Université Paris Dauphine
DU MI2E
Algèbre linéaire 3

Examen, Jeudi 12 Janvier 2017.
Durée : 2 heures.

Tous *les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront clairement être énoncés. Le barème est donné à titre* <u>*indicatif*</u>.

Exercice 1 (5 points).

1. Trouver une matrice orthogonale $U \in O(2)$ qui vérifie $U \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\det(U) = 1$. Une telle matrice U est-elle unique ?
2. Trouver une matrice orthogonale $U \in O(2)$ qui vérifie $U \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\det(U) = -1$. Une telle matrice U est-elle unique ?
3. Soit $v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et U une matrice orthogonale $U \in O(2)$ telle que $Uv = v$. Montrer que soit $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ soit $\det(U) = -1$.

Exercice 2 (5 points).
On définit

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer le polynôme caractéristique de A.
2) Déterminer les racines de ce polynôme caractéristique.
3) Diagonaliser la matrice A.
4) Soit q, la forme quadratique de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Utiliser la question précédente pour trouver une base q-orthogonale et déterminer la signature de q.

Exercice 3 (5 points). Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E vérifiant l'identité du parallélogramme,

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

On définit pour cela sur E^2 une application f par

$$\forall (x,y) \in E^2,\ f(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

1. Montrer que pour tout (x,y,z) de E^3, on a $f(x+z,y) + f(x-z,y) = 2\,f(x,y)$.
2. Montrer que pour tout (x,y) de E^2, on a $f(2\,x,y) = 2\,f(x,y)$.
3. Montrer que pour tout (x,y) de E^2 et tout rationnel q, on a $f(q\,x,y) = q\,f(x,y)$. En déduire que ce résultat reste vrai pour tout q réel.
4. Montrer que pour tout (u,v,w) de E^3, $f(u,w) + f(v,w) = f(u+v,w)$.
5. Montrer que f est bilinéaire.
6. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme euclidienne.

Exercice 4 (5 points). Soit E un espace euclidien de produit scalaire $(\cdot,\cdot)$ et de norme euclidienne $\|\cdot\|$. On note $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ la norme d'opérateurs associée.

1) Donner la définition d'une projection orthogonale. Ennoncer les propriétés vues en cours d'une telle application.
2) Soit P un projecteur. Montrer l'équivalence entre

   (i) P est une projection orthogonale, (ii) ${}^tP = P$, (iii) $|\!|\!|P|\!|\!| \leq 1$.

   (Ind. On pourra montrer (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i). Pour la dernière implication, on pourra montrer que $\mathrm{Im}P \perp \mathrm{Im}(I-P)$ en commençant par démontrer que (iii) implique

   $$(x, ty) + \|ty\|^2 \geq 0, \quad \forall\, x \in \mathrm{Im}P,\ \forall\, y \in \mathrm{Im}(I-P),\ \forall\, t \in \mathbb{R}).$$

3) Soient Q et R deux projections orthogonales. Montrer l'équivalence entre

   (iv) $RQ = QR$, (v) RQ est un projecteur.