Ecole Normale Supérieure **20056-2007**

Cours d'Analyse Fonctionnelle et EDP mai 2007

Chapitre 6 - Espaces de Sobolev et problèmes variationnels

1 - Le Laplacien avec condition de Dirichlet dans un ouvert borné.

Théorème 1.1. L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable. L'espace $W^{1,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$ est un espace réflexif séparable. L'espace $W^{1,1}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable et l'espace $W^{1,\infty}(\Omega)$ est un espace de Banach non séparable.

Preuve du Théorème 1.1. • Montrons que $W^{1,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$ est réflexif. En effet, l'application $T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)^{N+1}$, $u \mapsto [u, \partial_1 u, ..., \partial_N u]$ est une isométrie. Donc $T(W^{1,p}(\Omega))$ est un sev fermé de $L^p(\Omega)^{N+1}$ qui est réflexif comme produit fini d'espaces réflexifs. On en déduit que $T(W^{1,p}(\Omega))$ est réflexif et donc également $W^{1,p}(\Omega)$.

• Montrons que $W^{1,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$ est séparable. En effet, $T(W^{1,p}(\Omega))$ est séparable et donc également $W^{1,p}(\Omega)$. ◫

Remarques 1. (i) Soit (u_n) une suite de $W^{1,p}$, $1 \le p \le \infty$, telle que $u_n \to u$ dans L^p et (∇u_n) admet une limite dans $(L^p)^N$, alors $u \in W^{1,p}$ et $u_n \to u$ dans $W^{1,p}$. On peut remplacer les convergences dans L^p par des convergences au sens $\sigma(L^p, L^{p'})$. En particulier, si $1 < p \le \infty$, (u_n) est une suite bornée de $W^{1,p}$ et $u_n \rightharpoonup u$ $\sigma(L^p, L^{p'})$ alors $u \in W^{1,p}$.

(ii) Pour $1 < p < \infty$ et (u_n) une suite de $W^{1,p}$, il y a équivalence (à extraction d'une sous-suite près) entre

(1) $u_n \rightharpoonup u$ au sens $\sigma(W^{1,p}, (W^{1,p})')$;

(2) $u_n \rightharpoonup u$ et $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u$ au sens $\sigma(L^p, L^{p'})$;

(3) (u_n) est bornée dans $W^{1,p}$.

En effet, (3) est équivalent à dire que (u_n) et (∇u_n) sont bornées dans L^p, qui est équivalent à son tour à (2) grâce à la compacité faible de la boule B_{L^p} d'une part et grâce à un corollaire de Banach-Steinhaus d'autre part. L'équivalence entre (1) et (3) est vraie pour les mêmes raisons.

(iii) Pour $p = \infty$, on garde l'équivalence entre (2) et (3). Plutôt que (1) on s'attend à une convergence faible $*$. La question reste donc: $W^{1,\infty}$ est-il le dual d'un espace de Banach?

(iv) Pour $1 \le p \le \infty$, $f_j \in L^{p'}$, $0 \le j \le \infty$, l'application

$$u \in W^{1,p} \mapsto \Lambda(u) := \int_\Omega f_0\, u + \sum_{i=1}^N \int_\Omega f_i\, \partial_i u$$

est une forme linéaire continue sur $W^{1,p}$, donc un élément de $(W^{1,p})'$. En choisissant $f_j = 0$ pour tout $j \ne i$, on obtient ainsi que (1) implique (2) également dans le cas $p = 1$.

(v) On voit que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\Lambda(\varphi) = \langle f_0, \varphi \rangle + \sum_i \langle f_i, \partial_i \varphi \rangle = \langle f_0 - \sum_i \partial_i \{f_i\}, \varphi \rangle,$$

de sorte que

$$\Lambda|_{\mathcal{D}(\Omega)} \in \tilde{W}^{-1,p'}(\Omega) := \{T \in \mathcal{D}'(\Omega);\, T = f_0 - \sum_i \partial_i \{f_i\},\ f_j \in L^{p'}\}.$$

Si $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $W^{1,p}(\Omega)$ on a $\Lambda \in \tilde{W}^{-1,p'}$.

Théorème 1.2 (Friedrichs). Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ $1 \le p < \infty$. Il existe une suite (u_n) de $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que

(i) $u_n \to u$ dans $L^p(\Omega)$;
(ii) $\nabla u_n|_\omega \to \nabla u|_\omega$ dans $L^p(\omega)^N$ pour tout $\omega \subset\subset \Omega$.
(iii) Par la réciproque du théorème de convergence dominée on peut donc également affirmer que $|u_n| \le v \in L^p(\Omega)$, $u_n \to u$ p.p. dans Ω, $|\partial_i u_n| \le w_i \in L^p_{loc}(\Omega)$, $\partial_i u_n \to \partial_i u$ p.p. dans Ω.

Preuve du Théorème 1.2. On reprend la suite $u_n := \rho_n * (\zeta_n\, u)$, avec $\zeta = \mathbf{1}_{K_n}$, (K_n) une suite exhaustive de compacts de Ω telle que $\mathrm{dist}(K_n, \Omega^c) \ge 2/n$, et (ρ_n) une suite régularisante, $\rho_n = n^N\, \rho(n\, x)$, $0 \le \rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $\mathrm{supp}\, \rho \subset B(0,1)$, $\|\rho\|_{L^1} = 1$, utilisée dans la preuve de la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. On remarque que $v_n = \zeta_n\, u \to u$ dans L^p, par convergence dominée et puisque $u \in L^p(\Omega)$, puis

$$\|\rho_n * v_n - u\|_{L^p(\Omega)} \quad \le \quad \|\rho_n * (v_n - \bar u)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\rho_n * \bar u - \bar u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \to 0,$$

d'où (i). De plus,

$$\nabla u_n = \rho_n * (u\, \nabla \zeta_n + \zeta_n \nabla u) \quad \text{dans} \quad \omega \subset\subset \Omega,$$

avec $n^{-1} < \mathrm{dist}(K_n^c, \bar\omega)$ et $n^{-1} < \mathrm{dist}(\bar\omega, \Omega^c)$ de sorte que $\zeta_n \equiv 1$ sur $\bar\omega + B(0, 1/n)$. Alors d'une part, $\rho_n * (\zeta_n \nabla u) = \rho_n * (\nabla u) \to \nabla u$ dans $L^p(\omega)$. Et d'autre part, puisque $\nabla \zeta_n = 0$ sur $\bar\omega + B(0, 1/n)$, on a $\rho_n * (u\, \nabla \zeta_n) = 0$ sur ω. On a donc (ii). L'assertion (iii) est alors une conséquence de la "réciproque du théorème de convergence dominée". ◫

Proposition 1.3. Soit $u \in L^p(\Omega)$ avec $1 < p \le \infty$. Les propriétés suivantes sont équivalentes
(i) $u \in W^{1,p}(\Omega)$;
(ii) $\exists\, C$ telle que $\displaystyle\left|\int_\Omega u\, \partial_i \varphi\right| \le C\, \|\varphi\|_{L^{p'}} \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$;
(iii) $\exists\, C$ telle que $\forall\, \omega \subset\subset \Omega$, $\forall\, h \in \mathbb{R}^N$ $|h| < \mathrm{dist}(\bar\omega, \Omega^c)$ on a $\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \le C\, |h|$.
De plus, dans le cas $p = 1$, on a (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).

Preuve de la Proposition 1.3. L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est une conséquence immédiate de la définition d'une fonction de $W^{1,p}(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$.
Montrons (i) $\Rightarrow$ (iii). Si $u \in C^1_c(\mathbb{R}^N)$ et $1 \le p < \infty$, on écrit

$$u(x - h) - u(x) = -\int_0^1 h \cdot \nabla u(x - t\, h)\, dt.$$

Par Hölder, il vient

$$|\tau_h u(x) - u(x)|^p \le |h|^p \int_0^1 |\nabla u(x - t\, h)|^p\, dt,$$

et après intégration sur le domaine

$$\|\tau_h u - u\|^p_{L^p(\omega)} \le |h|^p \int_\omega \int_0^1 |\nabla u(x - t\, h)|^p\, dt dx \le |h|^p \int_0^1 \int_\Omega |\nabla u(y)|\, dy\, dt = |h|^p\, \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)}.$$

Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $1 \le p < \infty$ on raisonne par densité en utilisant le théorème de Friedrichs. Si $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ on applique ce qui précède dans $W^{1,p}(\Omega \cap B_R)$ avec $R, p < \infty$ et on laisse tendre $p \to \infty$, puis $R \to \infty$.

Montrons (ii) $\Rightarrow$ (i). De (ii), on déduit que la distribution $T_i : \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \mapsto -\displaystyle\int_\Omega u\, \partial_i \varphi\, dx$ s'étend en une forme linéaire continue de $L^{p'}(\Omega)$, elle s'identifie donc à un élement de $L^p(\Omega)$: $\exists\, v_i \in L^p(\Omega)$ telle que $\partial_i u = T_i = \{v_i\}$. Donc $u \in W^{1,p}(\Omega)$.
Montrons enfin (iii) $\Rightarrow$ (ii). Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $t > 0$, $|t| < \mathrm{dist}(\mathrm{supp}\, \varphi, \Omega^c)$ on a

$$\left|\int_\Omega (\tau_{t\, e_i} \varphi - \varphi)\, u\, dx\right| = \left|\int_\Omega (\tau_{t\, e_i} u - u)\, \varphi\, dx\right| \le C\, |t|\, \|\varphi\|_{L^{p'}},$$

et on obtient (ii) en passant à la limite $t \to 0$. $\square$

Définition 1.4. Soit $1 \le p < \infty$. On définit $W_0^{1,p}(\Omega)$ comme étant la fermeture de $C_c^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. On note $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$. L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est un espace réflexif, séparable comme sev fermé de l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ et l'espace $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert. On montre sans difficulté en reprenant la preuve du Théorème 1.1 que $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, mais en général $W_0^{1,p}(\Omega) \neq W^{1,p}(\Omega)$.

Remarques 2. (i) Par exemple, $\mathbf{1}_\Omega \in W^{1,p} \backslash W_0^{1,p}$ si Ω est un ouvert borné.
(ii) Pour $1 \le p < \infty$, $W_0^{1,p}$ est un sev fermé faible de $W^{1,p}$ au sens où $u_n \in W_0^{1,p}$, $u_n \rightharpoonup u$ dans L^p faible et (∇u_n) est bornée dans L^p implique $u \in W_0^{1,p}$. Indiquons deux preuves. Le plus simple est de dire que cela implique $u_n \rightharpoonup u$ au sens $\sigma(W^{1,p}, (W^{1,p})')$ et de conclure grâce à un corollaire de Hahn-Banach. Une deuxième preuve consiste à supposer de plus que $u_n \to u$ dans L^p, et donc $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u$ $\sigma(L^p, L^{p'})$, et d'invoquer le lemme de Mazur, il existe une combinaison convexe v_N des $(u_n)_{n\ge N}$ telle que $\nabla v_N \to \nabla u$ dans L^p fort, et donc également $v_N \to u$ dans $W^{1,p}$. On a pas besoin de l'hypothèse supplémentaire $u_n \to u$ dans L^p ici. En effet, si $v_N = \sum \theta_i^N u_{n_i}$ et d est la distance associée à la convergence au sens de la topologie faible, on a

$$d(u, v_N) = \sum_j \sum_i \theta_i^N 2^{-j} \left|\langle w_j, u - u_{n_i}\rangle\right| \le \sup_{n\ge N} d(u, u_n) \to 0 \quad \text{lorsque} \quad N \to \infty,$$

ici (w_j) est une suite dense de $B_{L^{p'}}$, donc encore $v_N \rightharpoonup u$ au sens faible L^p. En itérant le lemme de Mazur, mais cette fois-ci avec la suite (v_N), on construit une suite (w_N) telle que $w_N \to u$ en norme dans $W^{1,p}$.
(iii) On a $(W_0^{1,p})' = W^{-1,p'}$ lorsque $1 \le p < \infty$. On reprend l'isométrie T du théorème 1.1, qui est donc une bijection de $W_0^{1,p}$ sur $G := T(W_0^{1,p}) \subset (L^p)^{N+1}$. Pour $F \in (W_0^{1,p})'$ on définit $\forall\, v \in G$ $\Lambda(v) := \langle F, T^{-1}v\rangle$ qui est une application linéaire et continue. Par Hahn-Banach on étend Λ en un élément $\bar\Lambda \in ((L^p)^{N+1})'$, avec $\|\Lambda\|_{((L^p)^{N+1})'} = \|F\|_{(W_0^1)'}$. Par le théorème de Riesz, il existe $f_j \in L^{p'}$, $0 \le j \le N$, telle que

$$\bar\Lambda(v) = \sum_{j=0}^N \int v_j\, f_j \qquad \forall\, v \in (L^p)^{N+1}, \quad \text{avec donc} \quad \|\bar\Lambda\|_{((L^p)^{N+1})'} = \max_{0\le j\le N} \|f_j\|_{L^{p'}}.$$

On en déduit pour tout $u \in W_0^{1,p}$

$$\langle F, u\rangle = \Lambda(T\,u) = \int u\, f_0 + \sum_{j=1}^N \int f_j\, \partial_j u.$$

Or le terme de droite s'identifie à (est!) un élément de $W^{-1,p'}$, d'où l'inclusion $(W_0^{1,p})' \subset W^{-1,p'}$. L'inclusion étant prouvé dans la remarque 1, on a bien établi l'existence d'une isométrie entre $(W_0^{1,p})'$ et $W^{-1,p'}$.
(iv) On doit pouvoir établir que $W^{1,\infty} = (W^{-1,1})'$ (à vérifier ...).
(iv) Lorsque $W_0^{1,p} \neq W^{1,p}$ on a $W^{-1,p'} \subset (W^{1,p})'$ sans avoir égalité, au moins dans le cas d'un "ouvert régulier". C'est un argument déjà rencontré dans le cadre fonctions continues/mesures de Radon. Soit donc un ouvert régulier Ω et acceptons l'existence d'un opérateur "trace" (ou "valeurs au bord") $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ linéaire continu et tel que $\gamma u = u|_{\partial\Omega}$ si $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$ On introduit l'espace vectoriel $G := W_0^{1,p} + \mathbb{R}\,\mathbf{1}_\Omega \neq W_0^{1,p}$ puisque $\mathbf{1}_\Omega \notin W_0^{1,p}$. Alors $\gamma(u + \lambda\,\mathbf{1}_\Omega) = \lambda\,\mathbf{1}_{\partial\Omega}$, ce qui permet de définir (grâce au théorème de Hahn-Banach) une forme linéaire continue $\varphi : W^{1,p} \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi|_G\,\mathbf{1}_{\partial\Omega} = \gamma|_G$. Alors si $i : W_0^{1,p} \to W^{1,p}$ est l'injection canonique, on voit que $i^*\varphi = 0$ et pourtant $\varphi \neq 0$, cela prouve que i^* n'est pas injective. On peut être plus précis. En effet, acceptons l'existence d'un opérateur "relèvement" $R : \gamma W^{1,p} \to W^{1,p}(\Omega)$ linéaire continu et tel que $\forall u \in \gamma W^{1,p}(\Omega)$ $\gamma\, R\, u = u$, de sorte que l'application $P = Id - R \circ \gamma : W^{1,p} \to W^{1,p}$ est un projecteur sur $W_0^{1,p}$. En introduisant $i : W_0^{1,p} \to W^{1,p}$ et $j : V := (R\circ\gamma)\,(W^{1,p}) \to W^{1,p}$ les injections canoniques, on constate que $\Phi = (i^*, j^*) : (W^{1,p})' \to (W_0^{1,p})' \times V'$ est un isomorphisme et donc $(W_0^{1,p})'$ s'identifie via i^* à un sev strict de $(W^{1,p})'$.

Théorème 1.5 (Inégalité de Poincaré). Supposons Ω borné (dans un moins une direction) et $1 \le p < \infty$. Alors il existe une constante $C = C_{\Omega,p}$ telle que

$$\forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega) \qquad \|u\|_{L^p(\Omega)} \le C\, \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Remarque. L'inégalité de Poincaré est également vraie dans le cas où Ω est de mesure finie et régulier, c'est alors une conséquence de l'inégalité de Sobolev.

Preuve du Théorème 1.5. On peut supposer Ω borné dans la direction e_1: $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^N,\ |x_1| \leq R/2\}$. Pour $u \in C^1_c(\Omega)$ on a alors

$$u(x) = u(x) - u(x_1 - R\,e_1) = R\int_0^1 (\partial_1 u)(x - R\,t\,e_1)\,dt$$

et donc

$$\int_\Omega |u|^p \leq R^p \int_\Omega |\partial_1 u|^p\,dx.$$

On raisonne ensuite par densité $C^1_c(\Omega) \subset W^{1,p}_0(\Omega)$. ◫

Exemple 1.7. Soit Ω un ouvert borné. On considère le problème de Dirichlet homogène, i.e. étant donnée une fonction f sur Ω, on cherche une fonction $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ telle que

$$(1) \qquad -\Delta\,u = f \quad \text{dans} \quad \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega.$$

Etape 1 (formulation variationnelle). Une solution classique est une fonction $u \in C^2(\bar{\Omega})$ qui satisfait (1) en tout point. Une solution variationnelle est une fonction $u \in H^1_0(\Omega)$ qui satisfait

$$(2) \qquad \int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega f\,v \qquad \forall\,v \in H^1_0(\Omega).$$

Remarques 1.8. - La condition aux limites $u = 0$ sur $\partial\Omega$ est incluse dans le choix de l'espace dans lequel on travail: $H^1_0(\Omega)$ et non pas $H^1(\Omega)$ par exemple.
- Il est fondamental ici d'avoir le même espace pour la solution u et les fonctions tests v. Si l'espace des fonctions tests est plus petit, on parlera de solution faible. Par exemple, $u \in H^1_0(\Omega)$ est solution faible de (1) si

$$(3) \qquad \int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega f\,v \qquad \forall\,v \in \mathcal{D}(\Omega),$$

ou

$$(3') \qquad \int_\Omega u\,(-\Delta\,v) = \int_\Omega f\,v \qquad \forall\,v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Dans ce dernier cas, on parlera de solution au sens des distributions. Ici, il est évident qu'une solution $u \in H^1_0(\Omega)$ de $(3')$ est une solution de (3) (il suffit d'utiliser la définition de $\partial_i u$), et qu'une solution de $(3')$ est solution de (2) (par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1_0(\Omega)$). Attention, il n'est pas vrai qu'une solution $u \in H^1(\Omega)$ de $(3')$ est solution de (2), car on a perdu la condition aux limites.

Proposition 1.9. Une solution classique $u \in C^2(\bar{\Omega})$ est une solution variationnelle.

Preuve de la Proposition 1.9. - On a d'une part, pour tout $\varphi \in C^1_c(\Omega)$ grâce à la formule de Stokes

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = -\int_\Omega \operatorname{div}(\nabla u)\,\varphi - \int_{\partial\Omega} (n \cdot \nabla u)\,\varphi = \int_\Omega f\,\varphi$$

puisque le terme de bord est nul à cause de la condition de support de φ. Donc par densité la même identité est vraie pour tout $\varphi \in H^1_0(\Omega)$.
- Il faut montrer d'autre part que $u \in H^1_0(\Omega)$. On considère $G_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la primitive qui s'annule en 0 de la fonction paire $G'_\varepsilon(s) = 0$ si $s < \varepsilon$, $G'_\varepsilon(s) = s/\varepsilon - 1$ si $\varepsilon \leq s \leq 2\varepsilon$, $G'_\varepsilon(s) = 1$ si $s > 2\,\varepsilon$. Alors $G_\varepsilon(u) \in C^1(\Omega)$

et $G_\varepsilon(u) = 0$ en dehors du compact $K := \{x \in \Omega,\ |u(x)| \le \varepsilon\}$ avec $K \cap \Omega^c = \emptyset$, donc $K \subset \Omega$ et enfin $G_\varepsilon(u) \in C_c^1(\Omega)$. Comme $G_\varepsilon(u) \to u$ dans $L^p(\Omega)$ et $(\nabla G_\varepsilon(u))$ est bornée, on en déduit que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ grâce à la Remarque 2. ◫

Etape 2 (existence et unicité d'une solution variationnelle). On définit

$$a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v \quad \text{et} \quad F : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad F(v) = \int_\Omega f\, v.$$

Alors a est une forme bilinéaire, continue et coercive, puisque d'après l'inégalité de Poincaré

$$a(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \ge \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{C_\Omega}{2} \int_\Omega u^2 \ge \frac{1}{2} \min(1, C_\Omega)\, \|u\|_{H_0^1}^2,$$

et F est une forme linéaire et continue. On applique le théorème de Lax-Milgram qui affirme l'existence et l'unicité d'une solution $u \in H_0^1(\Omega)$ à l'équation

$$a(u,v) = F(v) \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega),$$

c'est-à-dire précisément une solution variationnelle. De plus, u est alors la solution du problème de minimisation

$$\mathcal{E}(u) = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} \mathcal{E}(v), \qquad \mathcal{E}(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega f\, v.$$

Enfin, on remarque que de l'inégalité

$$\frac{1}{2} \min(1, C_\Omega)\, \|u\|_{H_0^1}^2 \le \int_\Omega |\nabla u|^2 = \int_\Omega f\, u \le \|f\|_{L^2}\, \|u\|_{L^2}$$

on déduit $\|u\|_{H_0^1} \le C\, \|f\|_{L^2}$, en particulier l'application $f \mapsto u$ est continue de L^2 dans H_0^1. Ce problème est donc bien posé au sens de Hadamard.

On dit qu'un problème (linéaire ou non linéare)

$$f \in Y, \quad u \in X, \quad \Lambda\, u = f$$

est bien posé au sens de Hadamard si pour tout $f \in Y$ il **existe** une **unique** solution $u \in X$ à ce problème, et si de plus, $f \mapsto u$ est **continue**.

Etape 3 (régularité de la solution). De manière imprécise, si les données du problème sont régulières alors la solution l'est également. Par exemple, on a le résultat suivant: si Ω est de classe C^{m+2} et $f \in H^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$, alors $u \in H^{m+2}(\Omega)$. La preuve d'un tel résultat est fastidieuse car elle demande de prendre en compte la géométrie de l'ouvert, et ceci n'est jamais très agréable à écrire! A l'intérieure du domaine les choses sont plus facile à écrire. Donnons l'idée de la preuve.

On part du calcul formel suivant. On prend $v = \partial_{ii}^2 u$ dans la formulation variationnelle, et il vient

$$\int_\Omega |\nabla \partial_i u|^2 = \int_\Omega f\, \partial_{ii} u \le \|f\|_{L^2}\, \|\partial_{ii} u\|_{L^2} \le \|f\|_{L^2}\, \|\nabla \partial_i u\|_{L^2},$$

de sorte que $\|\nabla \partial_i u\|_{L^2} \le \|f\|_{L^2}$, donc $\forall\, i, k\ \partial_{ik}^2 u \in L^2$, et en conclusion $u \in H^2$.

Pour justifier ce calcul on considère plutôt la dérivée discrète $v = D_{-h}(D_h\, u)$, $D_h v = |h|^{-1}\, (\tau_h u - u)$, disons dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^N$, de sorte que $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Il vient alors

$$\int_\Omega |\nabla (D_h u)|^2 = \int_\Omega \nabla u \nabla D_{-h} D_h u = \int_\Omega f\, D_{-h} D_h u \le \|f\|_{L^2}\, \|D_{-h} D_h u\|_{L^2} \le \|f\|_{L^2}\, \|\nabla D_h u\|_{L^2}.$$

On en déduit

$$\|\nabla(D_h u)\|_{L^2} \le \|f\|_{L^2},$$

et donc $u \in H^2$ en passant à la limite $h \to 0$.

Une façon alternative de démontrer le résultat est d'utiliser le partiel et les espaces $H^k_{loc}(\Omega)$ définis à l'aide de la transformé de Fourier.

La méthode ci-dessus s'adapte à de nombreux autres problèmes du type

$$L\,u = -\sum_{ij} \partial_i(a_i j(x)\,\partial_j u) + \sum_j b_j\,\partial_j u + c\,u = f$$

avec $a = (a_{ij})$, $b = (b_j)$ et c au minimum bornées (régulières pour pouvoir appliquer l'étape 3) et a vérifiant une condition d'éllipticité

$$\exists \alpha_0 > 0,\ \forall\, x \in \Omega,\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N \qquad a(x)\,\xi_i\,\xi_j \ge \alpha_0\,|\xi|^2,$$

avec des conditions aux limites variées

$$\begin{aligned}
&u = 0 \quad \text{Dirichlet homogène}, && \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{Neumann homogène},\\
&u = g \quad \text{Dirichlet non homogène}, && \frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{Neumann non homogène},\\
&\alpha u + \beta\,\frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{mixtes}.
\end{aligned}$$

Cette méthode s'adpte également pour le problème du biLaplacien

$$\Delta^2 u = f \quad \Omega, \qquad u = g \ \text{ et } \ \frac{\partial u}{\partial n} = h \quad \partial\Omega,$$

et le probème de Stokes

$$\forall\, f : \Omega \to \mathbb{R}^N\ \ \exists (u,p) : \Omega \to \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \quad -\Delta u + \nabla p = f\ \ \Omega, \quad \operatorname{div} u = 0\ \ \Omega, \quad u = 0\ \ \partial\Omega.$$

La difficulté est alors double: d'une part trouver le bon espace Hilbertien qui permet de mettre l'équation sous la forme d'une équation variationnelle (mais avec un peu d'entraînement on y arrive assez bien); d'autre part montrer que la forme bilinéaire a est coercive (cela peut être plus subtile).

2 - Le problème aux valeurs propres pour l'équation de Laplace avec condition de Dirichlet dans un ouvert borné.

Pour $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ on définit $\bar u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ par $\bar u(x) = u(x)$ si $x \in \Omega$, $\bar u(x) = 0$ si $x \notin \Omega$.

Proposition 2.1. Soit $1 \le p < \infty$ et $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$. Alors la fonction $\bar u$ appartient à $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et $\partial_i \bar u = \overline{\partial_i u}$.

Preuve du Théorème 2.1. Comme $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$ il existe (u_n) une suite de $C^1_c(\Omega)$ telle que $u_n \to u\ W^{1,p}(\Omega)$. Pour $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^N)$ on a alors

$$\left|\int_\Omega u_n\,\partial_i\varphi\,dx\right| = \left|\int_\Omega \partial_i u_n\,\varphi\,dx\right| \le \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)}\,\|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

On en déduit en passant à la limite $n \to \infty$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} \bar u\,\partial_i\varphi\,dx\right| = \left|\int_\Omega u\,\partial_i\varphi\,dx\right| \le \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}\,\|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)}.$$

Cela implique $\bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ d'après la proposition 1.3. En passant à la limite dans l'identité

$$\int_\Omega u_n\,\partial_i\varphi\,dx = \int_\Omega \partial_i u_n\,\varphi\,dx,$$

il vient

$$\int_{\mathbb{R}^N} \bar{u}\,\partial_i\varphi\,dx = \int_\Omega u\,\partial_i\varphi\,dx = \int_\Omega \partial_i u\,\varphi\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} \overline{\partial_i u}\,\varphi\,dx,$$

on conclut que $\partial_i\bar{u} = \overline{\partial_i u}$. ◻

Théorème 2.2. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Alors l'injection $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ est compacte.

Preuve du Théorème 2.2. On définit l'opérateur de prolongement $P : W_0^{1,p}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ l'application $u \mapsto \bar{u}$. Soit $\mathcal{F} = B_{W_0^{1,p}}$ et $\mathcal{G} = P\,\mathcal{F}$. Alors $\mathcal{G}$ est un sous-ensemble borné de $L^p(\mathbb{R}^N)$ tel que $\|\tau_h\bar{v} - \bar{v}\|_{L^p} \le C\,|h|$ pour tout $v \in \mathcal{F}$. D'après le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov $\mathcal{G}|_\Omega$ est un compact de $L^p(\mathbb{R}^N)$, i.e. $\mathcal{F}$ est un compact de $L^p(\Omega)$. ◻

Théorème 2.3. Il existe une base Hilbertienne $(e_n)_{n\ge1}$ de L^2, il existe $(\lambda_n)_{n\ge1}$ telle que $\lambda_n > 0$ et $\lambda_n \to \infty$ et

$$e_n \in H_0^1(\Omega), \quad -\Delta\,e_n = \lambda_n\,e_n$$

On dit que (λ_n) est valeur propre de $-\Delta$ avec condition de Dirichlet et que les (e_n) dont les fonctions propres associées.

Preuve du Théorème 2.3. On définit l'application $f \in L^2(\Omega) \mapsto u = Tf$ l'unique solution variationnelle du problème

$$u \in H_0^1(\Omega), \qquad -\Delta u = f,$$

i.e.

$$\forall f \in L^2(\Omega), \quad Tf \in H_0^1 \quad \text{et} \quad \int_\Omega \nabla Tf\nabla w = \int_\Omega f\,w.$$

Nous avons vu que l'opérateur $T : L^2 \to H_0^1 \subset L^2$ est continu. Il est également auto-adjoint car $\forall\,f,g \in L^2$ en utilisant deux fois (pour g puis pour f) la définition précédente

$$(Tf,g)_{L^2} = \int (Tf)\,g = \int \nabla Tf\cdot\nabla Tg = \int f\,Tg = (f,Tg)_{L^2}.$$

Il est aussi compact puisque l'injection $H_0^1 \subset L^2$ est compacte. D'après le théorème ? il existe donc une base orthonormée (e_n) de L^2 formée de vecteurs propres de T: $T\,e_n = \mu_n\,e_n$, $(e_n,e_m) = \delta_{nm}\ \forall\,n,m \in \mathbb{N}$. De plus, le cararactère positif de $-\Delta$, plus précisément

$$\forall\,n \qquad \mu_n = (\mu_n\,e_n,e_n) = (T\,e_n,e_n) = \int_\Omega |\nabla(T\,e_n)|^2 \ge C_\Omega \int_\Omega |T\,e_n|^2 \ge 0$$

implique $\mu_n \ge 0\ \forall\,n \in \mathbb{N}$. Enfin, si $\mu_n = 0$ alors $T\,e_n = 0$, et par définition de T la fonction e_n est solution variationnelle de l'équation $Te_n \in H_0^1$, $-\Delta(Te_n) = e_n$, donc $\int e_n\,v = \int \nabla Te_n\,\nabla v = 0$ pour tout $v \in H_0^1$, et d'où on tire $e_n = 0$, ce qui est absurde. En conclusion, $\mu_n > 0\ \forall\,n \in \mathbb{N}^*$, et toujours par le théorème ? $\mu_n \to 0$. En posant $\lambda_n = \mu_n^{-1}$ on obtient la suite (λ_n,e_n) annoncée.

Proposition 2.4. Soit $1 \le p < \infty$ et soit $G \in C^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Lip}(\mathbb{R})$. Alors pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$ on a $G(u) \in W_{loc}^{1,p}(\bar{\Omega})$ et $\partial_i G(u) = G'(u)\,\partial_i u$. Si de plus $G(0) = 0$ alors $u \in W^{1,p}(\Omega)$ implique $G(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ et $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ implique $G(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Preuve de la Proposition 2.4. Comme G est Lipschitzienne on a $|G(u)| \le L\,|u| + |G(0)| \in L^p(\Omega)$ et $|G'(u)\,\partial_i u| \le L\,|\partial_i u| \in L^p(\Omega)$. On considère une suite (u_n) de $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que $u_n \to u$ au sens du théorème de Friedrichs. Alors $G(u_n) \in C^1(\Omega)$ et $\partial_i G(u_n) = G'(u_n)\,\partial_i u_n$. Il suffit alors de passer à la limite (grâce au théorème de convergence dominée) dans la formulation intégrale de cette égalité. ◫

Proposition 2.5. On ne fait plus l'hypothèse sur G d'être de classe C^1, mais seulement $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitzienne et de classe C^1 par morceaux, G' admet une limite à droite et une limite à gauche en tout point. Alors les conclusions de la Proposition 2.4 restent vraies. En particulier, $u \in W^{1,p}_{(0)}$ implique $u^+, u^-, |u| \in W^{1,p}_{(0)}$. Enfin, pour tout $c \in \mathbb{R}$, on a

$$\nabla u = 0 \quad \text{sur} \quad \{x \in \Omega,\ u(x) = c\}.$$

Preuve de la Proposition 2.5.

Corollaire 2.5. Soit $u \in H^1(\Omega)$ telle que $u \geq 0$ sur $\partial\Omega$ (au sens $u^- \in H^1_0(\Omega)$ et $-\Delta\, u \geq 0$ dans Ω (au sens des distributions) alors $u \geq 0$ dans Ω (au sens presque partout).

Preuve du Corollaire 2.5. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, on a

$$\int_\Omega \nabla u\, \nabla \varphi = \int u\,(-\Delta\,\varphi) = \langle u, -\Delta\,\varphi\rangle = \langle -\Delta\, u, \varphi\rangle \geq 0.$$

Par densité et puisque $u^+ = \mathbf{1}_{u>0}\, u$, $u^- = -\mathbf{1}_{u<0}\, u$, il vient

$$0 \leq \int \nabla u \nabla u^- = \int (\mathbf{1}_{u>0} \nabla u + \mathbf{1}_{u<0} \nabla u)\, \nabla u^- = -\int \mathbf{1}_{u>0} \nabla u\, \mathbf{1}_{u<0} \nabla u - \int |\nabla u^-|^2 = -\int |\nabla u^-|^2,$$

ce qui implique $\nabla u^- = 0$, donc $u^- = 0$ (grâce à l'inégalité de Poincaré), ce qui signifie bien $u \geq 0$. ◫

Proposition 2.6. On définit

$$J_1 := \inf_{u \in H^1_0(\Omega)} \frac{\int |\nabla u|^2}{\int u^2}.$$

Alors $J_1 = \lambda_1$ et il existe une valeur propre positive e_1 associée à λ_1, i.e. $0 \leq e_1 \in H^1_0(\Omega)$.

Preuve de la Proposition 2.5. On remarque que $J_1 \geq 0$ et même $J_1 \geq C_\Omega$ grâce à l'inégalité de Poincaré. On définit $K = \{u \in H^1_0(\Omega);\ \|u\|_{L^2} = 1\}$ et soit (v_n) une suite de K telle que $\int |\nabla v_n|^2 \to J_1$. On remarque que $u_n = |v_n| \in K$ et

$$\int |\nabla u_n|^2 = \int |(\text{sign} v_n)\, \nabla v_n|^2 = \int \mathbf{1}_{v_n \neq 0}\, |\nabla v_n|^2 = \int |\nabla v_n|^2 \ \to\ J_1.$$

Comme (u_n) est une suite bornée de H^1_0, on peut en extraire une sous-suite (toujours notée (u_n)) qui converge au sens faible de H^1_0, i.e. $\exists\, u \in H^1_0$ telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans L^2, $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u$ dans $(L^2)^N$. De plus, de l'injection compacte $H^1_0 \subset L^2$ on déduit que en fait $u_n \to u$ fortement dans L^2, $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u$ dans $(L^2)^N$. De plus, de l'injection compacte $H^1_0 \subset L^2$ on déduit qu'en fait $u_n \to u$ fortement dans L^2. Par continuité d'une part on obtient $u \in K$, par un corollaire de Banach-Steinhaus d'autre part on a

$$(J_1 \leq) \quad \int_\Omega |\nabla u| \leq \liminf \int_\Omega |\nabla u_n| = J_1.$$

On retrouve ici que $J_1 > 0$, puisque $u \not\equiv 0$.

Soit $w \in H^1_0(\Omega)$, $w \not\equiv 0$. Alors $u + t\,w \in H^1_0(\Omega)$ et $\|u + t\,w\|_{L^2} \neq 0$ pour tout $t \in (-a, a)$, $a := \|w\|^{-1}_{L^2}$. Par définition de J_1, on a donc

$$\int_\Omega \left|\nabla \frac{u + t\,w}{\|u + t\,w\|_{L^2}}\right|^2 \geq J_1.$$

On calcule alors

$$\int |\nabla u|^2 + 2\,t \int \nabla u \cdot \nabla w + t^2 \int |\nabla w|^2 \geq J_1 \left[\int u^2 + 2\,t \int u\,w + t^2 \int w^2 \right]$$

En simplifiant le terme constant (en t), en divisant par $t > 0$, puis en passant à la limite $t \to 0$ on obtient donc

$$\int \nabla u \cdot \nabla w \geq J_1 \int u\,w \quad \forall\, w \in H_0^1(\Omega).$$

On a donc égalité (prendre w et $-w$), ce qui signifie que u est une solution variationnelle du problème aux valeurs propres

$$u \in H_0^1(\Omega), \quad -\Delta\, u = J_1\, u \quad \Omega.$$

Pour toute valeur propre λ et toute fonction propre associée $v \in H_0^1(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 = \lambda \int_\Omega |v|^2\,,$$

et la définition de J_1 implique donc $J_1 \leq \lambda$. Ainsi $J_1 = \lambda_1$ est bien la plus petite valeur propre associée au problème. $\square$

Remarque 2.6. Ce résultat est à comparer au théorème sur les opérateurs auto-adjoints qui affirme que

$$M = \sup_{f \in L^2,\, \|f\|_{L^2}=1} (Tf, f)$$

est tel que $M \in \sigma(T)$. Comme $T \geq 0$, $M > 0$ et T est compact, on en déduit que $M \in \mathrm{VP}(T)$ d'après le théorème sur le spectre des opérateurs compacts.

Exercice 2.6. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$.
a) Rappeler pourquoi $I - \Delta$ est un isomorphisme de $H^{\sigma+2}(\mathbb{R}^N) \to H^\sigma(\mathbb{R}^N)$ pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$, pourquoi $C_c^k(\mathbb{R}^N) \subset H^k(\mathbb{R}^N)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pourquoi $H^\sigma(\mathbb{R}^N) \subset C^k(\mathbb{R}^N)$ pour tout $\sigma > k + N/2$, $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\nabla : H^\sigma(\mathbb{R}^N) \to H^{\sigma-1}(\mathbb{R}^N)$ et que si $u \in H^\sigma(\mathbb{R}^N)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ alors $u\,\varphi \in H^\sigma(\mathbb{R}^N)$.
Pour $\sigma \in \mathbb{R}$ et $\omega \subset \Omega$ un ouvert, on définit

$$H^\sigma_{loc}(\omega) := \{u \in \mathcal{D}'(\omega);\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\omega),\ \varphi\, u \in H^\sigma(\mathbb{R}^N)\}.$$

b) Montrer que toute distribution est localement dans H^s; i.e. $\forall\, T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\forall\, \omega$ ouvert tel que $\bar\omega \subset \Omega$ il existe $\exists\, s = s(T, \omega) \in \mathbb{R}$ tel que $T \in H^s_{loc}(\omega)$.
c) Soit $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ une solution de $-\Delta\, u = f$ au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Supposons que $f \in H^r_{loc}(\omega)$ avec ω ouvert tel que $\bar\omega \subset \Omega$ et montrer que $u \in H^{r+2}_{loc}(\omega)$. En déduire que si $f \in C^\infty(\omega)$ alors $u \in C^\infty(\omega)$. On dit que l'opérateur Δ est hypoéliptique.

Correction de l'Exercice 2.6.
a) - On rappelle que

$$H^\sigma(\mathbb{R}^N) := \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N),\ (1 + |\xi|^2)^{\sigma/2}\, \hat u \in L^2(\mathbb{R}^N)\}.$$

a1) - Pour tout $T \in \mathcal{S}'$, on a $\mathcal{F}(\partial_{x_i} T) = i\, \xi_i\, \hat T$, puisque pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\langle \mathcal{F}(\partial_{x_i} T), \varphi\rangle = \langle \partial_{\xi_i} T, \hat\varphi\rangle = -\langle T, \partial_{\xi_i} \hat\varphi\rangle = \langle T, i\, \mathcal{F}(x_i\, \varphi)\rangle = \langle i\, \xi_i\, \hat T, \varphi\rangle.$$

Donc $\mathcal{F}((I - \Delta)\, T) = (1 + |\xi|^2)\, \hat T$, et pour tout $T \in \mathcal{S}'$ on a

$$\begin{array}{lll} T \in H^{\sigma+2} & \text{ssi} & (1 + |\xi|^2)^{\sigma/2+1}\, \hat T \in L^2 \\ & \text{ssi} & (1 + |\xi|^2)^{\sigma/2}\, \mathcal{F}((I - \Delta)\, T) \in L^2 \qquad \text{ssi} \qquad (I - \Delta)\, T \in H^\sigma. \end{array}$$

Il est alors clair que $T \mapsto S := \mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)\,\hat{T})$ est un isomorphisme de $H^{\sigma+2}$ dans H^σ. En particulier, si $S \in H^\sigma$ alors $T := \mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^{-1}\,\hat{S}) \in H^{\sigma+2}$.

a2) - Pour tout $u \in C_c^k(\mathbb{R}^N)$, on a $\partial^\alpha u \in C_c(\mathbb{R}^N) \subset L^2\ \forall\,\alpha,\ |\alpha| \le k$ et $i^{|\alpha|}\,\xi^\alpha\,\hat{u} = \mathcal{F}(\partial^\alpha u) \in L^2$ ($\mathcal{F}$ est une isométrie de L^2). En particulier, $(1+|x|^2)^{k/2}\,|\hat{u}| \le C\,(1+|x_1|^k+...+|x_N|^k)\,|\hat{u}| \in L^2$ et donc $u \in H^k$.

a3) - On rappelle que $H^\sigma(\mathbb{R}^N) \subset C_0(\mathbb{R}^N)$ si $\sigma > N/2$ (car alors $\hat{u} \in L^1$ par Cauchy-Schwarz et on utilise que $\mathcal{F}^{-1} : L^1 \to C_0$). Comme $\partial_i : H^{\sigma+1} \to H^\sigma$ (c'est juste l'inégalité $|\xi|\,(1+|\xi|^2)^{k/2} \le C\,(1+|\xi|^2)^{(k+1)/2}$), on a $\partial^\alpha u \in C_0(\mathbb{R}^N)$ pour tout $u \in H^\sigma(\mathbb{R}^N)$ et tout α, $|\alpha| \le [\sigma - N/2]$, où $[.]$ désigne la partie entière. Enfin, on remarque que $(1+|\xi|^2)^{k/2} \le 16^{k/2}\,(1+|\eta|^2)^{k/2}\,(1+|\xi-\eta|^2)^{k/2}\ \forall\,\xi,\,\eta \in \mathbb{R}^N$. En effet, pour $\eta \in \mathbb{R}^N$ tel que $|\eta| \ge |\xi|/4$ on a $(1+|\eta|^2)\,(1+|\xi-\eta|^2) \ge 1+|\eta|^2 \ge 1+|\xi|^2/16$ et pour $\eta \in \mathbb{R}^N$ tel que $|\eta| \le |\xi|/4$ on a $(1+|\eta|^2)\,(1+|\xi-\eta|^2) \ge 1+|\xi-\eta|^2 \ge 1+|\xi|^2/2-|\eta|^2 \ge 1+|\xi|^2/16$ (on a utilisé l'inégalité de Young $|\xi\cdot\eta| \le |\xi|^2/4+|\eta|^2$). Ainsi en notant $\tilde{u} = (1+|\xi|^2)^{k/2}\hat{u}$ et $\tilde{\varphi} = 16^{k/2}\,(1+|\xi|^2)^{k/2}\hat{u}$ on obtient

$$|\mathcal{F}(\varphi\,u)|\,(1+|\xi|^2)^{k/2} \le |\hat{u} * \hat{\varphi}|\,(1+|\xi|^2)^{k/2} \le \tilde{u} * \tilde{\varphi},$$

et donc

$$\|u\,\varphi\|_{H^k} \le \|\tilde{u} * \tilde{\varphi}\|_{L^2} \le \|\tilde{u}\|_{L^2}\,\|\tilde{\varphi}\|_{L^1} \le C_N\,\|\varphi\|_{H^{k+N+1}}\,\|u\|_{H^k} < \infty.$$

b) Soit $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$. Il existe $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $\chi \equiv 1$ sur $\bar{\omega}$. On a alors $T\,\chi \in \mathcal{E}'(\Omega)$, et donc on peut considérer $T\,\chi$ comme un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ (en posant $\langle T\,\chi, \varphi\rangle = \langle T, \chi\,\varphi\rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$). Par définition d'une distribution, il existe $m \in \mathbb{N}$, $C > 0$ tels que

$$\forall\,\psi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \ \operatorname{supp}\psi \subset \operatorname{supp}\chi \qquad |\langle T, \psi\rangle| \le C \sup_{\alpha,\,|\alpha|\le m}\,\sup_{x\in\Omega} |(\partial^\alpha\psi)(x)|.$$

On en déduit

$$\forall\,\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N), \qquad |\langle T\,\chi, \varphi\rangle| \le C\,\|\chi\,\varphi\|_{W^{m,\infty}} \le C\,\|\chi\,\varphi\|_{H^{-s}} \le C\,\|\varphi\|_{H^{-s}},$$

où on a posé $-s := m + N/2 + 1$. Par ailleurs, $\mathcal{F}(\chi\,T) \in C^\infty$ puisque $\chi\,T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$. Ainsi, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et une suite (ρ_m) d'approximation de l'identité

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^s\,\mathcal{F}\,(T\,\chi)\,\varphi\,d\xi &= \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^s\,\mathcal{F}\,((T\,\chi) * \rho_m)\,\varphi\,d\xi \\
&= \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} (T\,\chi) * \rho_m\,\mathcal{F}((1+|x|^2)^s\,\varphi)\,d\xi \\
&= \langle T\,\chi, \mathcal{F}((1+|x|^2)^s\,\varphi)\rangle \le C\,\|\mathcal{F}((1+|x|^2)^s\,\varphi)\|_{H^{-s}} = C\|\varphi\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Puisque $(L^2)' = L^2$, cela démontre que $(1+|\xi|^2)^s\,\mathcal{F}\,(T\,\chi) \in L^2$ et donc $T\chi \in H^s(\mathbb{R}^N)$. On conclut que $T \in H^s_{loc}(\omega)$ puisque pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$ on a $T\,\varphi = T\,(\varphi\,\chi) = (T\,\chi)\,\varphi$.

c) D'après l'étape b) il existe s tel que $u \in H^s_{loc}(\omega)$. On note $r_0 = \min(r,s)$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$ et soit $\chi \in \mathcal{D}(\omega)$ telle que $\chi \equiv 1$ sur $\operatorname{supp}\varphi$. On a

$$\nabla(\chi\,u) = \chi\,\nabla u + u\,\nabla\chi$$

et

$$\begin{aligned}
u\,\varphi - \Delta(u\,\varphi) &= u\,\varphi - u\,\Delta\varphi - 2\,\nabla u\cdot\nabla\varphi - \varphi\,\Delta u \\
&= u\left(\varphi - \Delta\varphi + 2\,\nabla\chi\cdot\frac{\nabla\varphi}{\chi}\right) - 2\,\nabla(\chi\,u)\cdot\frac{\nabla\varphi}{\chi} + \varphi\,f =: S.
\end{aligned}$$

Puisque $f \in H^r_{loc}(\omega)$ et $u \in H^{r_0}_{loc}(\omega)$ on a $f\,\theta \in H^{r_0}(\mathbb{R}^N)$, $u\,\theta \in H^{r_0}(\mathbb{R}^N)$, et $\nabla(u\,\theta) \in H^{r_0-1}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $\theta \in \mathcal{D}(\omega)$, et donc $S \in H^{r_0-1}(\mathbb{R}^N)$. On en déduit, grâce au fait que $(I-\Delta)^{-1} : H^\sigma \to H^{\sigma+2}$, que $u\,\varphi \in H^{r_0+1}$. Ceci étant vrai pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$ cela signifie que $u \in H^{r_0+1}_{loc}$. En itérant l'argument on obtient in fine $u \in H^{r+2}_{loc}$. Enfin, si $f \in C^\infty(\omega)$ alors $f \in H^r_{loc}$ pour tout $r \in \mathbb{N}$, donc $u \in H^{r+2}_{loc}$ pour tout $r \in \mathbb{N}$, et enfin donc $u \in C^\infty(\omega)$.

Corollaire 2.7. Toute valeur propre e_n vérifie $e_n \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$.

Preuve de la Proposition 2.7. il suffit d'utiliser le théorème précédent et de faire un raisonnement par Bootstrap: on a $e_n \in L^2(\Omega)$ implique $e_n \in H^2_{loc}(\Omega)$ qui implique à son tour $e_n \in H^4_{loc}(\Omega)$ et ainsi de suite. On obtient ainsi $e_n \in H^\infty_{loc}(\Omega) = C^\infty(\Omega)$. ◻

Théorème 2.8 (propriétés/formules de la moyenne et principe du maximum fort). Soit Ω un ouvert connexe. Soit $u \in C^2(\Omega)$ telle que $-\Delta u \geq 0$. Alors pour tout $x_0 \in \Omega$ et tout $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset \Omega$ on a

$$u(x_0) \geq \fint_{\partial B(x_0,r)} u(y)\, d\sigma(y) \quad \text{et} \quad u(x_0) \geq \fint_{B(x_0,r)} u(x)\, dx.$$

Si de plus $u \geq 0$ et en notant $m := \inf_\Omega u$ on a alors

$$\text{ou bien} \quad u \equiv m \;\; \Omega, \qquad \text{ou bien} \quad u > m \;\; \Omega.$$

Preuve du Théorème 2.8. Par la formule de Stokes on a

$$-\int_{\partial B(x_0,r)} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = -\int_{B(x_0,r)} \Delta u\, d\sigma \geq 0.$$

On introduit les coordonnées sphériques $y = x_0 + \rho\,\omega$, $\omega \in \mathbb{R}^N$, $|\omega| = 1$, $\rho > 0$, et la nouvelle fonction $v = v(\rho, \omega) = u(x) = u(x_0 + \rho\,\omega)$. Par les propriétés de l'intégrale sur la sphère, on a

$$\int_{\partial B(x_0,r)} \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma = \int_{\partial B(0,1)} \frac{\partial v}{\partial \rho}\, \rho^{N-1}\, d\omega = \rho^{N-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{\partial B(0,1)} v\; d\omega = \rho^{N-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho^{1-N} \int_{\partial B(x,\rho)} u\, d\sigma \right].$$

Combinant la première inégalité et cette identité on a ainsi montré que l'application

$$\rho \;\mapsto\; \rho^{1-N} \int_{\partial B(x,\rho)} u\, d\sigma_\rho$$

est décroissante pour $\rho \in (0, r)$. En particulier,

$$\forall\, \rho \in (0, r] \qquad \fint_{\partial B(x_0,\rho)} u\, d\sigma_\rho \leq \fint_{\partial B(x_0,r)} u\, d\sigma.$$

On obtient la première formule de la moyenne en passant à la limite $\rho \to 0$. La seconde formule de la moyenne s'en déduit

$$\int_{B(x_0,r)} u\, dx = \int_0^r \int_{\partial B(x_0,\rho)} u\, d\sigma_\rho\, d\rho \geq \int_0^r |S_1|\, \rho^{N-1}\, u(x_0)\, d\rho = \frac{|S_1|}{N}\, r^N\, u(x_0) = |B_r|\, u(x_0).$$

Soient $m := \inf_\Omega u \geq 0$ et $A := \{x \in \Omega;\; u(x) = m\}$. A est un fermé de Ω. Si $A \neq \emptyset$, il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $u(x_0) = m$ et il existe $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset \Omega$. Alors

$$0 = u(x) - m \geq \fint_{B(x_0,r)} [u(y) - m]\, dy \geq 0,$$

car $u(y) - m \geq 0$ dans Ω, et donc $u(y) - m = 0$ dans $B(x_0, r)$. Cela prouve que A est également ouvert, et donc $A = \Omega$, soit encore $u \equiv m$ dans Ω. ◻

Proposition 2.9. L'espace propre E_1 associé à λ_1 est de dimension 1 et $E_1 = \mathbb{R}\, e_1$ avec $e_1 > 0$ dans Ω. Enfin, λ_1 est la seule valeur propre associée à une fonction propre positive.

Preuve de la Proposition 2.9. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ une fonction propre associée à la valeur propre λ_1. Montrons par l'absurde que u ne change pas de signe. On suppose donc que $u^\pm \not\equiv 0$. Comme $u^\pm \in H_0^1$ et par définition de λ_1 on a

$$(*_1) \qquad \int_\Omega |\nabla u^+|^2 \geq \lambda_1 \int_\Omega |u^+|^2 \quad \text{et} \quad \int_\Omega |\nabla u^-|^2 \geq \lambda_1 \int_\Omega |u^-|^2,$$

Or on a également

$$\int_\Omega |\nabla u^+|^2 + \int_\Omega |\nabla u^-|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 = \lambda_1 \int_\Omega |u|^2 = \lambda_1 \int_\Omega |u^+|^2 + \lambda_1 \int_\Omega |u^-|^2.$$

Ainsi les inégalité dans $(*_1)$ sont nécessairement des égalités. Cela implique en particulier en reprenant la preuve de la proposition 2.5 que u^+ et u^- sont des fonctions propres associées à la valeur propre λ_1, et donc $-\Delta u^\pm = \lambda_1 \, u^\pm \geq 0$ dans Ω. D'après le corollaire 2.7, on a $u^\pm \in C^\infty(\Omega)$ et donc d'après la proposition 2.8 $u^\pm > 0$ (puisque $u^\pm \not\equiv 0$ par hypothèse). Cela est absurde puisque l'intérieur des supports de u^+ et u^- sont disjoints. Cela démontre donc que u ne change pas de signe.

Soit $w \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ une fonction propre associée à la valeur propre λ_1. On peut donc supposer par exemple $w > 0$ dans Ω. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on définit la fonction $v = e_1 - t\,w$ qui est également une fonction propre associée à λ_1. On a $v_0 = e_1 > 0$ dans Ω et $v_t \to -\infty$ dans Ω lorsque $t \to \infty$. On définit $\tau \in (0, \infty)$ minimal tel que $\max v_\tau = 0$. Si un tel τ n'existait pas, on aurait donc toujours $\max v_t > 0$, et également $\min v_{\tau'} < 0$ pour τ' assez grand. Alors $v_{\tau'}$ serait une fonction propre associée à λ_1 qui change de signe, et cela n'est pas possible. Maintenant, une première possibilité est que $v_t > 0$ dans Ω pour tout $t < \tau$ et $v_t < 0$ dans Ω pour tout $t > \tau$. Dans ce cas on a $v_\tau \equiv 0$ et la fonction propre w est proportionnelle à e_1, c'est ce que nous voulions établir. Une seconde possibilité serait que l'on n'ait pas $v_t > 0$ dans Ω pour tout $t < \tau$, et donc v_t change de signe, ou que l'on n'ait pas $v_t < 0$ dans Ω pour tout $t > \tau$, et donc v_t change de signe. Mais encore une fois cela n'est pas possible. En conclusion $E_1 = \mathbb{R}\, e_1$.

Enfin, si $w \in H_0^1(\Omega)$ est une valeur propre, disons positive, associée à une valeur propre λ, on a

$$\lambda \int_\Omega w\, e_1 = \int_\Omega (-\Delta w)\, e_1 = \int \nabla w \cdot \nabla e_1 = \int_\Omega w\, (-\Delta e_1) = \lambda_1 \int_\Omega w\, e_1,$$

ce qui implique $\lambda = \lambda_1$ puisque $\int_\Omega w\, e_1 \neq 0$ par hypothèse ($e_1 > 0$ et $w \geq 0$, $w \not\equiv 0$).

3 - L'équation de la chaleur avec condition de Dirichlet dans un ouvert borné.

On considère dans cette section l'équation de la chaleur

$$(3.1) \qquad \partial_t\, u - \Delta\, u = 0 \quad \Omega, \qquad u = 0 \quad \partial\Omega$$

avec condition initiale

$$u(0, .) = u_0,$$

qui porte sur l'inconnue $u = u(t, x) : (0, T) \times \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$. Observer que pour que ce problème soit bien posé on prescrit une condition aux limites (qui est ici la plus simple possible: la condition de Dirichlet homogène). On souhaite présenter la *méthode spectrale* qui consiste à "projeter" cette équation sur une base de fonctions propres du Laplacien. Cela fonction bien grâce à la résolution du problème aux valeurs propres effectuée dans la section précédente, et donc fondamentalement parce que Ω est borné. Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^N$ ce problème peut être résolu plus simplement grâce à l'existence d'une formule intégrale explicite (celle-ci peut être obtenue en effectuant une transformation de Fourier en la variable x par exemple). Dans le cas général, $\Omega \neq \mathbb{R}^N$ non bornée, le problème (3.1) est encore bien posé et il se résout grâce à la théorie de Hill-Yosida sur les opérateurs non bornés.

On commence à chercher une solution sous la forme $u(t,x) = a(t)\,w(x)$ (méthode de séparation des variables). On a u est solution si, et seulement si,

$$-\Delta w = \frac{-a'(t)}{a(t)}\,w \quad \text{dans} \quad (0,\infty)\times\Omega$$

ce qui implique a'/a constant et w est une fonction propre.

En prenant $u(t,x) = a_n(t)\,e_n(x)$ il vient

$$a_n' = -\lambda_n\,a_n$$

et donc

$$u(t,x) := e^{-\lambda_n t}\,e_n(x)$$

est une "solution" de l'équation (3.1). Précisons le sens. Ici, c'est une solution classique dès que l'on sait que $e_n \in C^2(\bar\Omega)$ puisqu'alors $u \in C^2([0,\infty)\times\bar\Omega)$. Sans hypothèse de régularité sur Ω, on a seulement $e_n \in H_0^1(\Omega)$, et dans ce cas pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ou $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t,x)\,\varphi(x)\,dx &= \frac{d}{dt}\int_\Omega e^{-\lambda_n t}\,e_n(x)\,\varphi(x)\,dx = -\lambda_n\,e^{-\lambda_n t}\int_\Omega e_n(x)\,\varphi(x)\,dx \\
&= -e^{-\lambda_n t}\langle -\Delta\,e_n,\varphi\rangle = -e^{-\lambda_n t}\int_\Omega \nabla e_n(x)\,\nabla\varphi(x)\,dx \\
&= -\int_\Omega \nabla u(t,x)\,\nabla\varphi(x)\,dx,
\end{aligned}$$

et cette égalité à lieu au sens classique sur $(0,\infty)$.

On définit $H_m := \{u \in L^2;\ u = \text{ C.L. des } e_1,...,e_m\}$ s.e.v. de dimension finie et $S_m : H_m \to H_m$ par $S_m(t)\,e_i := e^{-\lambda_i t}\,e_i$. Alors

(i) $\forall\, t \ge 0$ $S_m(t) : H_m \to H_m$ est un opérateur linéaire et continu;

(ii) $S_m(t+s) = S_m(t)\circ S_m(s)$ $\forall\, t,s \ge 0$; $S_m(0) = I_{H_m}$;

(iii) $\forall\, u_0 \in H_m$ $t \mapsto S_m(t)\,u_0$ est continue de $\mathbb{R}_+$ dans L^2;

(iv) et enfin $\|S_m(t)\|_{\mathcal{L}(L^2)} \le 1$.

On dit que S_m est un semi-groupe de contraction s'il vérifie (i)–(iv).

Lemme 3.1. On définit $S(t)$ "$:= \lim_{m\to\infty} S_m(t)$". Alors cette limite existe bien et $S(t)$ ainsi défini est un semi-groupe de contraction.

Lemme 3.1. On définit $\Pi_m : L^2 \to H_m$ la projection orthogonale et $\tilde S_m := S_m \circ \Pi_m$ la suite de semi-groupes de contraction dans L^2.

4 - Inégalités de Sobolev et Morrey.

Théorème 4.1 (Sobolev, Gagliardo, Niremberg). Soit $1 \le p < N$. Alors $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ où $p* \in (p,\infty)$ est défini par la relation

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N},$$

et il existe une constante $C = C(N,p)$ telle que

$$\|u\|_{L^{p^*}} \le C\,\|\nabla u\|_{L^p} \qquad \forall\, u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Preuve du Théorème 4.1. (Trois preuves: celle de Brézis, celle de Gilbarg, Trudinger, Evans, enfin celle de Lieb et Loss qui repose sur l'inégalité de HLS) On commence par traiter le cas $p = 1$, et donc $1^* = N/(N-1)$. Soit $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. On écrit

$$|u(x_1,...,x_n)| \le \int_\mathbb{R} |\partial_i u|(x_1,...,x_{i-1},t,x_{i+1},..,x_N)\,dt$$

et donc

$$|u(x_1,...,x_n)|^{N/N-1} \le \prod_{I=1}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}} |\partial_i u|(x_1,...,x_{i-1},t,x_{i+1},..,x_N)\,dt \right)^{1/N-1}.$$

On intégre et on obtient grâce à l'inégalité de Holder avec $q = N-1$ et $q' = (N-1)/(N-2)$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{N/N-1}\,dx &\le \int_{\mathbb{R}^N} \prod_{I=1}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}} |\partial_i u|\,dx_i \right)^{1/N-1} dx \\
&\le \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left[\int_{\mathbb{R}} \prod_{I=1}^{N-1} \left(\int_{\mathbb{R}} |\partial_i u|\,dx_i \right)^{\frac{1}{N-1}} dx_N \right] \left[\int_{\mathbb{R}} |\partial_N u|\,dx_N \right]^{\frac{1}{N-1}} dx' \\
&\le \left\{ \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left[\int_{\mathbb{R}} \prod_{I=1}^{N-1} \left(\int_{\mathbb{R}} |\partial_i u|\,dx_i \right)^{\frac{1}{N-1}} dx_N \right]^{\frac{N-1}{N-2}} dx' \right\}^{\frac{N-2}{N-1}} \\
&\qquad \left\{ \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left[\int_{\mathbb{R}} |\partial_N u|\,dx_N \right] dx' \right\}^{\frac{1}{N-1}}.
\end{aligned}$$

Pour le premier terme on utilise l'inégalité de Holder suivante (que l'on démontre par récurrence à partir de l'inégalité de Holder classique)

$$\|f_1 ... f_k\|_{L^r} \le \|f_1\|_{L^{r_1}} ... \|f_k\|_{L^{r_k}} \quad \text{si} \quad f_i \in L^{r_i} \quad \text{et} \quad \frac{1}{r_1} + ... + \frac{1}{r_k} = \frac{1}{r} \le 1,$$

avec $k = N-1$, $r_1 = ... = r_k = N-1$, de sorte que

5 - Espace de Sobolev dans un ouvert régulier et non régulier.

5.1. - Compléments.
On a $W_0^{1,p} \subset W^{1,p}$, $1 \le p < \infty$ et
Théorème. Pour tout $F \in (W^{1,p})'$ il existe $f_j \in L^{p'}$, $0 \le f_j \le N$, telles que

$$\forall\, v \in W^{1,p} \quad \langle F, v\rangle = \int f_0\, v + \sum_i \int f_i\, \partial_i v,$$

et $\|F\|_{(W^{1,p})'} = \max\{\|f_j\|,\, 0 \le j \le N\}$.

5.2 - Théorème de trace.

Theorème 2.1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de classe C^2. Pour tout $p \in [1,\infty]$, il existe un opérateur linéaire bornée de trace $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ tel que pour une constant $C \in (0,\infty)$ on ait:
(i) $\forall\, u \in W^{1,p}(\Omega)$ on a $\gamma\, u \in L^p(\partial\Omega)$ et $\|\gamma\, u\|_{L^p(\partial\Omega)} \le C\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$,
(ii) $\forall\, u \in C_c^1(\bar\Omega)$ on a $\gamma\, u = u|_{\partial\Omega}$.

Théorème 2.2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de classe C^2 et $p \in [1,\infty]$. Pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$ il existe une (unique) fonction $\gamma\, u \in L^p(\partial\Omega)$ vérifiant pour tout $\varphi \in C_c^1(\bar\Omega)$ et $\beta \in C^1(\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R})$:

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\beta(u)\, n\, \varphi)\, dx = \int_{\partial\Omega} \beta(\gamma\, u)\, \varphi\, d\sigma.$$

5.3 - Théorème de prolongement

Théorème 3.1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de classe $W^{2,\infty}$ au sens où il existe une fonction $\delta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ de "distance signée" au bord telle que

$$\delta \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N), \quad \Omega := \{x \in \mathbb{R}^N,\ \delta(x) < 0\}, \quad \partial\Omega := \{x \in \mathbb{R}^N,\ \delta(x) = 0\}$$

et

$$n(x) = \nabla\delta(x) \in S^{N-1} \ \ \forall\, x \in \partial\Omega.$$

Pour tout $p \in [1, \infty]$, il existe un opérateur linéaire bornée de prolongement $P : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tel que pour une constant $C \in (0, \infty)$ on ait:
(i) $\forall\, u \in W^{1,p}(\Omega)$ on a $Pu \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et
$\|P\, u\|_{L^p(\Omega)} \le C\, \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$,
$\|P\, u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le C\, \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$.
(ii) $\forall\, u \in W^{1,p}(\Omega)$ on a $Pu|_\Omega = u$.

• On a d'une part en écrivant

$$\delta(y) = \delta(x) + (y - x) \cdot \nabla\delta(x) + \frac{1}{2}\int_0^1 D^2\delta(z_t)\,(y - x, y - x)\, dt$$

au point $y = x - \varepsilon\, n(x)$

$$\delta(x - \varepsilon\, n(x)) = \delta(x) - \varepsilon\|n(x)\|^2 + \eta_\varepsilon(x), \qquad \|\eta_\varepsilon\|_{L^\infty} \le C\,\varepsilon^2$$

où on peut prendre $C := \|D^2\delta\|_{L^\infty}\, \|n\|^2_{L^\infty} < \infty$.

• On définit

$$\Omega_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^N,\ \mathrm{dist}(x, \Omega) < \varepsilon\}.$$

En prenant $\varepsilon > 0$ assez petit, on a

$$\|n(x)\|^2 \ge 3/4, \quad \delta(x) \le 1/(4\,C) \quad \text{ pour tout } \quad x \in \Omega_\varepsilon \backslash \bar{\Omega}.$$

• On en déduit que

$$\delta(x - 2\,\delta(x)\, n(x)) \le C\,\delta(x)^2 - \frac{1}{2}\,\delta(x) < 0 \quad \forall\, x \in \Omega_\varepsilon \backslash \bar{\Omega}.$$

• On définit $H(x) := x - 2\delta(x)\, n(x)$. On a $H \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ et $H(x) = x$ pour $x \in \delta\Omega$. De plus, $DH(x) = Id - 2\, n(x) \otimes n(x) - 2\,\delta(x)\, D^2\delta(x)$. On observe que $DH(x) = Id - 2\, n(x) \otimes n(x)$ pour $x \in \partial\Omega$ ce qui implique $DH(x)$ inversible. En effet, les valeurs propres λ de $DH(x)$ satisfont $|\lambda| \ge 1$ en tout point $x \in \partial\Omega$. En effet, s'il existe $\eta \in \mathbb{R}^N$, $|\eta| = 1$, tel que $\eta - 2n\,(n \cdot \eta) = \lambda\,\eta$, alors en prenant le produit scalaire de ce vecteur avec n et η on obtient

$$(1 - \lambda)\, n \cdot \eta = 2\, n \cdot \eta\,, \quad 1 - \lambda = 2\,(n \cdot \eta)^2,$$

d'où la conclusion. Par l'hypothèse de régulaité on a que les valeurs propres de $DH(x)$ sont supérieures en valeurs absolue à 1/2 sur un voisinage de la forme $A := \{x \in \mathbb{R}^N;\ |\delta(x)| < \varepsilon\}$ avec $\varepsilon > 0$. Par le théorème d'inversion locale, cela implique que H est localement un difféomorphisme au voisinage de tout point du bord.

Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que $\chi \equiv 1$ sur $\bar{\Omega}$, $\mathrm{supp}\,\chi \subset \Omega_\varepsilon$. On définit la fonction $\bar{u}$ par

$$\bar{u}(x) := u(I(x))\,\chi(x), \quad I(x) = x - 2\,\delta^+(x) n(x)$$

Alors $\bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et il existe une constante (indep de u) telle que

$$\|\bar{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \le C\,\|u\|_{L^p(\Omega)}, \qquad \|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \le C\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

En effet, on a par exemple,

$$\nabla\bar{u}(x) = \nabla(u(I(x))\,DI(x)\,\chi(x) + u(I(x))\,\nabla\chi(x)$$

Alors

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\bar{u}|^p\,dx &\le \int_\Omega |\nabla\bar{u}|^p\,dx + C\int_{\Omega_\varepsilon\backslash\Omega} (|\nabla(u(I(x))|^p + |u(I(x))|^p)\,|\mathrm{jac}(I(x))|\,dx \\ &\le (1+C)\int_\Omega (|\nabla u|^p + |u|^p)\,dx.\end{aligned}$$

Remarque. Une autre preuve (plus compliquée et finalement équivalente) suerait de définir $H : \Omega_\varepsilon \to \Omega$ de la manière suivante: pour $x \in \mathbb{R}^N$ et $t \in \mathbb{R}$ on note $\Phi_t : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ l'application flot définie par $\Phi_t(x) = X(t)$ où X est la solution de l'équation différentielle

$$X'(t) = -n(X(t)), \qquad X(0) = x,$$

on pose alors $H(x) = \Phi_{2\delta(x)}(x)$ si $x \in \Omega_\varepsilon\backslash\Omega$ et $H(x) = x$ si $x \in \Omega$. On montre alors que H est bijective de $\Omega_\varepsilon\backslash\Omega$ sur son image $\mathcal{O} \subset \Omega$.

Théorème 3.2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de classe C^3. Pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$, il existe une suite (u_n) de $C^1_c(\mathbb{R}^N)$ telle que $u_n|_\Omega \to u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.

6 - Equations elliptiques linéaires (selon Gilbarg-Trudinger)

Les équations elliptiques

$$L\,u := -a_{ij}\,\partial^2_{ij}\,u + b_i\,\partial_i u + c\,u = f$$

avec $a_{ij}\,\xi_i\,\xi_j \ge \nu\,|\xi|^2$, $\forall\,\xi \in \mathbb{R}^N$, $\nu > 0$ (on utilise ici la convention (de Einstein) de sommation des indices répétés) jouissent de deux propriétés remarquables:

(i) *régularisation*: u possède localement deux crans de régularité de plus que f lorsqu'on mesure cela dans de bons espaces (espace de Holder $C^{k,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, espace de Sobolev $W^{k,p}$, $1 < p < \infty$) et si les coefficients a, b, c possèdent une régularité suffisante. Cette régularité est "globale" si $\partial\Omega$ possède la régularité requise.

(ii) *principe du maximum (faible et fort).* Typiquement, le PM faible dit

$$L\,u \ge 0\ \ \Omega,\ \ u \ge 0\ \ \partial\Omega,\ \ c \ge 0\ \ \Omega, \quad \Rightarrow \quad u \ge 0\ \ \Omega$$

et le PM fort dit

$$L\,u \ge 0\ \ \Omega,\ \ u \ge 0\ \ \Omega \quad \Rightarrow \quad u > 0\ \ \Omega \text{ ou } u \equiv 0\ \ \Omega.$$

Le principe du maximum s'obtient dans différents cadres:

(a) gràce à la formule de la moyenne pour l'opérateur de Laplace (cadre régulier, continu ou L^1) (;

(b) théorie des solutions classiques $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ (à l'aide de fonctions barrières) [Hopf1950, ...];

(c) théorie des solutions faibles H^1 pour les opérateurs sous forme divergence (à l'aide de bons multiplicateurs et de l'inégalité de Sobolev) [régularité:De Giorgi57, Nash58, Morrey59, Stampacchia60, ...; Harnack: Moser61, Serrin64, Trudinger67, ...];

(d) théorie des solutions fortes $W^{2,p}$ [Aleksandrov60, Bakelman61, Pucci66, Krylov&Safonov79]

La théorie de régularisation se fait également dans plusieurs cadres

(e) théorie (existence) Hilbertienne de Hilbert[1900], Lebesgue[1907], Friedrichs[1944], Garding[1953] à partir de la formulation variationnelle et régularité de la solution (par quotients différentiels, par exemple) [Friedrichs1953, Browder1954, Lax1955, Niremberg1953];

(f) théorie de régularité Holderienne de Schauder [1930] à partir de formule intégrale (théorie du potentiel) et des arguments de perturbation;

(g) théorie de régularité $W^{2,p}$ à partir de la formule intégrale (singulière [Calderon&Zygmond1952, Stein1970]) qui repose sur la théorie plus ancienne (cas de la dimension 1 de Riesz (décomposition en cubes) et d'interpolation de Marcinkiewicz[1939];

(h) le principe du maximum permet de retrouver certains résultats de régularité [Brandt1969]

Les preuves d'existence s'obtient

(i) Perron (solutions $C(\bar\Omega) \cap C^2(\Omega)$ pour données au bord continues)

(j) Méthode de continuation (si existence, par exemple explicite, dans un cas particulier, alors existence le long d'un segment si bornes a priori uniforme)

(k) Méthode variationnelle

Bernstein ?

Dans ce paragraphe on considère l'opérateur elliptique

$$L\,u = -\Delta\,u + b\cdot\nabla\,u + c\,u,$$

défini pour $u \in H^1(\Omega)$ par la relation

$$\langle L\,u, v\rangle = \int_\Omega \nabla v\,\nabla u + v\,b\cdot\nabla\,u + c\,v\,u \qquad \forall\, v \in H^1_0(\Omega).$$

Theéorème 6.1. (PM$*$). On suppose $c \ge 0$ dans Ω. Alors

$$L\,u \ge 0,\;\; u \in H^1_0(\Omega) \quad \text{implique} \quad u \ge 0 \text{ dans } \Omega.$$

Extension 6.2. (PM$*$). On suppose $c \ge 0$ dans Ω. Alors

$$L\,u \ge 0,\;\; u \in H^1(\Omega) \quad \text{implique} \quad \min_\Omega u \ge \min_{\partial\Omega}(u \wedge 0).$$

Preuve du Theéorème 6.1. • On suppose $b \equiv 0$. On choisit $v = u^-$. Alors par hypothèse

$$-\int_\Omega |\nabla u^-|^2 + c\,(u^-)^2 \ge 0,$$

ce qui implique $u^- \equiv 0$ et donc $u \ge 0$.

• On ne suppose plus $b \equiv 0$. On suppose par l'absurde que $\min_\Omega u < 0$. Pour k tel que $\min_\Omega u < k < 0$ on choisit $v = (u-k)^-$. Comme $\nabla v = -\nabla u\,\mathbf{1}_{u<k}$, on a

$$-\int_\Omega |\nabla v|^2 + v\,b\cdot\nabla\,v + c\,v^2 \ge 0.$$

On en déduit

$$\|\nabla\,v\|^2_{L^2} \le \|b\|_{L^\infty}\,\|v\,\mathbf{1}_A\|_{L^2}\,\|\nabla\,v\|_{L^2}, \qquad A := \mathrm{supp}\nabla v,$$

et donc par l'inégalité de Sobolev et inégalité de Holder (pour $N \ge 3$, à modifier lorsque $N \le 2$)

$$C_\Omega\,\|v\|_{L^{2^*}} \le \|b\|_{L^\infty}\,\|v\,\mathbf{1}_A\|_{L^2} \le \|b\|_{L^\infty}\,\|v\|_{L^{2^*}}\,\mathrm{mes}(A)^\theta,$$

avec $\theta > 0$. En conclusion, on a démontré que pour une constante $\kappa > 0$ (indépendante de k), on a

$$\forall\, k > \min_{\Omega} u \qquad \text{mes}(\text{supp}\nabla u \cap \{u < k\}) \geq \kappa.$$

En passant à la limite $k \to \min_{\Omega} u$, on obtient $\text{mes}(\text{supp}\nabla u \cap \{u = \min_{\Omega} u\}) \geq \kappa$, ce qui contredit le fait que $\nabla u = 0$ sur les courbes de niveaux de u. On n'a donc pas $\min_{\Omega} u < 0$. $\square$