Université Paris-Dauphine **2015-2016**
DU MI2E
Algèbre Linéaire 3 - S. Mischler

Contrôle Continu

Lundi 5 Octobre 8h30-10h

Exercice 1. Soient les familles de vecteurs

1. $\{(1,2),\ (3,4),\ (8,9)\}$;
2. $\{(1,2,3),\ (2,3,4)\}$.

a) - Ces familles de vecteurs forment-elles une base?

b) - Ces familles de vecteurs sont-elles libres, liées, génératrices?

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, et pour $p \in [1,\infty]$, on définit les applications $x = (x_1,...,x_n) \mapsto \|x\|_p$ par

$$\|x\|_p := \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Big)^{1/p}, \quad \|x\|_\infty := \max(|x_1|,...,|x_n|).$$

On note également

$$\langle x,y\rangle = x_1y_1 + ... + x_ny_n, \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}^n.$$

1) - Justifier rapidement pourquoi $\|\cdot\|_p$ est une norme pour $p = 1,2,\infty$. On insistera essentiellement sur la preuve de l'inégalité triangulaire.

2) - Montrer que ces trois normes sont équivalentes: montrer qu'il existe des constantes C_i telles que

$$\|x\|_1 \le C_1\|x\|_2, \quad \|x\|_2 \le C_1\|x\|_\infty, \quad \|x\|_\infty \le C_3\|x\|_1, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^d,$$

et préciser les valeurs possibles des constantes C_i.

3) - Donner les meilleurs constantes C_i pour lesquelles ces inégalités sont vraies.

4) - Pour une norme $\|\cdot\|$ sur un espace vectoriel E, montrer l'inégalité triangulaire

$$\forall\, x,y \in E, \quad \big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x-y\|.$$

5) - Rappeler la définition d'une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$ et montrer que les applications $x \mapsto \|x\|_p$ sont continues pour $p = \infty, 1, 2$.

Exercice 3. 1) - Montrer que dans $\mathbb{R}^2$, l'application bilinéaire

$$(x, y) = ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto [x, y] := (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + 2x_2y_2$$

définit un produit scalaire. On note $N(x) := [x, x]^{1/2}$.
2) - Pourquoi l'inégalité

$$|[x, y]| \leq N(x)\, N(y)$$

et l'identité

$$N(x + y)^2 + N(x - y)^2 = 2(N(x)^2 + N(y)^2)$$

sont-elles vraies pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$?