Université Paris Dauphine **2016-2017**
DE MI2E
Algèbre linéaire 3

Contrôle Continu n° 2

Lundi 28 Novembre 9h-10h

Exercice 1. (Barème indicatif : 3 points)

Déterminer la matrice dans la base canonique orthonormée de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \ x = y = z\}$.

Exercice 2. (Barème indicatif : 7 points)

Soient a un nombre réel, q la forme quadratique

$$q(X, Y, Z) = X^2 + 4Y^2 + 3Z^2 - 2XY - 2XZ - aYZ$$

et f la forme bilinéaire symétrique associée.

1) Quelle est la matrice Q de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$?
2) Effectuer la réduction de Gauss de q.
3) Donner la signature de q suivant les valeurs de $a \in \mathbb{R}$.
4) Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$, f est-elle positive, définie, un produit scalaire ?

Exercice 3. Question de cours. (Barème indicatif : 2 points)

Ennoncer proprement et <u>entièrement</u> le “ théorème de diagonalisation d'une matrice carrée symétrique réelle ”.

Exercice 4. (Barème indicatif : 2 points) On note

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Donner l'expression de la forme quadratique associée à la matrice M.
2. Pourquoi la matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 5. (Barème indicatif : 6 points)

Soit A une matrice carrée réelle de $M_n(\mathbb{R})$ et $B := {}^tA\,A$.

1. Montrer que B est symétrique et positive.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}B = \mathrm{Ker}A$ puis que $\mathrm{rg}B = \mathrm{rg}A$.
3. Montrer que B est définie positive si, et seulement si A est inversible.

(Note : On rappelle qu'une matrice est positive (resp. définie) si la forme quadratique associée est positive (resp. définie)).

Réciproquement, on considère B une matrice réelle symétrique et positive de $M_n(\mathbb{R})$.

4. Montrer qu'il existe une matrice réelle symétrique et positive A telle que $B = {}^tA\,A$.
(Ind. On commencera par résoudre l'Exercice 3, que l'on utilisera avec profit et en détaillant bien l'argument).