Université de Paris Dauphine

Examen Systèmes Différentiels - MD3

Jeudi 2 Septembre 2003 de 14h à 16h

Exercice I. Résoudre (par le calcul) l'équation différentielle réelle

$$y' + y + t\,y^2 = 0.$$

Exercice II. Soit l'équation différentielle d'ordre 3:

$$y''' + y'' + y' + y = 0.$$

a) - Écrire l'équation sous la forme d'un système différentiel linéaire

$$Y' = A\,Y.$$

Que peut-on dire sur les solutions de cette équation: existence, intervalle maximal d'existence des solutions, structure algébrique de l'ensemble des solutions?

b) - Discuter de la stabilité du système sans le résoudre explicitement.

Problème III. On considère le système suivant

$$(S) \qquad \begin{cases} \dot{x} &= y^2 - x \\ \dot{y} &= x - y^2 \end{cases}$$

1. Enoncer un théorème d'existence et unicité concernant le problème de Cauchy associé à (S).
2. Montrer que si $x(0) > 0$ et (x, y) est solution de (S) sur l'intervalle de temps $[0, T]$ alors $x(t) > 0$ pour tout $t \in [0, T]$. Montrer que si de plus $y(0) > 0$ alors $y(t) > 0$ pour tout $t \in [0, T]$. Que peut-on en déduire sur le quart de plan $Q = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
3. Ecrire l'équation différentielle satisfaite par $w := x + y$.
   a) En déduire une quantité conservée par le système (S).
   b) En deduire que la solution du problème de Cauchy associée à (S) est globale pour toute donnée initiale dans Q.
4. Démontrer qu'il existe un unique point d'equilibre $(x_\infty, y_\infty) \in Q$ pour le système (S) tel que $w_\infty = w(0)$.

5. On fixe dans cette question $w_\infty = 1$.

   a) Expliciter (x_∞, y_∞).
   b) Déterminer l'équation linéarisée associée.
   c) Discuter de la nature et de la stabilité du système linéarisé obtenu.
   d) En déduire, si cela est possible, des informations sur la stabilité de l'équilibre considéré, pour le système non linéaire (S).

6. Écrire l'équation différentielle satisfaite par $z = x - x_\infty$.

   a) En déduire que $Z = z^2$ satisfait $\dot{Z} + 2Z \leq 0$.
   b) En déduire, que $x(t) \to x_\infty$ lorsque $t \to \infty$ avec un taux exponentiel.
   c) En déduire enfin, que $y(t) \to y_\infty$ lorsque $t \to \infty$ avec un taux exponentiel.