Université Paris Dauphine
DU MI2E
Algèbre linéaire 3

Examen, Jeudi 12 Janvier 2017.
Durée : 2 heures.

Tous *les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront clairement être énoncés. Le barème est donné à titre* *<u>indicatif</u>.*

Exercice 1 (3 points). Soit α un nombre réel. Sur $\mathbb{R}^4$, on définit la forme quadratique

$$q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + \alpha z^2 + 3xy - 2xz + yz,$$

et on note f la forme bilinéaire symétrique associée.

1) Expliciter la matrice M associée et donner l'expression de f en fonction de M.
2) Décomposer q en une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.
3) Donner la signature de q suivant les valeurs de α.
4) Pour quelles valeurs de α, f définit-elle un produit scalaire ?

Exercice 2 (7 points). On définit

$$A := \begin{pmatrix} -5 & -2 & -4 \\ -2 & -8 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

1) Expliquer pourquoi A est diagonalisable. On énoncera un théorème complet.
2) Calculer les valeurs propres de A.
3) Exhiber une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ orthonormée de vecteurs propres. On rangera les vecteurs ε_i par ordre décroissant de la valeur propre associée (la valeur propre λ_1 associée à ε_1 correspond donc à la plus grande des valeurs propres).
4) Donner l'expression des projections orthogonales sur les différents espaces propres et expliciter les matrices associées.
5) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, exprimer $\exp(tA)$ comme le produit de trois matrices explicites dont une, et une seule, diagonale.

On s'intéresse maintenant à l'équation différentielle

$$y' = Ay, \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^3. \tag{1}$$

6) Exprimer $y(t)$ en fonction de $\exp(tA)$ et y_0.
7) Montrer que $y(t) := \varepsilon_1$ est une solution constante de (1).
8) On note π_1 la projection sur l'espace $\mathbb{R}\varepsilon_1$ engendré par ε_1 et $\pi_2 := I - \pi_1$. Montrer que

$$y(t) = e^{\mu_2 t}\pi_2 y_0 + \pi_1 y_0,$$

pour une constante μ_2 que l'on déterminera.
9) Que dire de $y(t)$ lorsque $t \to \infty$.

Exercice 3 (5 points). On définit

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

A partir des normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ de $\mathbb{R}^3$, on définit les normes induites $|\!|\!|\cdot|\!|\!|_1$ et $|\!|\!|\cdot|\!|\!|_2$ sur l'espace vectoriel des matrices $M_3(\mathbb{R})$.

1) Pour une matrice carrée symétrique $S \in M_3(\mathbb{R})$ et en désignant par $\rho(S)$ le maximum des valeurs propres de S, montrer que

$$(Sx, x) \leq \rho(S)\,\|x\|_2^2, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^3,$$

et que cette inégalité est une égalité pour un certain vecteur $x \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ que l'on caractérisera. En déduire que

$$|\!|\!|B|\!|\!|_2 = \sqrt{\rho(B^2)}$$

et calculer cette valeur. (Ind. En notant P le polynôme caracteristique de B^2, on pourra écrire $P(X/16) = 16^{-3}Q(X)$ et calculer $Q(1)$).

2) Pour une matrice carrée $M = (m_{ij}) \in M_3(\mathbb{R})$ et un vecteur $x = (x_i) \in \mathbb{R}^3$ tels que $m_{ij} \geq 0$ et $x_i \geq 0$ pour tout $i, j \in \{1, 2, 3\}$, montrer que

$$\|Mx\|_1 = \sum_{j=1}^{3} x_j \Big(\sum_{i=1}^{3} m_{ij} \Big).$$

En déduire la valeur de $|\!|\!|B|\!|\!|_1$.

3) Pour une matrice carrée T et un entier $n \geq 1$, on définit la matrice $R_n := 1 + T + ... + T^n$. Montrer que

$$R_n(I - T) = (I - T)R_n = I - T^{n+1}.$$

4) En déduire que la matrice

$$C := \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/4 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/4 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

est inversible. On ne cherchera pas à calculer C mais on expliquera bien comment cela découle des questions 1) et 3) précédentes en observant en particulier que $\rho(B^2) < 1$. Peut-on déduire le même résultat par une application immédiate des questions 2) et 3) ?

Exercice 4 (5 points). Soit E un espace euclidien de produit scalaire $(\cdot,\cdot)$ et de norme euclidienne $\|\cdot\|$. On note $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ la norme d'opérateurs associée.

1) Donner la définition d'une projection orthogonale. Ennoncer les propriétés vues en cours d'une telle application.

2) Soit P un projecteur. Montrer l'équivalence entre

(i) P est une projection orthogonale, (ii) ${}^tP = P$, (iii) $|\!|\!|P|\!|\!| \leq 1$.

(Ind. On pourra montrer (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i). Pour la dernière implication, on pourra montrer que $\mathrm{Im}P \perp \mathrm{Im}(I - P)$ en commençant par démontrer que (iii) implique

$$(x, ty) + \|ty\|^2 \geq 0, \quad \forall\, x \in \mathrm{Im}P,\ \forall\, y \in \mathrm{Im}(I - P),\ \forall\, t \in \mathbb{R}).$$

3) Soient Q et R deux projections orthogonales. Montrer l'équivalence entre

(iv) $RQ = QR$, (v) RQ est un projecteur.