Ecole Normale Supérieure **2005-2006**
Cours d'Analyse Fonctionnelle et EDP 7 mars 2006

Chapitre 3 - Espaces de Banach et introduction aux topologies faibles

Dans tout ce chapitre E désigne (sauf mention explicite du contraire) un espace vectoriel normé réel et en fait dès la section 3 un espace de Banach.

1 - Espaces vectoriels normés de dimension infinie

(A compléter)

Lemme (ou axiome) de Zorn. Soit P un ensemble muni d'une relation d'ordre (partiel) noté $\le$. Soit $Q \subset P$. On dit que Q est totalement ordonné si pour tout $a, b \in Q$ on a $a \le b$ ou $b \le a$. On dit que $c \in P$ est un majorant de Q si pour tout $a \in Q$ l'on a $a \le c$. On dit que $m \in P$ est un élément maximal de P si pour $x \in P$ on a $m \le x$ implique $m = x$. On dit que P est inductif si tout sous-ensemble Q totalement ordonné de P admet un majorant. **Tout ensemble ordonné, inductif, non vide, admet un élément maximal.**

Lemme de Baire. Soit X un espace métrique complet non vide et (X_n) une suite de fermés.
- si $\mathrm{Int}\, X_n = \emptyset$ pour chaque $n \ge 1$ alors $\mathrm{Int} \bigcup_{n\ge1} X_n = \emptyset$.
- en particuliert, si $\bigcup_{n\ge1} X_n = X$, il existe n_0 tel que $\mathrm{Int}\, X_{n_0} \ne \emptyset$.

Réciproquement, si (O_n) est une suite de d'ouverts denses dans X alors $G := \cap O_n$ est dense dans X.

2 - Théorèmes de Hahn-Banach, forme linéaire continue, hyperplan et séparation des convexes

Théorème 2.1. (forme analytique de Hahn-Banach) Soit E un ev et p une application sous-additive et positivement homogène, i.e. $p : E \to \mathbf{R}_+$ satisfait l'inégalité triangulaire et

$$(i') \qquad p(\lambda\, x) = \lambda\, p(x) \qquad \forall\, x \in E, \quad \forall\, \lambda > 0.$$

Soit $G \subset E$ un sous-espace vectoriel et $g : G \to \mathbf{R}$ une application linéaire telle que

$$g(x) \le p(x) \qquad \forall\, x \in G.$$

Il existe alors une forme linéaire f définie sur E qui prolonge g, i.e.

$$f(x) = g(x) \qquad \forall\, x \in G$$

et telle que

$$f(x) \le p(x) \qquad \forall\, x \in E.$$

Preuve du Théorème 2.1: On définit

$$\begin{aligned} P \ :=\ & \{h;\ h : D(h) \to \mathbf{R},\, D(h) \text{ s.ev. de } E,\ G \subset D(h), \\ & \quad h \text{ linéaire},\ h|_G = g,\ h(x) \le p(x)\ \forall\, x \in D(h)\}. \end{aligned}$$

P est muni de la relation d'ordre:

$$(h_1 \le h_2) \quad \Leftrightarrow \quad D(h_1) \subset D(h_2) \quad \text{et} \quad h_2|_{D(h_1)} = h_1.$$

Il est clair que $P \neq \emptyset$ puisque $g \in P$. P est inductif: si $Q = \{h_i\}_{i \in I} \subset P$ est totalement ordonné, alors on définit $D(h) = \cup_{i\in I} D(h_i)$ et $h(x) = h_i(x)$ si $x \in D(h_i)$, de sorte que h est un majorant de Q. Par le lemme de Zorn il existe un élément maximal f à P. Montrons que $D(f) = E$. Supposons par l'absurde que $D(h) \neq E$. Construisons un majorant strict à f. Il existe $x_0 \in E$, $x_0 \notin D(f)$. On définit

$$D(h) = D(f) + \mathbf{R}\, x_0, \qquad h(x + t\, x_0) = f(x) + t\, \alpha \quad \forall\, x \in D(f),\ \forall\, t \in \mathbf{R},$$

avec $\alpha \in \mathbf{R}$ à détreminer. On doit assurer

$$f(x) + t\, \alpha \le p(x + t\, x_0) \quad \forall\, x \in D(f),\ \forall\, t \in \mathbf{R},$$

et il suffit de montrer par homogénéité de f et homogénéité positive de p

$$f(x) + \alpha \le p(x + x_0), \quad f(x) - \alpha \le p(x - x_0) \quad \forall\, x \in D(f).$$

Or

$$f(x) + f(y) = f(x+y) \le p(x+y) \le p(x - x_0) + p(y + x_0) \quad \forall\, x, y \in D(f),$$

de sorte que

$$f(y) - p(y + x_0) \le p(x - x_0) - f(x) \quad \forall\, x, y \in D(f),$$

et il suffit de prendre α compris entre la borne supérieure du terme de gauche et la borne inférieure du terme de droite. ◫

Dans toute la suite E désigne un e.v.n. Soit E' son dual topologique. C'est l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur E, que l'on munit de la norme duale

$$\|f\|_{E'} = \|f\| = \sup_{x \in E, \|x\| \le 1} |f(x)| = \sup_{x \in E, \|x\| \le 1} \langle f, x\rangle.$$

On a donc

$$\forall\, f \in E',\ \forall\, x \in E \qquad \langle f, x \rangle \le \|f\|_{E'}\, \|x\|_E.$$

Remarque 2.1. La forme analytique de Hahn-Banach affirme en particulier que pour un evn E, un sev $G \subset E$ et une forme linéaire continue $g \in G'$, il existe $f \in E'$ telle que $f|_G = g$ et $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}$ (prendre $p(x) := \|g\|_{G'}\, \|x\|_E$).

Corollaire 2.2. Pour tout $x \in E$, on a

$$\|x\| = \sup_{f \in E', \|f\| \le 1} |\langle f, x \rangle| = \max_{f \in E', \|f\| \le 1} |\langle f, x\rangle|.$$

Preuve du Corollaire 2.2. L'inégalité $\ge$ est immédiate. Montrons $\le$. On consière $x \neq 0$ et on définit $G = \mathbf{R}\, x$ et l'application linéaire

$$\forall\, y \in G, \qquad g(y) = t \quad \text{avec} \quad t \in \mathbf{R} \quad \text{tel que} \quad y = t\, \frac{x}{\|x\|}.$$

Comme $\|y\| = t$, on a $|g(y)| = \|y\|$. Le théorème de Hahn-Banach affirme l'existence d'une application linéaire $f : E \to \mathbf{R}$ telle que $|f(x)| \le \|x\|$, de sorte que $f \in E'$ et $\|f\| \le 1$, et donc

$$\langle f, x \rangle = g(x) = \|x\|.$$

◫

Remarque 2.3. Pour $E = L^p$ (ou ℓ^p) avec $p \in [1,\infty)$, on prendra simplement $g = \|f\|_{L^p}^{1-p} f\,|f|^{p-2} \in L^{p'}$, pour $E = L^\infty$ on prendra $g = \mathrm{sign}(f)\,\mathbf{1}_K \in L^1$, avec $\mathrm{mes}(K) = 1$ et $\|g\,\mathbf{1}_K\|_{L^\infty} = \|g\|_{L^\infty}$, pour $E = \ell^\infty$ on n'a pas en général $\|f\|_{\ell^1} = \langle f, g\rangle$ avec $g \in B_{\ell^1}$: prendre par exemple $f = (f_k)$, $f_k = 1 - 1/k$.

Définition 2.3. Soient $A, B \subset E$. On dit que l'hyperplan $H = [f = \alpha]$, f forme linéaire, $\alpha \in \mathbf{R}$, sépare A et B au sens large si l'on a

$$f(a) \le \alpha \quad \forall a \in A \qquad \text{et} \qquad f(b) \ge \alpha \quad \forall\, b \in B,$$

sépare A et B au sens strict s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$f(a) \le \alpha - \varepsilon \quad \forall a \in A \qquad \text{et} \qquad f(b) \ge \alpha + \varepsilon \quad \forall\, b \in B.$$

Rappelons que l'hyperplan H est fermé si, et seulement si, $f \in E'$.

Théorème 2.4. (première forme géométrique de Hahn-Banach). Soient $A, B \subset E$ deux ensembles convexes, non vides et disjoints. On suppose que A est ouvert. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens large.

Lemme 2.5. Soit $O \subset E$ un convexe ouvert non vide et soit $x_0 \in E$ avec $x_0 \notin O$. Alors il existe un hyperplan $H = [f = \alpha]$ qui sépare $\{x_0\}$ et O au sens large.

Preuve du Lemme 2.5. Par translation on peut supposer $0 \in O$. On introduit la jauge $p = p_O$ de O. On rappelle que p_O est sous-additive, positivement gomogène et $O = \{x \in E, p_O(x) < 1\}$. On introduit $G = \mathbf{R}\,x$, $g : G \to \mathbf{R}$, $g(t\,x_0) = t$. Il est clair que $g(x) \le p(x)\ \forall\, x \in G$ puisque $g(x_0) = 1 \le p(x_0)$ (puisque $x_0 \notin O$) et $g(-x_0) \le 0 \le p(-x_0)$. Par Hahn-Banach analytique, il existe $f \in E^*$ tel que $f|_G = g$ et

$$f(x) \le p(x) \le \frac{2}{r}\,\|x\| \qquad \forall\, x \in E,$$

puisque $(r/2)\,x/\|x\| \in O$ si on choisit $r > 0$ tel que $B(0,r) \subset O$, puis

$$|f(x)| \le \frac{2}{r}\,\|x\| \qquad \forall\, x \in E,$$

puisque les deux applications sont ("réelement") homogènes. En particulier, $f \in E'$. Enfin, $\langle f, x_0\rangle = g(x_0) = 1$ et $\langle f, x\rangle \le p(x) < 1$ pour tout $x \in O$. L'hyperplan $H = [f = 1]$ convient. ◻

Preuve du Théorème 2.4. On introduit $O = A - B = \{a - b;\ a \in A,\ b \in B\}$ qui est non vide, convexe (immédiat), ne contenant pas l'origine (car A et B sont disjoints) et ouvert (puisque $O = \cup_{b \in B}(A - y)$ est une union d'ouverts). On sépare $\{0\}$ et O au sens large grâce au lemme 2.5. On a donc $0 \le \langle f, a\rangle - \langle f, b\rangle$ pour tout $a \in A$, $b \in B$ et un certain $f \in E'$. L'hyperplan $[f = \alpha]$, avec $\alpha = \inf_{a \in A}\langle f, a\rangle$, sépare A et B au sens large. ◻

Théorème 2.6. (deuxième forme géométrique de Hahn-Banach). Soient $A, B \subset E$ deux ensembles convexes, non vides et disjoints. On suppose que A est fermé et B est compact. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens strict.

Preuve du Théorème 2.6. On définit $A_\varepsilon = A + B(0,\varepsilon)$, $B_\varepsilon = B + B(0,\varepsilon)$. Ce sont des convexes, ouverts, non vides et disjoints pour $\varepsilon < \delta/2$ avec $\delta := \mathrm{dist}(A, B) > 0$. On sépare A_ε et B_ε au sens large par un hyperplan $H = [f = \alpha]$ grâce à la première forme géométrique de Hahn-Banach. On a alors

$$\langle f, a + \varepsilon\, u\rangle \le \alpha \le \langle f, b + \varepsilon\, v\rangle \qquad \forall\, a \in A,\ b \in B,\ u,\ v \in B_E,$$

et donc

$$\langle f, a\rangle + \eta \le \alpha \le \langle f, b\rangle - \eta \qquad \forall\, a \in A,\ b \in B,$$

avec $\eta = \varepsilon\,\|f\|$. ◻

Corollaire 2.7. Soit $F \subset E$ un sous-espace verctoriel tel que $\bar{F} \neq E$. Alors il existe $f \in E'$ tel que $f \neq 0$ et

$$\langle f, x\rangle = 0 \qquad \forall\, x \in F.$$

Réciproquement, soit D un sous-espace vectoriel tel que ($f \in E'$ et $f|_D = 0$ implique $f \equiv 0$) alors D est dense dans E.

Preuve du Corollaire 2.7. Prendre $x_0 \in E\backslash\bar{F}$ et séparer x_0 et $\bar{F}$ au sens strict. ◫

On déduit également du théorème de Hahn-Banch le résultat fondamental suivant (pour lequel on a également une preuve élémentaire en raisonnant par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$).

Lemma 2.8. (des noyaux) Soit X un ev. φ, φ_1, ..., φ_n des formes linéaires telles que

$$[\varphi_i(v) = 0 \quad \forall\, i = 1, ..., n] \quad \Longrightarrow \quad [\varphi(v) = 0],$$

i.e. $\bigcap_{i=1,\dots,n} \ker\varphi_i \subset \ker\varphi$. Il existe alors des réels λ_1, ..., λ_n tels que $\varphi = \sum_{i=1,\dots,n} \lambda_i\, \varphi_i$.

Preuve du Lemme 2.8. On définit $F : X \to \mathbf{R}^{n+1}$, $x \mapsto (\varphi(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_n(x))$, $A = F(X)$ et $a = (1, 0, ..., 0)$. L'ensemble A est un convexe (sev), fermé, non vide et, par hypothèse, $a \notin A$. On peut donc séparer a et A au sens strict dans $\mathbf{R}^{n+1}$: il existe $(\mu, \mu_1, ..., \mu_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ et $\alpha \in \mathbf{R}$ tels que

$$\mu < \alpha \leq \mu\, \varphi(x) + \sum_{i=1,\dots,n} \mu_i\, \varphi_i(x) \qquad \forall\, x \in X.$$

Par linéarité, on déduit

$$\mu\, \varphi(x) + \sum_{i=1,\dots,n} \mu_i\, \varphi_i(x) = 0 \qquad \forall\, x \in X,$$

ce qui implique $\mu < 0$ et on conclut en posant $\lambda_i = -\mu_i/\mu$. ◫

Désormais dans ce chapitre, tous les espaces vectoriels considérés seront supposés être des espaces de Banach.

3 - Le théorème de Banach-Steinhaus.

Théorème 3.1. (Banach-Steinhaus ou Principle of Uniform Boundedness). Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'opérateurs linéaires continus de E dans F. On suppose

$$\sup_{i\in I} \|T_i\, x\| < \infty \qquad \forall\, x \in E. \tag{1}$$

Alors

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty, \tag{2}$$

i.e. il existe C tel que $\|T_i x\|_F \leq C\, \|x\|_E$ pour tout $x \in E$, $i \in I$.

Preuve du Théorème 3.1. On définit $E_n := \{x \in E;\ \sup_{i\in I} \|T_i\, x\| \leq n\}$. En appliquant le lemme de Baire, on voit qu'il existe n_0 tel que E_{n_0} contient une boule $B(x_0, r)$. Alors,

$$\forall\, i \in I,\ \forall\, z \in B_E \qquad \|T_i(x_0 + r\, z)\| \leq n_0,$$

et on conclut aisément. ◫

Corollaire 3.2. Soient E et F deux espaces de Banach et soit (T_n) une suite d'opérateurs linéaires continus de E dans F tels que pour tout $x \in E$, $T_n\, x$ converge quand $n \to \infty$ vers une limite notée $T\,x$. On a alors

$$\sup_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty, \qquad T \in \mathcal{L}(E,F) \qquad \text{et} \qquad \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \le \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}.$$

Preuve du Corollaire 3.2. Comme $\|T_n\, x\|$ est bornée, par BS, il existe C tel que $\|T_n\, x\| \le C\, \|x\|$ pour tout $x \in E$, $n \in \mathbf{N}$. A la limite, on obtient $\|T\, x\| \le C\, \|x\|$ pour tout $x \in E$. Il est également clair que T est linéaire. Enfin, on a $\|T_n\, x\| \le \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}\, \|x\|$ pour tout $x \in E$, d'où le dernier point. ◻

4 - La topologie faible $\sigma(E,E')$ de E.

Proposition 4.1. La famille de semi-normes $(p_f)_{f\in E'}$, $p_f(x) := |\langle f, x\rangle|$, sépare les points.

Preuve du Proposition 4.1. Pour tout $x \in E$, $x \neq 0$, on a $\|x\| = \max_f p_f(x)$ par le corollaire de la forme analytique du Théorème de Hahn-Banach, et donc $\exists\, f \in E'$ tel que $p_f(x) \neq 0$. ◻

Définition 4.2. La topologie $\sigma(E,E')$ est la toplogie d'evtlcs de E associée à la famille de semi-normes $(p_f)_{f\in E'}$, $p_f(x) := |\langle f, x\rangle|$. Ajoutons deux remarques:

- Pour tout $x_0 \in E$, une base de voisinage de x_0 pour la topologie $\sigma(E,E')$ est donnée par les ensembles de la forme

$$V = \{x \in E;\ |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon \ \ \forall i \in J\}$$

où J est fini, $f_i \in E'$ et $\varepsilon > 0$.

- La topologie $\sigma(E,E')$ est exactement la toplogie la moins fine rendant continues toutes les applications linéaires $x \mapsto \langle f, x\rangle$. En effet, pour $T : E \to \mathbf{R}$ linéaire, on a $x \mapsto |T\,x|$ est continue (en 0) si, et seulement si, $x \mapsto T\,x$ est continue.

Remarque 4.3. La topologie $\sigma(E,E')$ est plus grossière que la topologie (initiale) de E (i.e. induite par la norme): les ouverts de $\sigma(E,E')$ sont des ouverts pour la topologie forte. Si la dimension de E est finie alors les deux topologies coïncident. En effet, si $(e_i)_{i=1,\dots,N}$ est une base de E, alors la famille des semi-normes $(p_{e_i^*})$ engendre $\sigma(E,E')$ et est équivalente à la norme. Si la dimension de E est infinie alors la topologie $\sigma(E,E')$ n'est pas métrisable et elle possède strictement moins d'ouverts que la topologie initiale. Par exemple, $U = \{x;\ \|x\| < 1\}$ n'est jamais ouvert pour la topologie $\sigma(E,E')$ puisque en dimension infinie les ouverts de $\sigma(E,E')$ contiennent au moins une droite (et en fait un sous-espace affine de dimension infinie).

Exercice 4.3. Démontrer avec précision les assertions de la Remarque 4.3.

Remarque 4.4. Lorsque E est de dimension infinie il existe *en général* des suites qui convergent faiblement mais pas fortement. C'est toujours le cas si E' est séparable ou si E est réflexif. Par exemple, si $E = H = \ell^2(\mathbf{N})$, qui est un espace de Hilbert, en particulier $H' = \ell^2(\mathbf{N})$, et si on note $e_n = (\delta_{i=n})_{i\in\mathbf{N}}$ la base Hilbertienne usuelle, alors $e_n \rightharpoonup 0 \ \ \sigma(\ell^2,\ell^2)$ et $\|e_n\|_{\ell^2} = 1$ pour tout $n \ge 1$. Néanmoins, il existe des espaces de Banach de dimension infinie dans lesquels toute suite faiblement convergente est fortement convergente, par exemple ℓ^1 possède cette propriété *rare*. Cela n'est pas en contradiction avec le fait que $\sigma(\ell^1,\ell^\infty)$ ne coïncide pas avec la topologie de ℓ^1, car $(\ell^1, \sigma(\ell^1,\ell^\infty))$ n'est pas métrisable.

Exercice 4.4. Démontrer le lemme de Schur: toute suite de ℓ^1 qui est faiblement convergente (pour la topologie $\sigma(\ell^1,\ell^\infty)$) est fortement convergente (au sens de la norme de ℓ^1).

Proposition 4.5. Soit (x_n) une suite de E. On a

(i) $x_n \rightharpoonup x \ \ \sigma(E,E')$ ssi $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle \ \ \forall\, f \in E'$;

(ii) $x_n \to x$ fortement implique $x_n \rightharpoonup x$ faiblement;

(iii) $x_n \rightharpoonup x \ \ \sigma(E,E')$ implique $(\|x_n\|)$ bornée et $\|x\| \le \liminf \|x_n\|$;

(iv) $x_n \rightharpoonup x \ \ \sigma(E,E')$ et $f_n \to f$ fort implique $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Preuve de la Proposition 4.5. (i) cf. chapitre 1.
(ii) Puisque $|\langle f, x_n - x\rangle| \le \|f\|\,\|x_n - x\| \to 0$.
(iii) On définit $S_y : E' \to \mathbf{R}$, $S_y(f) = \langle f, y\rangle$, de sorte que par hypothèse $S_{x_n}(f) \to S_x(f)$ lorsque $n \to \infty$ pour tout $f \in E'$. On remarque que par Hahn-Banach

$$\|S_y\| = \sup_{f\in E', \|f\|\le 1} |S_y(f)| = \sup_{f\in E', \|f\|\le 1} |\langle f, y\rangle| = \|y\|.$$

Par le corollaire de Banach-Steinhaus, on a

$$\exists\, C \quad \|S_{x_n}\| \le C \qquad \text{et} \qquad \|S_x\| \le \liminf \|S_{x_n}\|.$$

(iv) Puisque

$$|\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \le |\langle f_n - f, x_n\rangle| + |\langle f, x_n - x\rangle| \to 0.$$

Théorème 4.6. Soit $C \subset E$ convexe. Alors C est faiblement fermé $\sigma(E, E')$ si et seulement s'il est fortement fermé.

Preuve du Théorème 4.6. On sait déjà que faiblement fermé implique fortement ferrmé. Supposons donc que C est un convexe fermé et montrons que $O = C^c$ est ouvert. En effet, étant donné $x_0 \in O$, on peut séparer $\{x_0\}$ et C au sens strict:

$$\exists\, f \in E',\ \exists\, \alpha \in \mathbf{R} \qquad \langle f, x_0\rangle < \alpha < \langle f, y\rangle \quad \forall\, y \in C,$$

ce qui implique que $V := \{x \in E,\ \langle f, x\rangle < \alpha\}$ est un ouvert de $\sigma(E, E')$ et $x_0 \in V \subset O$. ◻

Exercice 4.6. Soit E un espace de Banach et soit C un convexe de E. Montrer qu'il y a équivalence entre
(a) C est séquentiellement fermé faible; (b) C est séquentiellement fermé;
(c) C est fermé; (d) C est fermé faible.

Exercice 4.7. Soit E un evn de dimension infinie. Montrer que la topologie faible $\sigma(E, E')$ n'est pas métrisable. (Ind. Raisonner par l'absurde, et supposer qu'il existe une métrique d sur E engendrant une topologie identique à $\sigma(E, E')$. En particulier, cela implique que pour tout entier $k \ge 1$, il existe un voisinage V_k de 0 de la topologie faible tel que

$$V_k \subset \left\{ x \in E;\ d(x, 0) < \frac{1}{k} \right\}.$$

En utilisant ces voisinages, montrer qu'il existe une partie débombrable $F \subset E'$, telle que tout $g \in E'$ est combinaison linéaire d'un nombre fini éléments de F; conclure).

5 - La topologie faible $*\sigma(E', E)$ de E'.

Proposition 5.1. La famille de semi-normes $(q_x)_{x\in E}$, $q_x(f) := |\langle f, x\rangle|$, sépare les points.

Définition 5.2. La topologie faible $*\sigma(E', E)$ est la toplogie d'evtlcs de E' associée à la famille de semi-normes $(q_x)_{x\in E}$. Pour tout $f_0 \in E'$, une base de voisinage de f_0 pour la topologie $\sigma(E', E)*$ est donnée par les ensembles de la forme

$$V = \{f \in E';\ |\langle f - f_0, x_i\rangle < \varepsilon\ \ \forall i \in J\}$$

où J est fini $x_i \in E$ et $\varepsilon > 0$.

Remarque 5.3. On définit E'' le bidual de E, comme étant le dual de E', muni de la norme

$$\xi \in E'' \ \mapsto\ \|\xi\| := \sup_{f\in B_{E'}} |\langle \xi, f\rangle|.$$

On définit $J : E \to E''$ l'injection canonique comme suit: soit $x \in E$ fixé, l'application $f \in E' \mapsto \langle f, x\rangle$ de E' dans $\mathbf{R}$ est linéaire et continue, c'est donc un élément de E'' que l'on note $J\,x$. On a alors

$$\forall\, x \in E,\ \forall\, f \in E' \qquad \langle J\,x, f\rangle_{E'',E'} = \langle f, x\rangle_{E',E}.$$

Il est clair que J est linéaire et que J est une isométrie, i.e. $\|J\,x\|_{E''} = \|x\|_E$ pour tout $x \in E$; en effet par Hahn-Banach

$$\|J\,x\|_{E''} = \sup_{f \in B_{E'}} \langle J\,x, f\rangle_{E'',E'} = \sup_{f \in B_{E'}} \langle f, x\rangle_{E',E} \overset{H.B.}{=} \|x\|_E.$$

On peut donc toujours identifié $E = J(E)$ à un sev fermé (car complet) de E''. Il peut arriver que $J(E) \neq E''$ (si $E = L^1$, L^∞ ou $C(K)$). Il existe cependant des espaces de Banach tels que $J(E) = E''$ (si E est de dimension finie, si $E = L^p$, $1 < p < \infty$, ou si E est un espace de Hilbert), on dit alors que E est réflexif. Quelques propriétés des espaces réflexifs seront présentées au prochain paragraphe. Lorsque que J n'est pas surjective de E sur E'' (i.e. $E \neq E''$) alors la topologie $\sigma(E', E)$ est strictement moins fine que la topologie $\sigma(E', E'')$. Il existe même des convexes fermés pour $\sigma(E', E'')$ qui ne sont pas fermés pour $\sigma(E', E)*$: par exemple si $\xi \in E''\backslash E$ alors $H = \ker \xi$ est fermé pour la topologie forte de E', donc pour la topologie faible $\sigma(E', E'')$, mais n'est pas fermé pour la topologie faible $*$-$\sigma(E', E)$.

Proposition 5.4. Soit (f_n) une suite de E'. On a

(i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \ \ \sigma(E', E)$ ssi $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle \ \ \forall\, x \in E$;

(ii) $f_n \to f$ fortement implique $f_n \rightharpoonup f$ faiblement $\sigma(E', E'')$;
et $f_n \rightharpoonup f$ faiblement $\sigma(E', E'')$ implique $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ faiblement $\sigma(E', E)$;

(iii) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ faiblement $\sigma(E', E)$ implique $(\|f_n\|)$ bornée et $\|f\| \le \liminf \|f_n\|$;

(iv) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ faiblement $\sigma(E', E)$ et $x_n \to x$ fort implique $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Preuve de la Proposition 5.4. identique à la preuve de la Proposition 4.5.

Remarque 5.5. Si $f_n \rightharpoonup f\ \sigma(E', E'')$ ou $\sigma(E', E)*$ et $x_n \rightharpoonup x\ \sigma(E, E')$ on ne peut pas conclure que $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$. En effet, dans ℓ^2, en posant $x_n = f_n = (\delta_{i=n})_{i \ge 1}$, on a $f_n, x_n \rightharpoonup 0$ au sens $\sigma(\ell^2, \ell^2)$ et pourtant $\langle f_n, x_n\rangle = 1 \not\to 0$!

Théorème 5.6. Supposons E séparable. Alors la boule unité $B_{E'} = \{f \in E';\ \|f\| \le 1\}$ est séquentiellement compacte au sens de la convergence $\sigma(E', E)$.

Preuve du Théorème 5.6. Soit (x_p) une suite dense de B_E. Soit (f_n) une suite de $B_{E'}$. Pour tout p, la suite $(\langle f_n, x_p\rangle)_n$ est bornée dans $\mathbf{R}$. Par le procédé diagonal de Cantor, on peut extraire une sous-suite (f_{n_k}) telle que $\langle f_{n_k}, x_p\rangle$ converge vers une limite, notée T_p, pour tout $p \in \mathbf{N}$. En effet, il suffit de définir par récurrence φ_k^p telle que $(\varphi_k^{p+1}) \subset (\varphi_k^p)$ et $\langle f_{\varphi_k^p}, x_p\rangle$ converge, puis de prendre $n_k := \varphi_k^k$.

Pour tout $x \in E$, la suite $(\langle f_{n_k}, x\rangle)_k$ converge vers une limite notée $f(x)$. En effet, c'est une suite de Cauchy, puisque pour tout $\varepsilon > 0$ il existe x_p tel que $\|x - x_p\| \le \varepsilon/3$ et donc

$$|\langle f_{n_k} - f_{n_{k'}}, x\rangle| \le |\langle f_{n_k} - f_{n_{k'}}, x - x_p\rangle| + |\langle f_{n_k} - f_{n_{k'}}, x_p\rangle| \le \varepsilon$$

pour k et k' assez grands.

En reprenant la fin de la preuve du corollaire de Banach-Steinhaus, on en déduit que f est linéaire, $f \in E'$ et $\|f\| \le 1$. On a donc $f_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} f$ faiblement $\sigma(E', E)$. ◫

Proposition 5.7. Soit E un espace de Banach séparable. Alors $B_{E'}$ est métrisable pour la topologie $\sigma(E', E)$.

Preuve de la proposition 5.7. Soit (x_k) une famille dénombrable et dense de B_E. On a montré au chapitre 1 comment construire une distance d dont la topologie induite est équivalente à la topologie $\mathcal{T}$ engendrée par la suite de semi-normes (p_k) définies par $p_k(f) := |\langle f, x_k\rangle|$. Il suffit donc de montrer que sur $B_{E'}$ la topologie $\sigma(E', E)$ est équivalente à la topologie $\mathcal{T}$. Evidemment $\sigma(E', E) \subset \mathcal{T}$ (un ouvert de $\mathcal{T}$ est un ouvert de $\sigma(E', E)$). Soit maintenant U un ouvert de $B_{E'}$ pour la topologie $\sigma(E', E)$ et contenant 0. Il existe $(y_i)_{i=1,...,n}$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$V := \{f \in B_{E'},\ |\langle f, y_i \rangle| < \varepsilon\ \forall\, i = 1, ..., n\} \subset U.$$

On fixe k_1, ..., k_n tels que $\|y_i - x_{k_i}\| \le \varepsilon/2$. Alors, par inégalité triangulaire, on a

$$W := \{f \in B_{E'},\ |\langle f, x_{k_i} \rangle| < \varepsilon/2\} \subset V$$

de sorte que $W \in \mathcal{T}$ et $W \subset U$. ◫

Exercice 5.7. Réciproquement, montrer que $B_{E'}$ est métrisable pour la topologie $\sigma(E', E)$ alors E est séparable. (Ind. Soit d une métrique équivalente à la topologie faible $\sigma(E', E)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe D_n une partie finie de E et $\varepsilon_n > 0$ tel que

$$V_n := \{f \in B_{E'};\ |\langle f, x \rangle| < \varepsilon_n\ \forall\, x \in D_n\} \subset \{f \in B_{E'};\ d(f, 0) < 1/n\}.$$

En déduire une partie dénombrable D de E telle que le $\mathbf{R}$-espace vectoriel engendré par D est dense dans E. Prendre $D = \cup_n D_n$ et vérifier que $\langle f, x \rangle = 0$ pour tout $x \in D$ implique $f = 0$). Montrer que si E est un Banach de dimension infinie alors E' n'est jamais métrisable pour la topologie $\sigma(E', E)$. ◫

Corollaire 5.8. Soit E un espace de Banach séparable. Alors $B_{E'}$ est compacte pour la topologie $*\sigma(E', E)$.

Remarque 5.9. Lorsque E n'est pas séparable on peut encore montrer que $B_{E'}$ est compacte au sens de la topologie $\sigma(E', E)$. Il faut pour cela utiliser le théorème de Tykonov qui affirme que tout produit de compacts est compact, dont la démonstration fait appel à la théorie des filtres (et à l'existence d'ultra-filtre), qui repose (et tout cela est plus ou moins équivalent ....) sur le lemme de Zorn/ l'axiome du choix.

Théorème (Banach-Alaoglu-Bourbaki). (exo) Soit E un espace de Banach. Alors $B_{E'}$ est compacte pour la topologie $*\sigma(E', E)$.

Il existe des convexes fermés (forts ou faibles $\sigma(E', E'')$) de E' qui ne sont pas fermés de $*\,\sigma(E', E)$ (si E n'est pas reflexif!). Par exemple, $H = \{\xi = 0\}$ pour $\xi \in E'' \backslash E$. Par contre la boule fermée $B_{E'}$ est fermée (par BAB) et séquentiellement fermée (direct). Il existe même des convexes fermés bornés de E' qui ne sont pas séquentiellement fermé: prendre $H \cap B_{E'}$. Question: est-il vrai que l'adhérence forte E' d'un ouvert convexe de E' est un fermé $*\sigma(E', E)$?

6 - Espaces réflexifs.

Définition 6.1. Soit E un espace de Banach et soit J l'injection canonique de E dans E''. On dit que E est réflexif si $J(E) = E''$ et dans ce cas on identifie implicitement E et E''.

Notons que la réflexivité est une notion topologique: si E est isomorphe à F alors E est réflexif si et seulement si F est réflexif. En effet, si $T : E \to F$ est un isomorphisme d'espace de Banach alors $J_F = T^{**}\, J_E\, T^{-1}$, où $T^{**} : E'' \to F''$ dénote l'opérateur bi-adjoint de T, puisque pour tout $x \in E$, $g \in F'$ on a

$$\langle J_F T x, g \rangle = \langle g, T x \rangle = \langle T^* g, x \rangle = \langle J_E x, T^* g \rangle = \langle T^{**} J_E x, g \rangle.$$

Définition 6.2. Si $T : E \to F$ est un opérateur linéaire continu, on définit l'opérateur adjoint $T^* : F' \to E'$ par

$$\langle T^* g, x \rangle = \langle g, T\, x \rangle \qquad \forall\, x \in E,\ g \in F'.$$

En effet, on remarque que $x \mapsto \langle g, T\, x \rangle$ définit une application linéaire continue de E dans $\mathbf{R}$, on la note $T^* g \in E'$. Il est clair que $g \mapsto T^*\, g$ est linéaire et que (par Hahn-Banach forme analytique)

$$\|T^*\|_{\mathcal{L}(F', E')} = \sup_{g \in B_{F'}} \|T^*\, g\|_{E'} = \sup_{g \in B_{F'},\, x \in B_E} |\langle T^* g, x \rangle| = \sup_{g \in B_{F'},\, x \in B_E} |\langle g, T\, x \rangle| \overset{H.B.}{=} \sup_{x \in B_E} \|T\, x\| = \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}.$$

Proposition 6.3. Soit E un espace réflexif. Tout sous-espace vectoriel fermé $M \subset E$ est un espace réflexif. Tout produit fini d'espaces réflexifs est réflexif.

Preuve de la Proposition 6.3. On définit l'opérateur de restriction $R : E' \to M'$, $f \mapsto f|_M$ et $T : M'' \to E''$ l'opérateur défini par dualité (i.e. $T = R^*$)

$$\forall \xi \in M'',\ \forall f \in E' \qquad \langle T\xi, f\rangle_{E'',E'} = \langle \xi, R\, f\rangle_{M'',M'}.$$

Comme $T\,\xi \in E''$ et que E est réflexif, il existe $x \in E$ tel que $T\,\xi = J\,x$. On a donc,

$$\forall \xi \in M''\ \exists x \in E; \quad \forall f \in E' \qquad \langle \xi, R\, f\rangle = \langle f, x\rangle_{E',E}$$

Montrons $x \in M$. Dans le cas contraire, on peut séparer strictement $\{x\}$ et M dans E: $\exists\, f \in E'$, $\exists \varepsilon > 0$ tels que

$$\langle f, y\rangle \leq \langle f, x\rangle - \varepsilon \quad \text{pour tout} \quad y \in M.$$

M étant un s.e.v., cela implique $f|_M \equiv 0$, puis donc $\langle f, x\rangle > 0$. Mais de $f|_M \equiv 0$, on déduit $R\, f = 0$, puis $\langle f, x\rangle = \langle \xi, R\, f\rangle = 0$ et une contradiction.
Enfin, toute forme linéaire continue sur M, $\varphi \in M'$, est la restriction à M d'une forme linéaire continue sur E, $\tilde\varphi \in E'$ (par Hahn-Banach). Soit donc, $\varphi = \tilde\varphi|_M = R\,\tilde\varphi$. On a donc, pour $\xi \in M''$ et $x \in M$ construit comme précédemment:

$$\begin{aligned}\forall \varphi \in M' \qquad \langle \xi, \varphi\rangle_{M'',M'} &= \langle \xi, R\,\tilde\varphi\rangle_{M'',M'} = \langle T\,\xi, \tilde\varphi\rangle_{E'',E'} \\ &= \langle \tilde\varphi, x\rangle_{E',E} = \langle \varphi, x\rangle_{M',M}\end{aligned}$$

Ainsi M est réflexif. ◻

Proposition 6.4. Soit E un Banach.

a) E réflexif $\Leftrightarrow$ E' réflexif;

b) E' séparable $\Rightarrow$ E séparable;

c) E réflexif et séparable $\Leftrightarrow$ E' réflexif et séparable.

Remarque 6.4. Il existe E séparable tel que E' n'est pas séparable (exemples: ℓ^1, L^1). Il existe E e.v.n. tel que E' est réflexif et E ne l'est pas (exemple $E = (\mathcal{D}, \|.\|_{\ell^2})$ de sorte que $E' = E'' = \ell^2$).

Preuve de la Proposition 6.4. a) Si E est réflexif, on a $(E')'' = (E'')' = E'$ et donc E' est réflexif. Si E' est réflexif, alors $E'' = (E')'$ est réflxif et $J(E)$ (qui est un s.e.v. fermé de E'') est réflexif. On en déduit que E (qui est isomorphe à $J(E)$) est réflexif.

b) Soit (f_n) une suite dénombrable dense dans E'. Soit (x_n) une suite de E telle que $\|x_n\| = 1$ et $\langle f_n, x_n\rangle \geq \|f_n\|/2$. On désigne par L l'ensemble des combinaisons linéaires finies à coefficients dans $\mathbf{Q}$ des (x_n) et M le $\mathbf{R}$-e.v. engendré par les (x_n). On sait déjà (par construction) que M est séparable. Montrons qu'il est dense dans E. Soit $f \in E'$ tel que $\langle f, x\rangle = 0$ pour tout $x \in M$. Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe $f_n \in E'$ tel que $\|f - f_n\| < \varepsilon$. On a alors

$$\frac{1}{2}\|f_n\| \leq \langle f_n, x_n\rangle = \langle f_n - f, x\rangle + \langle f, x_n\rangle = \langle f_n - f, x\rangle \leq \|f - f_n\| < \varepsilon.$$

Donc $\|f\| \leq \|f - f_n\| + \|f_n\| \leq 3\,\varepsilon$, et $f = 0$. On déduit d'un corollaire de Hahn-Banach que M est dense dans E. ◻

c) On sait déjà que si E' est réflexif et séparable alors E est réflexif et séparable. Inversement, si E est réflexif et séparable, alors E'' est réflexif et séparable, et donc également E'. ◻

Proposition 6.5. Soit E un espace réflexif. Soit $F \subset E'$ un sev fermé tel que ($x \in E$ et $\langle f, x\rangle = 0\ \forall\, f \in F$ implique $x = 0$). Alors $F = E'$.

Preuve de la Proposition 6.5. On applique un corollaire de Hahn-Banach géométrique. Soit $\xi \in E''$ tel que $\langle \xi, f\rangle = 0\ \forall f \in F$. On a alors, pour un certain $x \in E$, $\xi = J\,x$, $\langle f, x\rangle = 0\ \forall f \in F$, et donc par hypothèse, $x = 0$. On en déduit $\xi = 0$ et F est dense dans E'. ◻

L'intérêt principal des espaces réflexifs réside dans le résultat suivant (à comparer avec le théorème de Riesz) qui est une agrégation des théorèmes 4.6, 5.6 et des propositions 6.3 et 6.4.

Théorème 6.6. Soit E un espace réflexif. Soit $K \subset E$ un sous-ensemble convexe, fermé et borné. Alors K est séquentiellement compact pour la convergence $\sigma(E, E')$.

Preuve du Théorème 6.6. Supposons dans un premier temps E séparable. Alors E' est séparable (Proposition 6.4) et la boule B_E est séquentiellement compacte pour la topologie $\sigma(E, E') = \sigma((E')', E')$ (Théorème 5.6). Soit (x_n) une suite de K, c'est donc aussi une suite de $m\,B_E$ pour m assez grand. Grâces aux remarques précédentes, on peut extraire une sous-suite (x_{n_k}) qui converge vers $x \in E$ au sens de la convergence faible $\sigma(E, E')$. On a $x \in K$ (Théorèmes 4.6), ce qui conclut dans ce cas.

On ne suppose plus E séparable. Etant donné une suite (x_n) de K on introduit M la fermeture de l'espace vectoriel engendré par les (x_n). C'est un espace réflexif séparable (Proposition 6.3) ce qui permet d'appliquer la première étape: il existe une sous-suite (x_{n_k}) et $x \in K$ tels que $x_{n_k} \rightharpoonup x$ au sens $\sigma(M, M')$. On conclut en remarquant que $E' \subset M'$. ◻

Théorème 6.7 (Kakutani et Eberlein-Smulian) (admis). Soit E un espace de Banach. Il y a équivalence entre

(i) E est réflexif;

(ii) B_E est compact pour la topologie $\sigma(E, E')$;

(iii) B_E est séquentiellement compact pour la convergence $\sigma(E, E')$.

7 - Espaces uniformément convexes.

Définition 7.1. On dit qu'un espace de Banach E est uniformément convexe si: $\forall \varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0$ tel que

$$\big(x, y \in B_E \quad \text{et} \quad \|y - x\| > \varepsilon\big) \quad \Rightarrow \quad \big(\|\frac{x+y}{2}\| < 1 - \delta\big).$$

Remarque 7.1. On vérifie aisément (faire un dessin en introduisant un troisième point) que si

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,\delta > 0 \qquad \big(x,\, y \in E, \quad \|x\| = \|y\| = 1 \quad \text{et} \quad \|y - x\| > \varepsilon\big) \quad \Rightarrow \quad \big(\|\frac{x+y}{2}\| < 1 - \delta\big),$$

alors E est uniformément convexe.

Exemples 7.1. - Un espace de Hilbert $(H, (.,.))$ est uniformément convexe pour la norme associée au produit scalaire $|.| = (.,.)^{1/2}$. En effet, d'après l'identité du parallélogramme

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}\,(|a|^2 + |b|^2) \qquad \forall\,a, b \in H,$$

on a pour tout $\varepsilon > 0$, $u, v \in B_H$, $|u - v| > \varepsilon$,

$$\left|\frac{u+v}{2}\right|^2 < 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \quad \text{et} \quad \left|\frac{u+v}{2}\right| < 1 - \delta, \quad \delta := 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)^{1/2}.$$

- Les espaces ℓ^p et L^p sont uniformément convexes pour $p \in (1, \infty)$ (on verra cela au chapitre 4).

- Les espaces ℓ^1, ℓ^∞, c_0, L^1, L^∞, $C(K)$ ne sont uniformément convexes. On a par exemple dans $L^1(\mathbf{R})$ avec $u = \mathbf{1}_{[0,1]}$, $v = \mathbf{1}_{[1,2]}$ à la fois $\|u\|_{L^1} = \|v\|_{L^1} = 1$ et $\|u - v\|_{L^1} = 2 > 0$ et pourtant $\|(u+v)/2\|_{L^1} = 1$. Dans

$L^\infty(\mathbf{R})$ on prend $w = u + v$, $z = u - v$ de sorte que $\|w\|_{L^\infty} = \|z\|_{L^\infty} = 1$, $\|(w+z)/2\|_{L^\infty} = 1$ et pourtant $\|w - z\|_{L^\infty} = 2 > 0$.

Théorème 7.2. Soit E un espace de Banach uniformément convexe. Soit (x_n) une suite dans E telle que $x_n \rightharpoonup x$ pour la topologie $\sigma(E, E')$ et

$$\limsup \|x_n\| \leq \|x\|.$$

Alors $x_n \to x$ fortement.

Preuve du Théorème 7.2. On peut supposer $x \neq 0$. On introduit $\lambda_n = \max(\|x_n\|, \|x\|)$, $y_n = \lambda_n^{-1}\, x_n$ et $y = \|x\|^{-1}\, x$. On a alors $\lambda_n \to \|x\|$, $\|y_n\| \leq 1$, $\|y\| = 1$ et $\|y_n\| \to \|y\|$. Il suffit de montrer que $y_n \to y$ dans E pour conclure.

On remaque que $\left\| \dfrac{y_n + y}{2} \right\| \to 1$, puisque

$$\frac{y_n + y}{2} \rightharpoonup y \quad \text{implique} \quad \|y\| \leq \liminf \left\| \frac{y_n + y}{2} \right\| \quad \text{et} \quad \limsup \left\| \frac{y_n + y}{2} \right\| \leq \frac{1}{2}(\lim \|y_n\| + \|y\|) = \|y\|.$$

Cela implique $\|y - y_n\| \to 0$ (puisque dans le cas contraire $y_{n'}, y \in B_E$ et $\|y - y_{n'}\| \geq \varepsilon > 0$ impliquerait $\left\| \dfrac{y_n + y}{2} \right\| \leq 1 - \delta$). ◫

Soient E et F deux evn. On dit que $\varphi : E \to F$ est G-dérivable en $x \in E$ (ou différentiable au sens de Gâteaux) s'il existe $A \in \mathcal{L}(E, F)$ linéaire continue, on note $A = \varphi'(x)$, telle que

$$\forall\, y \in E,\ \forall\, t \in \mathbf{R} \qquad \varphi(x + t\, y) - \varphi(x) - t\, A\, y = o(t).$$

Théorème 7.3. Soit E un espace de Banach uniformément convexe. On suppose que l'application $\varphi : E \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \|x\|^2$ est G-dérivable. On suppose enfin qu'il existe un sev $F \subset E'$ tel que pour tout $x \in E$ on ait $\varphi'(x) \in F$. Alors $E' = F$.

Commençons par présenter une conséquence immédiate de ce résultat.

Théorème 7.4 (de représentation de Riesz-Fréchet). Soit H un espace de Hilbert. Alors $H' = H$. Plus précisément, étant donné $f \in H'$, il existe $u \in H$ tel que

$$\langle f, v \rangle = (u, v) \qquad \forall\, v \in H.$$

De plus, $\|f\| = |u|$.

Preuve du Théorème 7.4. On définit l'application $T : H \to H'$ par

$$\forall\, x,\, y \in H \qquad \langle T\, x, y \rangle = (x, y).$$

Il est clair que T est une isométrie ($\|Tx\| = |x|\ \forall\, x \in H$) et $F = T(H)$ est un sev de H'. D'autre part, $\varphi : H \to \mathbf{R}$, $y \mapsto |y|^2$ est G-dérivable en tout point $x \in H$, de dérivée $\langle \varphi'(x), z \rangle = (2\, x, z)$. On a donc $\varphi'(x) \in F$. ◫

Lemme 7.5. Soit E un espace de Banach uniformément convexe. Soit $K \subset E$ un convexe fermé non vide. Il existe une application $p_K : E \to K$ telle que

$$\forall\, x \in E, \qquad \|x - p_K x\| = \min_{y \in K} \|x - y\|.$$

Si de plus, l'application $\varphi : E \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \|x\|^2$ est G-dérivable, alors

$$\text{(1)} \qquad \langle \varphi'(x - p_K x), y - p_K x \rangle \leq 0 \qquad \forall\, y \in K,$$

et cette relation caractérise $p_K x$.
Si enfin $M \subset E$ est un sev fermé, alors

$$\langle \varphi'(x - p_M x), z\rangle = 0 \quad \forall\, z \in M. \tag{2}$$

Preuve du Lemme 7.5. i) existence. Soit $x \in E\backslash K$ et soit $y_n \in K$ telle que

$$\|x - y_n\| = J_n \ \text{décroît} \qquad \text{et} \qquad J_n \ \to \ J = \inf_{y \in K} \|x - y\| > 0.$$

On a donc $x - y_n \in B_E(0, J_p)$, $x - y_p \in B_E(0, J_p)$ pour $n \geq p$. Si $\exists\, \varepsilon > 0$ tel que $\|y_n - y_p\| > \varepsilon\, J_p$ alors, par uniforme convexité, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\left\| x - \frac{y_n + y_p}{2} \right\| = \left\| \frac{(x - y_n) + (x - y_p)}{2} \right\| \leq J_p\,(1 - \delta) < J,$$

pour p assez grand, ce qui serait absurde. Donc (y_n) est une suite de Cauchy. On note $p_K x$ sa limite.
ii) unicité. Si $y_1, y_2 \in K$ satisfont $\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = J$ et $y_1 \neq y_2$ alors $\|x - (y_1 + y_2)/2\| < J$, ce qui est absurde.
iii) preuve de (1) et (2). On a pour tout $y \in K$ et $t \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} \|x - p_K x\|^2 &\leq \|x - [(1 - t)\, p_K x + t\, y]\|^2 = \|x - p_K x + t\,(p_K x - y)\|^2 \\ &\leq \|x - p_K x\|^2 + t\,\langle \varphi'(x - p_K x), p_K x - y\rangle + o(t). \end{aligned}$$

On conclut en divisant par t et en passant à la limite $t \to 0$. Pour le point (2) on remarque que pour tout $z \in M$, il existe $y, y' \in M$ tels que $y - p_M x = z$, $y' - p_M x = -z$, et on utilise (1). ◫
iv) (1) et (2) caractérisent $p_K x$. On remarque que comme $\psi(a) := \varphi(a - p_K x)$ est convexe, on a

$$\psi(b) - \psi(a) \geq \langle \psi'(a), b - a\rangle. \tag{3}$$

En effet, il suffit d'écrire le critère de convexité

$$\psi(t\, b + (1 - t)\, a) \leq t\, \psi(b) + (1 - t)\, \psi(a)$$

sous la forme

$$\frac{1}{t}\,[\psi(a + t\,(b - a)) - \psi(a)] \leq \psi(b) - \psi(a)$$

et de passer à la limite $t \to 0$. Si $p_K x \in E$ vérifie (1) on déduit que $p_K x$ est solution du problème de minimisation grâce à (3).

Exercices 7.5. a) Montrer que $x \mapsto p_K x$ est continue. (Ind. Prendre une suite $x_n \to x \notin K$ (le cas $x \in K$ est trivial) et montrer que $J_n = \mathrm{dist}(x_n, K) \to J = \mathrm{dist}(x, K)$. En déduire que l'on ne peut pas avoir $\|p_K x_n - p_K x\| \geq \varepsilon > 0$ pour tout n.
b) Montrer que dans le lemme 7.5 on peut remplacer l'hypothèse "E un espace de Banach uniformément convexe" par l'hypothèse "E est un espace réflexif".

Preuve du Théorème 7.3. Soit $f \in E'$, $f \neq 0$. On définit l'hyperplan fermé $M = \ker f \neq E$. Soit $x_0 \in E$, $x_0 \notin M$. Alors

$$\langle \varphi'(x_0 - p_M x_0), y\rangle = 0 \quad \forall\, y \in M,$$

i.e. $\ker f \subset \ker \varphi'(x_0 - p_M x_0)$. Il existe donc $\lambda \neq 0$ tel que $f = \lambda^{-1}\, \varphi'(x_0 - p_M x_0) \in F$. ◫

Théorème 7.6 (Milman-Pettis). Tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif.

8 - Espaces de Hilbert.

Définition 8.1. Soit H un espace vectoriel. On appelle produit scalaire, on note $(.,.)$ une forme bilinéaire de $H \times H$ dans $\mathbf{R}$, symétrique, définie positive:

$$\forall\, u \in H \quad (u,u) \geq 0 \quad \text{et} \quad (u,u) = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0.$$

On dit que H est un espace de Hilbert s'il est muni un produit scalaire $(.,.)$ et s'il est complet pour la norme associée au produit scalaire: $\forall\, u \in H$ $|u| = (u,u)^{1/2}$.

Remarque 8.1. Rappelons qu'un produit scalaire vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz:

$$\forall\, u, v \in H \qquad |(u,v)| \leq |u|\,|v|.$$

En effet, il suffit de développer (en utilisant la bilinéarité du produit scalaire) l'expression $0 \leq (u+t\,v, u+t\,v)$ et d'écrire la condition pour un polynôme du deuxième degré en t d'être toujours positif. L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de vérifier facilement que $|.|$ satisfait l'inégalité triangulaire et en conclure que $|.| : H \to \mathbf{R}_+$ est bien une norme. Enfin, une norme issue d'un produit scalaire est caractérisé par le fait qu'elle vérifie l'identité du parallélogramme:

$$\forall\, a, b \in H \qquad \left|\frac{a+b}{2}\right|^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}\,(|a|^2 + |b|^2).$$

Théorème 8.3. (Projection sur un convexe fermé) Soit $K \subset H$ un convexe fermé non vide. Il existe une application $p_K : H \to K$ telle que

$$\forall\, u \in H, \qquad |u - p_K u| = \min_{v \in K} |u - v|. \tag{4}$$

De plus, $p_K u$ est caractérisé par

$$(u - p_K u, v - p_K u) \leq 0 \qquad \forall\, v \in K. \tag{5}$$

et l'application $p_K : H \to K$ est 1-Lipschitzienne. Si enfin $M \subset E$ est un sev fermé, alors $p_M u$ est caractérisé par

$$p_M u \in M, \quad (u - p_M u, v) = 0 \quad \forall\, v \in M. \tag{6}$$

Preuve du Théorème 8.3. Les seuls points nouveaux sont le caractère Lipschitzien (cas général) et linéaire (si $K = M$ sev) de p_K.
On a

$$(u_1 - P_K u_1, v - P_K u_1) \leq 0, \quad (u_2 - P_K u_2, v - P_K u_2) \leq 0 \quad \forall\, v \in K.$$

On prend $v = u_2$ dans la première inégalité et $v = u_1$ dans la seconde inégalité. On obtient

$$(u_1 - P_K u_1 - u_2 + P_K u_2, P_K u_2 - P_K u_1) \leq 0$$

de sorte que

$$|P_K u_2 - P_K u_1|^2 \leq (u_2 - u_1, P_K u_2 - P_K u_1) \leq |u_2 - u_1|\,|P_K u_2 - P_K u_1|$$

et donc $|P_K u_2 - P_K u_1| \leq |u_2 - u_1|$. ◻

Théorèmes de Stampacchia et de Lax-Milgram

Somme Hilbertienne et Base Hilbertienne.

9 - Quelques Compléments.

Dans cette section nous démontrons quelques résultats "abstraits" supplémentaires liés aux topologies faibles dans les espaces de Banach.

Questions: Soit X un espace de Banach muni d'une topologie/converge faible $\sigma(X,Y)$ avec $Y \subset X'$ telle que cette topologie sépare les points. Plus précisément, on considère $X = E$ muni de la topologie/convergence faible $\sigma(E,E')$ ou $X = E'$ muni de la topologie/convergence $*\sigma(E',E)$.
1 - Soit T une forme linéaire sur X. A-t-on T est séquentiellement faiblement continue ssi T est faiblement continue ?
2 - Montrer que $U := \{x \in E,\ \|x\| < 1\}$ n'est pas ouvert pour la topologie faible $\sigma(E,E')$ si E est de dimension infinie.
3 - La topologie faible de X fait-elle de X un espace complet?

Réponses: 1 - Soit $T : X \to \mathbf{R}$ une forme linéaire séquentiellement faiblement continue dans X. Montrons que $T(B_X)$ est borné. Dans le cas contraire, il existe .existe une suite (x_n) telle que $x_n \in B_X$ et $T(x_n) \geq n$. On arrive à une contradiction en considérant $y_n = n^{-1/2}\,x_n \to 0$ dans X fort (donc dans X faible) et pourtant $T(y_n) \geq n^{1/2} \not\to 0$!
2 - Si U est ouvert au sens de $\sigma(E,E')$, il existe $\varepsilon > 0$ et $f_1, ..., f_n \in E'$ tels que

$$0 \in \Delta := \bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i \subset \{x \in E;\ |\langle f_i, x\rangle| < \varepsilon\ \forall\, i = 1, ..., n\} \subset U,$$

et on peut supposer que les f_i sont linéairement indépendantes. Soit Δ contient un point autre que l'origine et donc une droite et cela contredit l'inclusion $\Delta \subset U$, soit $\Delta = \{0\}$. Cela signifie alors que pour tout $f \in E'$ on a $\cap \ker f_i \subset \ker f$ et par le lemme des noyaux, il existe (λ_i) tels que $f = \sum \lambda_i\, f_i$. On a donc $E \approx \mathbf{R}^n$ et donc $E \subset E'' \approx \mathbf{R}^n$. Donc E est de dimension finie.
3 - Il y a a priori deux sens à donner aux suites de Cauchy: une suite de Cauchy séquentielle est une suite (x_n) telle que $(\langle y, x_n\rangle)$ est de Cauchy pour tout $y \in Y$; une suite de Cauchy au sens topologique est une suite (x_n) telle que pour tout voisinage V de l'origine (au sens $\sigma(X,Y)$) il existe N tel que $x_n - x_p \in V\ \forall\, n,\, p \geq N$. En fait, ces deux notions coïncident (reprendre la preuve du fait que la convergence au sens topologique est la convergence "dans chaque direction"). Ce qui est clair est que l'espace E' muni de la convergence $\sigma(E',E)$-$*$ est complet (il suffit d'appliquer Banach-Steinhaus), donc également la topologie $\sigma(E,E')$ si E est réflexif. Il est également vrai que L^1 muni de la convergence $\sigma(L^1, L^\infty)$ est complet (voir la preuve de Dunford-Pettis, cela provient de ce que $L^1_{loc} \subset L^2_{loc} + \varepsilon B_{L^1}$ pour tout $\varepsilon > 0$). Idem pour ℓ^1 muni de la convergence faible $\sigma(\ell^1, \ell^\infty)$: il est complet (cela se montre "coordonnée par coordonnée"). Par contre la topologie $\sigma(c_0, \ell^1)$ n'est pas complète (donc $E = c_0$, $E' = \ell^1$, $E'' = \ell^\infty$). En effet, soit $x_n = (1, ..., 1, 0, ..., 0, ...)$. Pour tout $y \in \ell^1$ on a $\langle y, x_n\rangle \to \sum y_n = \langle y, 1\rangle$ où $1 = (1, ..., 1, ...) \in \ell^\infty \backslash c_0$. On en déduit que (x_n) est de Cauchy $\sigma(c_0, \ell^1)$ mais ne converge pas au sens de cette topologie. On peut "généraliser" en considérant un espace E tel que E et E' sont séparables mais pas $E'' \neq E$. Alors soit $\xi \in E'' \backslash E$ et disons $\|\xi\|_{E''} \leq 1$. Alors d'une part, par le lemme de Golstine, B_E est dense $\sigma(E'', E')$ dans $B_{E''}$. D'autre part, E' étant séparable, la topologie $\sigma(E'', E')$ restreinte à $B_{E''}$ est métrisable, donc B_E est séquentiellement dense $\sigma(E'', E')$ dans $B_{E''}$. Il existe donc une suite (x_n) de B_E qui converge $\sigma(E''; E')$ vers ξ. Alors (x_n) est de Cauchy pour la topologie $\sigma(E, E')$ puisque $\langle f, x_n\rangle = \langle Jx_n, f\rangle \to \langle \xi, f\rangle$, mais ne converge pas $\sigma(E, E')$ car alors on aurait également $\forall\, f \in E'\ \langle f, x_n\rangle = \langle f, x\rangle$, de sorte que $\forall\, f \in E'\ \langle f, x\rangle = \langle \xi, f\rangle$ et $\xi = J\,x \in E$!

Proposition 8.1. - Une application linéaire $\varphi : E' \to \mathbf{R}$ est continue pour la topologie $*\sigma(E',E)$ si, et seulement si, $\varphi = J\,x$ pour un certain $x \in E$.
- L'hyperplan $H := [\varphi = \alpha]$ est fermé pour la topologie $*\sigma(E',E)$ si, et seulement si, $\varphi = J\,x$ pour un certain $x \in E$.

Lemme de Goldstine. Soit E un espace de Banach. Alors $J(B_E)$ est dense dans $B_{E''}$ pour la topologie $\sigma(E'', E')$.

Théorème 8.2 (Banach-Alaoglu-Bourbaki). L'ensemble $B_{E'} := \{f \in E',\ \|f\| \leq 1\}$ est compact pour la topologie faible $*\sigma(E',E)$.

Théorème 8.3 (Kakutani). Un evn E est réflexif si, et seulement si, $B_E := \{x \in E,\ \|x\| \leq 1\}$ est compact pour la topologie faible $\sigma(E,E')$.

Théorème 8.4. Soit E un espace de Banach. Alors E est séparable si, et seulement si, $B_{E'} := \{f \in E',\ \|f\| \leq 1\}$ est métrisable pour la topologie faible $*\sigma(E',E)$. De même, E' est séparable si, et seulement si, $B_E := \{x \in E,\ \|x\| \leq 1\}$ est métrisable pour la topologie faible $\sigma(E,E')$.

Lemme 8.5 (Mazur). Soient E un espace de Banach et (u_n) une suite d'éléments de E qui converge faiblement vers $u \in E$. Alors
a) - pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe une suite (v_n) dans l'enveloppe convexe de $\{u_k\}_{k \geq n}$ qui converge vers u fortement.
b) - pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe une suite (w_n) dans l'enveloppe convexe de $\{u_k\}_{k \leq n}$ qui converge vers u fortement.

Preuve du Lemme 8.5. a) - Soit $A_n := \mathrm{conv}\,\{u_k,\ k \geq n\}$ l'enveloppe convexe de $\{u_k\}_{k \geq n}$. L'ensemble $F_n = \overline{A_n}$ est un convexe fermé de E, c'est donc un convexe fermé faible de E et donc également un convexe séquentiellement fermé faible de E. Comme $u_k \in F_n$ pour tout $k \geq n$ on en déduit que $u \in F_n$ pour tout n et donc il existe $v_n \in A_n$ tel que (par exemple) $\|v_n - u\| \leq 1/n$.
b) - Soit $B_n := \mathrm{conv}\,\{u_k,\ k \leq n\}$ l'enveloppe convexe de $\{u_k\}_{k \leq n}$. C'est une suite croissante de convexes de sorte que $G := \overline{\lim G_p}$ est un convexe fermé de E. L'ensemble $G_n = \overline{B_n}$ est un convexe fermé de E, donc un séquentiellement fermé faible de E. De $u_n \in G$ pour tout n on déduit que $u \in G$ puis qu'il existe $z_n \in G$ telle que $\|z_n - u\| \leq 1/n$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. On pose $\sigma(1) = 1$ et on construit par récurrence $\sigma(n)$ comme étant le plus petit entier $k \in \{\sigma(n-1)+1, \sigma(n-1)+2, ...\}$ tel que $z_n \in G_k$. Ainsi σ est injective strictement croissante et $\omega = \sigma^{-1}$ est croissante non stationnaire (on pose $\omega(k) = \min(i;\ \sigma(i) \geq k)$) de sorte que $w_n = z_{\omega(n)} \in G_n$ (car $\sigma(i) \geq i$ implique $\omega(k) \leq k$) et $\|w_n - u\| = 1/\omega(n) \to 0$. ⊔⊓

Théorème 8.5 (Eberlein-Smulian 1). Soit E un espace de Banach et $A \subset E$. Si A est relativement compacte pour la topologie faible alors A séquentiellement relativement faiblement compacte. Ce résultat est faux en général pour la topologie faible-$*$.

Preuve du Théorème 8.5.1. Commençons par supposer de plus que E est séparable, et notons $\{x_m,\ m \in \mathbf{N}\}$ une famille dénombrable dense. On construit, par Hahn-Banach, une suite (f_m) de E' telle que $\|f_m\|_{E'} = 1$ et $\langle f_m, x_m\rangle = \|x_m\|$. Sur A qui est borné on définit

$$d(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m}\,|\langle f_m, y-x\rangle|.$$

C'est une distance. Le seul point délicat est de montrer que $d(x,y) = 0$ implique $x = y$. Or si $d(x,y) = 0$ on a $|\langle f_m, y-x\rangle| = 0$ $\forall\, m \in \mathbf{N}^*$. En effet, soit (x_{m_k}) une suite telle que $x_{m_k} \to y-x$, alors

$$\|y-x\| = \lim_{k\to\infty} \|x_{m_k}\| = \lim_{k\to\infty} |\langle f_{m_k}, x_{m_k}\rangle| = \lim_{k\to\infty} |\langle f_{m_k}, x-y-x_{m_k}\rangle| \le \lim_{k\to\infty} \|x-y-x_{m_k}\| = 0.$$

La topologie induite par d est moins fine que la topologie faible car $\{x \in E;\ |\langle f_m, x\rangle| \le 2^{-n-1}\ \forall\, m \le n\} \subset B_d(0, 1/2^n)$. Ainsi l'application $Id : (\overline{A}, \sigma(E,E')) \to (\overline{A}, d)$ est bijective, continue, partant d'un compact donc est bi-continue (c'est un homéomorphisme), en particulier la topologie induite par d est équivalente à la topologie faible: cette dernière est métrisable. Donc $\overline{A}$ est séquentiellement faiblement compact.

On ne suppose plus que E est métrisable. Soit (a_n) une suite de A et soit $F = \overline{\mathrm{Vect}\{a_n;\ n \in \mathbf{N}\}}$. F est un espace de Banach séparable, et $B = A \cap F$ est relativement compacte pour la topologie faible (de E donc de F). [Si $(O)_{i\in I}$ est un recouvrement de B par des ouverts de $\sigma(F,F')$ alors on peut supposer que chaque O_i est "un ouvert élémentaire" (car un ouvert est une union quelconque d'ouverts élémentaires) et donc $O_i = x_i + B_{J_i}(0,\varepsilon_i)$ avec $B_J(0,\varepsilon) = \{x \in F;\ |\langle f_j, x\rangle| < \varepsilon\ \forall\, j \in J\}$, $f_j \in F'$. Par Hahn-Banach, il existe $\bar f_j \in E'$ tel que $\bar f_j|_F = f_j$ de sorte que $(\bar O_i)_{i\in I}$ (obtenu en remplaçant f_j par $\bar f_j$) est un recouvrement de B. Par hypothèse on peut en extraire un sous-recouvrement fini $(\bar O_k)_{k\in K}$ et le sous-recouvrement fini $(O_k)_{k\in K}$ convient]. De la première preuve on déduit que B est séquentiellement faiblement compact $\sigma(F,F')$. Ainsi (a_n) (qui est inclus dans $\overline{B}$) admet une sous-suite faiblement convergente au sens $\sigma(F,F')$, donc au sens de $\sigma(E,E')$.

On considère $E = \ell^\infty$. On sait que $B_{(\ell^\infty)'}$ est compacte pour la topologie $\sigma((\ell^\infty)', \ell^\infty)$. Soit (φ_n) la suite de $(\ell^\infty)'$ définie par $\varphi_n(u) = u_n\ \forall\, u \in \ell^\infty\ \forall\, n \in \mathbf{N}^*$. Alors $\|\varphi_n\| = 1$ et si $\varphi_{\sigma(n)} \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$ alors pour toute suite $u \in \ell^\infty$ on a $u_{\sigma(n)} = \varphi_{\sigma(n)}(u) \to \varphi(u)$: autrement dit, il existe une extraction σ telle que pour toute suite bornée, la sous-suite extraite associée soit convergente, ce qui est faux. ◻

Théorème 8.5 (Eberlein-Smulian 2). Soit E un espace de Banach et $A \subset E$. Si A est séquentiellement faiblement compacte alors A est compacte pour la topologie faible.

Théorème 8.5 (Kakutani et Eberlein-Smulian) (admis). Soit E un espace de Banach. Si
Il y a équivalence entre

(i) E est réflexif;

(ii) B_E est compact pour la topologie $\sigma(E,E')$;

(iii) B_E est séquentiellement compact pour la convergence $\sigma(E,E')$.

Théorème (Banach-Dieudonné-Krein-Smulian). Soit E un espace de Banach et soit $C \subset E'$ un convexe. On suppose que

$$\forall n \qquad C \cap (n\, B_{E'}) \ \text{ est fermé pour la topologie } \ *\,\sigma(E',E).$$

Alors C est fermé pour la topologie $*\,\sigma(E',E)$.

Corollaire. Soit E un espace de Banach séparable et soit $C \subset E'$ un convexe. Il y a équivalence entre

(i) C est fermé pour la topologie faible $*\,\sigma(E',E)$;

(ii) C est séquentiellement fermé pour la convergence faible $*\,\sigma(E',E)$.

Théorème 7.6 (Milman-Pettis). Tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif.

Preuve du Théorème 6.5. On veut montrer $B_{E''} = J(B_E)$. Comme $J(B_E)$ est fermé, il suffit de montrer que $J(B_E)$ est dense dans E''. On fixe donc $\xi \in E''$, $\|x\|_{E''} = 1$ et $\varepsilon > 0$ et l'on va démontrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\|J\,x - \xi\|_{E''} \le \varepsilon$. Soit $\delta > 0$ donné par la définition de l'uniforme convexité.

• Il existe $f \in E'$, $\|f\| = 1$ tel que $\|\xi\| = 1 \le \langle \xi, f\rangle + \delta/2$, puis il existe $x \in E$, $\|x\| = 1$ tel que $\|f\| = 1 \le \langle f, x\rangle + \delta/2$. Il en résulte que $V := \{\eta \in E'';\ |\langle \eta - \xi, f\rangle| < \delta/2\}$ contient $J\,x$. Il s'agit de montrer que $\|J\,x - \xi\|_{E''} \le \varepsilon$, et pour cela, on suppose par l'absurde que $\|J\,x - \xi\|_{E''} > \varepsilon$.

• Il existe $g \in E'$, $\|g\| = 1$ tel que $\langle \xi - J\,x, g\rangle > \varepsilon' + \varepsilon$, $\varepsilon' > 0$. La forme linéaire g définit ainsi un hyperplan H qui sépare ξ et $J(x) + \varepsilon\, B_{E''}$ dans E''. Il en résulte que l'ouvert (de $\sigma(E'',E')$)

$$W := \{\eta \in E'';\ |\langle \eta - \xi, f\rangle| < \delta/2,\ |\langle \eta - \xi, g\rangle| < \varepsilon'\}$$

contient ξ et est disjoint de $J(x) + \varepsilon\, B_{E''}$. Supposons montré qu'il existe $y \in B_E$ tel que $J\,y \in W$. Cela signifie d'une part que $\|x-y\| = \|J\,x - J\,y\|_{E''} > \varepsilon$. Cela signifie d'autre part que

$$|\langle \xi, f\rangle - \langle f, x\rangle| < \delta/2, \qquad |\langle \xi, f\rangle - \langle f, y\rangle| < \delta/2$$

et donc

$$2 - \delta \leq 2\,\langle \xi, f\rangle \leq \langle f, x+y\rangle + \delta \leq \|x+y\|,$$

ce qui contredit l'uniforme convexité.

• Montrons par l'absurde qu'il existe $y \in B_E$ tel que $J\,y \in W$. Dans le cas contraire, cela signifie que $\alpha := (\langle \xi, f\rangle, \langle \xi, g\rangle) \notin \overline{\varphi(B_E)}$, où on a défini $\varphi : B_E \to \mathbf{R}^2$,

$$z \in B_E \;\mapsto\; \varphi(z) = (\langle f, z\rangle, \langle g, z\rangle).$$

On peut donc séprarer au sens strict dans $\mathbf{R}^2$ les compacts convexes $\{\alpha\}$ et $\overline{\varphi(B_E)}$: $\exists\,\beta \in \mathbf{R}^2$, $\exists\,\gamma \in \mathbf{R}$ tels que

$$\forall\, z \in B_E \qquad \beta \cdot \varphi(z) < \gamma < \beta \cdot \alpha.$$

En posant $h := \beta_1\, f + \beta_2\, g \in E'$, on en déduit

$$\|h\|_{E'} = \sup_{z \in B_E} \langle h, z\rangle \leq \gamma < \langle \xi, h\rangle,$$

ce qui est absurde puisque $\|\xi\| = 1$. ⊔⊓

Théorème 7.6 (Krein-Milman). Soit E un e.v.n. et soit $K \subset E$ un ensemble convexe compact. Alors K coïncide avec l'enveloppe convexe fermé de ses points extrémaux.

9 - Elements de correction des exercices.