Université Paris Dauphine
DU MI2E
Algèbre linéaire 3

Examen, vendredi 22 Janvier 2016.
Durée : 2 heures.

Tous *les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront clairement être énoncés. Le barême est donné à titre* <u>*indicatif*</u>.

1. Exercice (2,5 points). On introduit sur $\mathbb{R}^3$ l'application suivante :

$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle := x_1x_2 + (y_1 - x_1)(y_2 - x_2) + (z_1 - y_1)(z_2 - y_2).$$

1. Montrer que cette application détermine un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
2. Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Schmidt **pour ce produit scalaire** à la famille composée de $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ et $v_3 = (0, 0, 1)$.

2. Exercice (2,5 points). Effectuer la réduction de Gauss de la forme quadratique

$$q(X, Y, Z, T) = 2XY + 2YZ - 4XZ + 2XT + 3ZT.$$

Donner la signature de cette forme et et indiquer si elle est positive, définie positive, négative ou définie négative. Quelle est la matrice M de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$?

3. Exercice (3 points) On note

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Donner l'expression de la forme quadratique associée à la matrice A.
2. Pourquoi la matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Diagonaliser la matrice A.
4. Déterminer une base orthonormée formée de vecteurs propres de la matrice A.
5. Expliciter $\exp(A)$.

4. Problème (12 points). L'objectif de ce problème est de démontrer le théorème de diagonalisation sans avoir recours au théorème de d'Alembert (accepté en cours) affirmant qu'un polynôme de degré d possède exactement d racines. Il est donc interdit de faire appel à celui-ci.

On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, et $(\cdot,\cdot)$ le produit scalaire associé. On considère une matrice A réelle symétrique $d \times d$, et on définit la forme quadratique

$$s(u) := (Au, u), \quad \forall\, u \in \mathbb{R}^d.$$

On note $VP(A)$ l'ensemble des valeurs propres **réelles** de A et on note

$$m := \inf_{u\in\mathbb{R}^d,\, \|u\|=1} s(u), \quad M := \sup_{u\in\mathbb{R}^d,\, \|u\|=1} s(u).$$

1. Quelques questions préliminaires.
   (a) Soit B une matrice réelle $d \times d$. Montrer qu'il existe une constante $C \geq 0$ telle que $\|Bu\| \leq C\,\|u\|$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$.
   (b) Montrer que
   $$\|u\| = \max_{v\in\mathbb{R}^d,\, \|v\|=1} (u, v), \quad \forall\, u \in \mathbb{R}^d.$$
   (c) Montrer que si $\lambda \in VP(A)$ alors $m \leq \lambda \leq M$, soit donc $VP(A) \subset [m, M]$.
   (d) Montrer que si $s = 0$ alors $A = 0$. En déduire que dans ce cas $VP(A) = \{0\}$.
   (e) Montrer que si $\{\lambda_1, ..., \lambda_\ell\} \subset VP(A)$, avec $\ell \geq 2$ et les λ_i distincts, et si on définit $E_i := \mathrm{Ker}(A - \lambda_i I)$, alors
   $$E_\ell \perp (E_1 + ... + E_{\ell-1}).$$
   En déduire que le cardinal de $VP(A)$ est inférieur ou égal à d.
2. On définit la forme bilinéaire
   $$a(u, v) := (Mu - Au, v).$$
   (a) Montrer que a est une forme positive et symétrique. **Démontrer** que
   $$a(u, v) \leq a(u, u)^{1/2}\, a(v, v)^{1/2}, \quad \forall\, (u, v) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d.$$
   (b) En déduire que
   $$\|Mu - Au\| \leq (M - m)^{1/2}\, (Mu - Au, u)^{1/2}, \quad \forall\, u \in \mathbb{R}^d.$$
   (c) Montrer qu'il existe une suite (u_n) de $\mathbb{R}^d$ telle que $\|u_n\| = 1$ et $(Au_n, u_n) \to M$ lorsque $n \to \infty$. En déduire que
   $$\|Mu_n - Au_n\| \to 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty.$$
   (d) Montrer que si $MI - A$ était inversible alors la suite (u_n) vérifierait $u_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$. En déduire que $M \in VP(A)$.
3. Montrer que l'on a l'alternative
   (i) ou bien $VP(A) = \{M\}$;
   (ii) ou bien $F := (\mathrm{Ker}(A - MI))^\perp \neq \{0\}$ et
   $$\sup_{u\in F,\, \|u\|=1} s(u) < M.$$
4. Conclure que $VP(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ avec $1 \leq k \leq d$, $\lambda_1 = M$, $\lambda_k = m$, et qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^d$ constituée de vecteurs propres de A.