Université Paris Dauphine **2016-2017**
DE MI2E
Algèbre linéaire 3

Contrôle Continu 1

Vendredi 7 Octobre 8h30-9h30

Exercice 1. (Barème indicatif : 3 points)
1. Parmi les sous-ensembles de $\mathbf{R}^3$ suivants, quels sont ceux qui sont des sous-espaces vectoriels ?

$$E_1 := \{(x,y,z); x-y+z=1\}, \quad E_2 := \{(x,y,z); x-y+z^2=0\},$$
$$E_3 := \{(x,y,z); x-y+z=0\}, \quad E_4 := \{(x,y,z); x-y+z\geq 0\}.$$

2. Parmi les familles de vecteurs de $\mathbf{R}^3$ suivantes, quelles sont celles qui sont libres ?

$$\mathcal{A} := \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}, \quad \mathcal{B} := \{(1,1,1),(2,2,2)\},$$
$$\mathcal{C} := \{(4,5,6),(0,0,0)\}, \quad \mathcal{D} := \{(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9),(0,1,2)\}.$$

3. Parmi les familles de vecteurs de $\mathbf{R}^3$ suivantes, quelles sont celles qui sont génératrices ?

$$\mathcal{E} := \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0),(0,0,0)\}, \quad \mathcal{F} := \{(1,1,1),(1,1,0)\}.$$

Exercice 2. (Barème indicatif : 3 points)
1. Montrer que l'application $\alpha : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$

$$\alpha((x,y,z),(x',y',z')) = (x+y)(x'+y') + (y+z)(y'+z') + (z+x)(z'+x')$$

définit un produit scalaire.
2. Que dire de l'application

$$\beta((x,y,z),(x',y',z')) = (x+y)(x'+y') + (y+z)(y'+z') + (z-x)(z'-x')?$$

Exercice 3. (Barème indicatif : 8 points)
On note $M_n(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées $n \times n$. Pour $A = (A_{ij}) \in M_n(\mathbf{R})$, on définit

$$\|A\|_1 := \sum_{1 \le i,j \le n} |A_{ij}|, \quad \|A\|_2 := \Big(\sum_{1 \le i,j \le n} A_{ij}^2 \Big)^{1/2}, \quad \|A\|_\infty := \max_{1 \le i,j \le n} |A_{ij}|.$$

a) Pour tout $A \in M_n(\mathbf{R})$, montrer que

$$\|A\|_\infty \le \|A\|_p,\ p = 1, 2, \qquad \|A\|_2 \le n\|A\|_\infty,$$
$$\|A\|_2 \le \|A\|_1^{1/2} \|A\|_\infty^{1/2}, \quad \text{puis} \quad \|A\|_2 \le \|A\|_1.$$

b) Dans un espace euclidien E, énoncer puis **démontrer** l'inégalité de Cauchy-Schwarz et discuter les cas d'égalité.

c) En déduire que

$$\|A\|_1 \le n\, \|A\|_2, \quad \forall\, A \in M_n(\mathbf{R}).$$

d) Montrer que toutes ces inégalités ne peuvent être améliorées en général.

Exercice 4. (Barème indicatif : 6 points) Munissons $\mathbf{R}^4$ du produit scalaire usuel. Soient les vecteurs

$$u_1 = (2, 3, 4, 0),\ u_2 = (1, 0, 0, 1),\ u_3 = (2, 0, 0, 0),\ u_4 = (0, 3, 0, 0).$$

a) - Montrer que $B := (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de $\mathbf{R}^4$?

b) - Orthogonaliser B selon le procédé de Gram-Schmidt.