Université Paris Dauphine
DU MI2E
Algèbre linéaire 3

Examen, Lundi 11 Juillet 2016.
Durée : 2 heures.

Tous *les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront clairement être énoncés. Le barème est donné à titre* <u>*indicatif*</u>.

1. Exercice (2 points).
Trouver une matrice orthogonale $U \in O(2)$ qui vérifie $U \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $det(U) = 1$.
Une telle matrice U est-elle unique ? Calculer $U \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

2. Exercice (3 points) Soit b, un nombre réel. Soit la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$q(x, y, z) = x^2 + by^2 + 2z^2 + 3xy - 2xz + yz,$$

et f la forme bilinéaire symétrique associée.

1) Décomposer q en une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.
2) Donner la signature de q suivant les valeurs de b.
3) Pour quelles valeurs de b, f définit-elle un produit scalaire ?

3. Exercice (3 points) On note

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Donner l'expression de la forme quadratique associée à la matrice A.
2. Pourquoi la matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Diagonaliser la matrice A.
4. Déterminer une base orthonormée formée de vecteurs propres de la matrice A.
5. Expliciter $\exp(A)$.

4. Problème (8 points)

0. Questions de cours. Soit $(\cdot,\cdot)$ un produit scalaire sur un espace vectoriel réel E. Comment définir la norme (euclidienne) associée ? En notant N celle-ci, montrer qu'elle vérifie l'identité du parallélogramme

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad N(x+y)^2 + N(x-y)^2 = 2\left(N(x)^2 + N(y)^2\right).$$

Dans la suite du problème on se propose de démontrer l'implication réciproque. Plus précisément, on considère un espace vectoriel réel E et une norme $\|\cdot\|$ sur E vérifiant l'identité du parallélogramme

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

On se propose de démontrer que $\|\cdot\|$ est associée à un produit scalaire. On définit pour cela sur E^2 une application $[\cdot,\cdot]$ par

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad [x,y] = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right).$$

1. Montrer que pour tout (x,y,z) de E^3, on a $[x+z,y] + [x-z,y] = 2\,[x,y]$.
2. Montrer que pour tout (x,y) de E^2, on a $[2\,x,y] = 2\,[x,y]$.
3. Montrer que pour tout (x,y) de E^2 et tout rationnel r, on a $[r\,x,y] = r\,[x,y]$. En déduire que ce résultat reste vrai pour tout r réel.
4. Montrer que pour tout (u,v,w) de E^3, $[u,w] + [v,w] = [u+v,w]$.
5. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme euclidienne.