposition 4.3.b&d (ou faire un calcul direct) on a

$$(\hat{G}_\theta * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} (\tau_x \hat{G}_\theta)\, f = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}(e_x\, G_\theta)\, f = \int_{\mathbb{R}^N} G_\theta\, e_x\, \hat{f}.$$

D'autre part d'après le théorème 4.4. on a $G_\theta(x) \to 1$ lorsque $\theta \to \infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et $(\hat{G}_\theta)$ est une approximation de l'identité, ou plus exactement $\hat{G}_\theta \rightharpoonup (2\pi)^N\, \delta_0$ lorsque $\theta \to \infty$ au sens de la convergence faible dans $(C_b(\mathbb{R}^N))'$. En passant à la limite $\theta \to \infty$ on en déduit

$$(2\pi)^N\, f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} e_x\, \hat{f} = \mathcal{F}^{\vee} \circ \mathcal{F}(f)(x) \qquad \text{p.p.} \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

On conclut en remarquant que $\mathcal{A}(\mathbb{R}^N) \subset C(\mathbb{R}^N)$. ◻

Proposition 4.6 (Propriétés de la TF dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}$).

a) - Pour tout $f \in \mathcal{S}$, on a $\mathcal{F}(x^\alpha\, f)(\xi) = i^{|\alpha|}\, (\partial_\xi^\alpha\, \hat{f})(\xi)$ et $\mathcal{F}(\partial_x^\beta f)(\xi) = i^{|\beta|}\, \xi^\beta\, \hat{f}(\xi)$.

b) - L'application $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ est bien définie et bicontinue.

c) - Pour tout $f, g \in \mathcal{S}$, on a $f * g \in \mathcal{S}$ et $\mathcal{F}(f * g) = \hat{f}\, \hat{g}$ et on a $f\, g \in \mathcal{S}$ et $\mathcal{F}(f\, g) = (2\,\pi)^N\, \hat{f}\, \hat{g}$.

d) Pour tout $f, g \in \mathcal{S}$ on a (la dernière égalité s'appelle identité de Plancherel)

$$\int \hat{f}\, g = \int f\, \hat{g}, \qquad \int f\, \bar{g} = (2\pi)^{-N} \int \mathcal{F}(f)\, \overline{\mathcal{F}(g)}, \qquad \int |f|^2 = (2\pi)^{-N} \int |\mathcal{F}(f)|^2.$$

Preuve de Proposition 4.6. La propriété a) provient du théorème de dérivation sous le signe somme. Pour prouver la propriété b) on remarquera d'une part que $p_{0,0}(\hat{f}) \le \|f\|_{L^1} \le p_{0,N+1}(f)$ et on utilisera le théorème 4.5 d'autre part. La propriété c) se démontre utilisant les mêmes arguments. La propriété d1) se montre par Fubini. Pour la propriétés d2) on remarque que $\mathcal{F}^{\vee} u = \overline{\mathcal{F}(\bar{u})}$ pour tout u, de sorte que

$$\bar{g} = (2\pi)^{-N}\, \mathcal{F}(\mathcal{F}^{\vee}(\bar{g})) = (2\pi)^{-N}\, \mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}(g)}),$$

et on applique d1). ◻

Définition 4.7 (de la TF dans $M^1(\mathbb{R}^N)$). Si $\mu \in M^1(\mathbb{R}^N) = (C_0(\mathbb{R}^N))'$, on pose

$$\hat{\mu}(\xi) := \langle \mu, e_{-\xi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\, x \cdot \xi}\, d\mu(x).$$

La fonction $\hat{\mu}$ est bien définie, et $\hat{\mu} \in C_b(\mathbb{R}^N)$ (par théorème théorème de représentation de Riesz puis le théorème de convergence dominée).

Définition 4.8 (de la TF dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$). Si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, on pose

$$\hat{T}(\xi) := \langle T, e_{-\xi} \rangle, \qquad e_{-\xi}(x) := e^{-i\, x \cdot \xi}.$$

La fonction $\hat{T}$ est bien définie, $\hat{T} \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $|\hat{T}(\xi)| \le C_M\, (1 + |\xi|)^M$, où M est l'ordre de T.

La première identité de la Proposition 4.3.d nous permet d'étendre (par dualité) la définition de la transformation de Fourier dans l'espace $\mathcal{S}'$ des distributions tempérées.

Définition 4.9 (de la TF dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$). Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, on définit $\hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ par dualité en posant

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle, \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Proposition 4.10. Si $T \in M^1(\mathbb{R}^N)$, et donc à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, les définitions 4.7 et 4.9 coïncident. Si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, et donc à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, les définitions 4.8 et 4.9 coïncident. La transformation de Fourier est inversible dans $\mathcal{S}'$.

Preuve de la Proposition 4.10. En effet, par le lemme 3.1, on a pour tout $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ ou $M^1(\mathbb{R}^N)$ et tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$

$$\langle \{\mathcal{F}T\}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \langle T_x, e^{-i\,x\cdot\xi} \rangle\, \varphi(\xi)\, d\xi = \langle T_x, \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\,x\cdot\xi}\, \varphi(\xi)\, d\xi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle.$$

◻

Exemple 4.11. $\hat{1} = (2\pi)^N\, \delta_0$. En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\langle \hat{1}, \varphi \rangle = \langle 1, \hat{\varphi} \rangle = \int \hat{\varphi}(x)\, dx = \mathcal{F}^{\vee}(\hat{\varphi})(0) = (2\pi)^N \varphi(0).$$

Exercice 4.11. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Montrer que $\hat{\varphi}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. En déduire que si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\hat{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ alors $\varphi \equiv 0$.

Théorème 4.12. a) - Pour tout $\alpha \in (0,1)$, il existe une constante $c_{\alpha,N}$ telle que

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \qquad \mathcal{F}(|.|^{-\alpha}\, \hat{\varphi}(.))^{\vee}(x) = c_{\alpha,N} \int_{\mathbb{R}^N} |x-y|^{\alpha-N}\, \varphi(y)\, dy$$

b) - Par conséquent, pour tout $\alpha \in (0,1)$, il existe une constante $c'_{\alpha,N}$ telle que

$$\mathcal{F}(|.|^{-\alpha})(\xi) = c'_{\alpha,N}\, |\xi|^{\alpha-N}.$$

La dernière identité de la Proposition 4.6.d nous permet d'étendre (par continuité) la définition de la transformation de Fourier de l'espace L^2 dans lui-même.

Théorème 4.13. L'application $\tilde{\mathcal{F}} : L^2 \to L^2$, $u \mapsto (2\pi)^{-N/2}\, \hat{u}$ est une isométrie bijective de L^2 sur lui-même.

Preuve du Théorème 4.13. C'est une conséquence immédiate de l'identité de Plancherel (démontrée pour les fonctions de $\mathcal{S}$), de la densité $\mathcal{S} \subset L^2$ et du théorème de prolongement des applications uniformément continues d'une part, du théorème 4.5 d'autre part. ◻

Définition 4.14 (Espace de Sobolev H^s). Soit $s \in \mathbb{R}$. On définit

$$H^s(\mathbb{R}^N) := \{T \in \mathcal{S}',\ (1+|\xi|^2)^{s/2}\, \hat{T} \in L^2\}.$$

On munit H^s du produit scalaire et de la norme associée

$$(u,v)_s := \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}(u)\, \overline{\mathcal{F}(v)}\, (1+|\xi|^2)^s\, d\xi, \qquad \|u\|_s^2 := \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{u}|^2\, (1+|\xi|^2)^s\, d\xi.$$

Proposition 4.15 (propriétés de H^s).

a) - Si $s_1 \geq s_2$ alors $H^{s_1} \subset H^{s_2}$ avec injection continue;

b) H^s est un espace de Hilbert séparable pour tout $s \in \mathbb{R}$;

c) - $H^k(\mathbb{R}^N)$ coïncide avec la définition de $W^{k,2}(\mathbb{R}^N)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Cela signifie que si $s := m \in \mathbb{N}$ alors

$$H^m(\mathbb{R}^N) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N),\ \|u\|_m < \infty\} = \{u \in L^2(\mathbb{R}^N),\ D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^N)\ \forall \alpha,\ |\alpha| \le m\}$$

et qu'il existe C_1, C_2 telles que

$$C_1\, \|\varphi\|_m^2 \le \sum_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha \varphi\|_{L^2} \le C_2\, \|\varphi\|_m^2 \qquad \forall \varphi \in H^m(\mathbb{R}^N).$$

d) - $H^k(\mathbb{R}^N) \subset C_0^k(\mathbb{R}^N)$ si $s > k + N/2$.

Preuve de la proposition 4.15. Pour a) on utilise que $(1+|\xi|^2)^{s_1} \ge (1+|\xi|^2)^{s_2}$. Pour c) et $k = 1$ on écrit

$$\|u\|_{W^{1,2}}^2 \approx \sum_{\alpha \le 1} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2 \approx \sum_{\alpha \le 1} \|\mathcal{F}(\partial^\alpha u)\|_{L^2}^2 \approx \sum_{\alpha \le 1} \|\xi^\alpha u\|_{L^2}^2 \approx \|(1+|\xi|^2)^{1/2}\, u\|_{L^2}^2 \approx \|u\|_{H^1}^2.$$

Pour d) et $k > N/2$ on écrit pour $u \in H^s$,

$$\int |\hat{u}| = \int |\hat{u}|\, (1+|\xi|^2)^{s/2}\, (1+|\xi|^2)^{-s/2} \le \left(\int |\hat{u}|^2\, (1+|\xi|^2)^s \right)^{1/2} \left(\int (1+|\xi|^2)^{-s} \right)^{1/2} \le C_N\, \|u\|_{H^s}.$$

Donc $u = \mathcal{F}^{-1}(\hat{u}) \in C_0$ et $\|u\|_{C_0} \le \|\hat{u}\|_{L^1} \le C_N\, \|u\|_{H^s}$. ◻

Exercice 4.16. a) - Calculer $\mathcal{F}(H \star H)$. Vérifier que la relation $\mathcal{F}(S \star T) = \mathcal{F}\, S\, \mathcal{F}\, T$ n'est pas vraie pour $S = T = H$ car le produit $\mathcal{F}\, S\, \mathcal{F}\, T$ n'a pas de sens.
b) - Montrer que $u \in H^s$, $\varphi \in \mathcal{S}$ impliquent $u\, \varphi \in H^s$.
c) - Montrer que $\mathcal{S}$ est dense dans H^s.
d) - Montrer que $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $u \in H^s$ impliquent $\partial^\alpha u \in H^{s-|\alpha|}$.
e) - Montrer que $\mathcal{E}' \subset \cup_{s \in \mathbb{R}} H^s$ et $\cap_{s \in \mathbb{R}} H^s \subset \mathcal{E}$.
f) - Montrer que l'on a pas $H^{N/2} \subset C_0$. En dimension $N = 2$ on pourra considérer la fonction $u(x,y) = |\log(|x|^2 + |y|^2)|^\alpha$ avec $\alpha \in]0, 1/2[$.

Exercice 4.17. Soit L l'opérateur différentiel $L = \dfrac{d^2}{dx^2} - q^2$ avec q une constante > 0.
a) - Calculer une solution particulière $G_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de l'équation $L\, G_0 = \delta$. Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, donner une solution de l'équation $L\, u = f$.
b) - Calculer toutes les solutions de l'équation homogène $L\, G_1 = 0$. En déduire les solutions de l'équation $L\, G = \delta$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ chercher les solutions u de l'équation $L\, u = \varphi$ telles que $u(x) \to 0$ lorsque $|x| \to \infty$. Même chose pour $u \in L^2$.

Exercice 4.18. Montrer que pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ donnée, il existe un unique $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$ tel que $-\Delta u + u = f$. Peut-on donner un sens à cette équation lorsque $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

II.5 - Eléments de correction des exercices.

Exercice 0.2. (i) Supposons par l'absurde que T est séquentiellement continue, mais ne satisfait pas à l'inégalité annoncée. Il existe donc un compact K et pour tout $k \in \mathbb{N}$ une fonction $\varphi_k \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ telle que

$$\langle T, \varphi_k \rangle > k \sup_{|\alpha| \le k} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha \varphi_k(x)|.$$

On définit $\tilde{\varphi}_k := \varphi_k / \langle T, \varphi_k \rangle$. Alors d'une part, $\langle T, \tilde{\varphi}_k \rangle = 1\ \forall k$. Et d'autre part, $\sup_{|\alpha| \le k} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha \tilde{\varphi}_k(x)| \le 1/k\ \forall k$, de sorte que $\tilde{\varphi}_k \to 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ et donc $\langle T, \tilde{\varphi}_k \rangle \to 0$!

Exercice 1.4. Pour $\psi \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ on a $\operatorname{supp}\psi \subset [-M,M]^N$ pour un certain $M>0$ et donc, par exemple,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \psi}{\partial x_N}\, dx = \int_{-M}^{M} \frac{\partial}{\partial x_N} \left\{ \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \psi(x', x_N)\, dx' \right\} dx_N = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \psi(x', M)\, dx' - \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \psi(x', -M)\, dx' = 0.$$

Exercice 1.9. Soit $K \subset \Omega$ et $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $\psi \equiv 1$ sur K, $0 \le \psi \le 1$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ supp $\varphi \subset K$. On a $\phi := \|\varphi\|_{L^\infty}\, \psi - \varphi \in \mathcal{D}$, $\phi \ge 0$ de sorte que $\langle T, \phi\rangle \ge 0$. On a donc

$$\langle T, \varphi \rangle \le C_K\, \|\varphi\|_{L^\infty} \quad \text{avec} \quad C_K := \langle T, \psi\rangle.$$

Exercice 2.4. (i) Fixons $x_0 \in \partial\Omega$. Comme $\nabla d(x_0) \neq 0$, une des coordonnées de $\nabla d(x_0)$ est non nulle, et on peut supposer pour simplifier que c'est la dernière: $\partial_{x_N} d(x_0) \neq 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, on notera alors $x = (x', x_n)$ avec $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$, $x_N \in \mathbb{R}$. D'après le théorème des fonctions implicites il existe donc $r > 0$, un voisinage U de x_0 dans $\mathbb{R}^N$ et $\psi : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ de classe C^k (k étant la régularité de Ω) tels que $\partial\Omega \cap U = \{(x', \psi(x')),\ x' \in B_{\mathbb{R}^{N-1}}(x_0', r)\}$. Et on peut supposer que $\Omega \cap U = \{(x', y_N),\ x' \in B_{\mathbb{R}^{N-1}}(x_0', r),\ y_N > \psi(x'))\} \cap U$. Cela implique en particulier $d(x', \psi(x')) = 0\ \forall x' \in B_{\mathbb{R}^{N-1}}(x_0', r)$ et donc $\nabla_{x'} d(x_0) + \frac{\partial d}{\partial x_N}(x_0)\, \nabla_{x'}\psi(x_0') = 0$. Si $\rho \in C^k$ est une autre fonction qui permet de définir Ω, alors on a également $\rho(x', \psi(x')) = 0\ \forall x' \in B_{\mathbb{R}^{N-1}}(x_0', r)$ et donc $\nabla_{x'}\rho(x_0) + \frac{\partial \rho}{\partial x_N}(x_0)\, \nabla_{x'}\psi(x_0') = 0$. On en déduit que $\nabla\rho(x_0) = \alpha\, \nabla d(x_0)$ avec $\alpha = \partial_{x_N}\rho(x_0)/\partial_{x_N} d(x_0)$. De plus, comme $d(x_0', y_N) < 0\ \forall y_N \in]x_{N0}, x_{N0} + \varepsilon[$ on en déduit $\partial_{x_N} d(x_0) \le 0$. Même chose pour ρ. Cela implique $\alpha \ge 0$, et donc $\alpha > 0$ puisque $|\nabla\rho(x_0)| \neq 0$. On conclut donc que $n_d = n_\rho$ sur $\partial\Omega$. Enfin $d\sigma_d = -n_d \cdot \nabla \mathbf{1}_\Omega = -n_\rho \cdot \nabla \mathbf{1}_\Omega = d\sigma_n$.

Bibliographie.
- M. Lieb, Loss, *Analysis*, AMS
- Zuilly, *EDP*, Dunod.