Université de Paris Dauphine
Année 2003-2004

Examen de Systèmes Différentiels - MD3

Mardi 25 Mai de 12h à 14h - Amphi 8

Les calculatrices et les documents sont interdits

Dans tout le problème, on munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne. On note (x, y) les coordonnées d'un point z de $\mathbb{R}^2$. On note Ω le demi-plan ouvert $\Omega := \{z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y > 0\}$.

I. On considère le champ de vecteurs défini dans $\mathbb{R}^2$ par

$$F(z) = (F_1(z), F_2(z)) = (x^2 - y^2 + 1 - 3\,x, 2\,x\,y)$$

et l'équation différentielle associée

$$(E) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & x^2 - y^2 + 1 - 3\,x \\ \dot{y} & = & 2\,x\,y. \end{array} \right.$$

1) Montrer que pour tout $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, l'équation (E) admet une unique solution maximale $z(t) = (x(t), y(t))$ de donnée initiale z_0, on note $J = J(z_0)$ son intervalle de définition.

2) Montrer que si (z, J) est une solution de (E), alors $z^*(t) := (x(t), -y(t))$ est aussi une solution de (E) définie sur le même intervalle J.

3) Soit (z, J) une solution. Montrer que

a. si $y(t_0) = 0$ alors $y(t) = 0$ pour tout $t \in J$;

b. si $y(t_0) > 0$ alors $y(t) > 0$ pour tout $t \in J$;

c. si $y(t_0) < 0$ alors $y(t) < 0$ pour tout $t \in J$.

(Indication. On pensera à exploiter la deuxième équation du système (E)).

4) Déterminer les points singuliers du champ de vecteurs F (i.e. les points $z \in \mathbb{R}^2$ tels que $F(z) = 0$). (Indication. Il y en a quatre).

5) Écrire l'équation satisfaite par une solution $z = (x, y)$ de (E) de condition initiale $x(0) = x_0$, $y(0) = 0$. Résoudre "qualitativement" cette équation, i.e. sans chercher à la résoudre explicitement, donner la nature des trajectoires: Déterminer quels sont les points singuliers. Donner la forme des intervalles de définition (pour quelles valeurs de $x_0 \in \mathbb{R}$ l'intervalle $J((x_0, 0))$ est-il borné supérieurement? inférieurement?) et les limites des solutions. Pour chaque trajectoire, indiquer le sens de parcours. Faire un dessin .

6) Pour chaque singularité de F, écrire l'équation linéarisée du champ de vecteurs en cette singularité. Dessiner succinctement les orbites de cette équation linéaire. Discuter de la stabilité de chaque équation linéarisée, puis de la stabilité des singularités de l'équation (E).

7) Résumer par un dessin (de quelques orbites) les informations déjà obtenues sur le système (E). Quels sont les domaines invariants identifiés?

II. On considére l'application $G : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par

$$G(z) = \frac{x^2 + y^2 + 1}{2\,y}.$$

1) Montrer que G est de classe C^2 dans Ω.

2) Pour tout $\lambda \geq 1$, montrer que l'ensemble des lignes de niveau $C_\lambda := \{z \in \mathbb{R}^2,\ G(z) = \lambda\} = G^{-1}(\{\lambda\})$ est un cercle que l'on déterminera. Dessiner C_1, C_2, C_3.

3) En déduire que $G(z) > 1$ pour tout $z \in \Omega \backslash \{(0, 1)\}$ et en déduire ce que vaut $K_c := G^{-1}(]-\infty, c])$ pour tout réel c.

III. La suite du problème a pour but d'étudier plus précisément les trajectoires de (E) issues d'un point de Ω. On considère donc dans la suite une solution maximale $z(t) = (x(t), y(t))$ de condition initiale $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ avec $z_0 \in \Omega \backslash \{(0, 1)\}$, et on note toujours J son intervalle de définition.

1) Montrer que l'application $t \mapsto g(t) := G(z(t))$ est définie sur J, de classe C^1, et que l'on a

$$g'(t) = -\frac{3x^2(t)}{y(t)}.$$

2) Montrer que l'on a, pour tout $t \in J$,

$$-6\,g(t) \leq g'(t) \leq 0.$$

3) En déduire qu'on a, pour tout $t \in J$ et $t \geq 0$, $z(t) \in K_{g(0)}$ (cf. I.3). Montrer que $[0, \infty[\subset J$.

4) Montrer qu'on a, pour tout $t \in J$ et $t \leq 0$

$$g(t) \leq e^{6\,|t|}\, g(0).$$

En déduire que $J = \mathbb{R}$.

5) Montrer que $t \mapsto g(t)$ est strictement décroissante. (Indication. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on traitera séparément le cas $x(t) \neq 0$ et le cas $x(t) = 0$). On dit alors que G est une fonction de Liapunov stricte "généralisée".

6) Énoncer <u>précisément</u> le Théorème (admis) du cours (désormais, on le dénomera "Théorème A") qui permettrait de conclure qu'il existe $z_1 \in \Omega$ tel que $z(t) \to z_1$ lorsque $t \to \infty$ si l'on savait que G était une fonction de Liapunov stricte (au sens habituel et non en un sens "généralisé").

7) On admet que le Théorème A s'étend au cas d'une fonction de Liapunov stricte "généralisée". Conclure et déterminer z_1.

IV. Dans cette partie, on se propose de démontrer le Théorème A, dans le cas particulier de l'équation (E).

1) Montrer qu'il existe un réel $c \geq 1$ tel que $\lim_{t\to\infty} g(t) = c$.

2) Montrer qu'il existe un point $z_2 \in \Omega$ et une suite $(t_n)_{n\geq 1}$ tels que

$$\lim_{n\to\infty} t_n = +\infty; \quad \lim_{n\to\infty} z(t_n) = z_2 \quad \text{et} \quad G(z_2) = c.$$

3) On suppose par l'absurde $c > 1$. Soit $\bar{z}(t) = (\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ la solution maximale de (E) de condition initiale $\bar{z}(0) = z_2$.

- Montrer qu'il existe $t_0 > 0$ tel que $F(\bar{z}(t_0)) < c$.
- Montrer que pour n assez grand $g(t_n + t_0) < c$.

4) Déduire de ce qui précède qu'il existe une suite $(t_n)_{n\geq 1}$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} t_n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} z(t_n) = (0, 1).$$

5) Conclure (on pensera à utiliser I.6).