Université Paris Dauphine **2015-2016**
DE MI2E
Algèbre linéaire 3

Partiel

Mecredi 4 Novembre 9h - 11h

Exercice 1. (Barème indicatif : 4 points)
Soient a et b deux nombres réels et $\alpha : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\alpha((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = ax_1y_1 + x_1y_2 + bx_2y_1 + x_2y_2.$$

Donnez, lorsqu'il y en a, les valeurs de a et b pour lesquelles α est

a) linéaire en la première variable,
b) linéaire en la deuxième,
c) symétrique,
d) positive,
e) définie (qu'elle soit positive ou non),
f) un produit scalaire.

Exercice 2. (Barème indicatif : 4 points)
Soient les familles de vecteurs :

1. $\mathcal{A} := \{(2, 1),\ (4, 3),\ (9, 8)\}$;
2. $\mathcal{B} := \{(3, 4, 3, 5),\ (0, 1, 4, 6)\}$;
3. $\mathcal{C} := \{(-1, 0, 1),\ (1, 2, 1),\ (1, 1, 1)\}$.

a) - Les familles de vecteurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ forment-elles une base ?

b) - Ces familles de vecteurs sont-elles libres, liées, génératrices ? La famille de vecteurs $\mathcal{C}$ forme-t-elle une base ?

c) - Pour chaque famille de vecteurs qui forme une base, orthonormalisez la au sens du produit scalaire usuel et selon le procédé de Gram-Schmidt.

Exercice 3. (Barème indicatif : 6 points)
$\mathbb{R}^3$ est muni de la structure euclidienne usuelle. Soient D et F les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$D = \Big\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 - x_3 = 0 \quad \text{et} \quad x_1 - x_2 - x_3 = 0\Big\}$$

et

$$F = \Big\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 0\Big\}.$$

a) - Quelle est la dimension m de D et la dimension n de F ? Trouver m vecteurs orthonormés $u_1, ..., u_m$ et n vecteurs orthonormés $v_1, ..., v_n$ tels que

$$D = \text{Vect}\{u_1, ..., u_m\}, \quad F = \text{Vect}\{v_1, ..., v_n\}.$$

b) - Quelles sont les dimensions de $D^\perp$ et $F^\perp$?

c) - Donner un système d'équations cartésiennes de $D^\perp$.

d) - Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.

Exercice 4. (Barème indicatif : 6 points)
Pour $p \in]1,\infty[$, on note $p' := p/(p-1)$ son exposant conjugué.
1 - a) Observer que $\theta := 1/p$ et $\theta' := 1/p'$ vérifient

$$\theta, \theta' \in (0,1), \quad \theta + \theta' = 1.$$

b) Montrer que

$$\forall\, a, b > 0, \quad \frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{p'}\log b^{p'} \le \log\Big(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}\Big).$$

c) En déduire l'inégalité de Young dans $\mathbb{R}_+$

$$\forall\, a, b \ge 0, \quad ab \le \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}.$$

2 - Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $X = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $Y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.

a) Démontrer l'inégalité de Young dans $\mathbb{R}^n$

$$\forall\, X, Y \in \mathbb{R}^n, \forall\, \lambda > 0, \quad \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \le \frac{\lambda^p}{p}\sum_{i=1}^n |x_i|^p + \frac{1}{p'\lambda^{p'}}\sum_{i=1}^n |y_i|^{p'}.$$

b) - Montrer que pour $A, B > 0$ fixés, la fonction

$$\varphi :]0,\infty[\to]0,\infty[,\ \lambda \mapsto \varphi(\lambda) := \frac{\lambda^p}{p}A^p + \frac{1}{p'\lambda^{p'}}B^{p'}$$

admet un unique minimum en un point λ^* que l'on déterminera. Que vaut $\varphi(\lambda^*)$?

c) - En déduire l'inégalité de Hölder

$$\forall\, X, Y \in \mathbb{R}^n, \quad \Big|\sum_{i=1}^n x_i y_i\Big| \le N_p(X)\, N_{p'}(Y),$$

avec

$$N_q(Z) := \Big(\sum_{i=1}^n |z_i|^q\Big)^{1/q}, \quad \forall\, Z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, q \in]1,\infty[.$$

3 - Montrer que l'application $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, $X \mapsto N_p(X)$ est une norme. *(Indication : on pensera à écrire*

$$(N_p(X+Y))^p \le \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{p-1}|x_i| + \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{p-1}|y_i|, \quad \forall\, X, Y \in \mathbb{R}^n,$$

et à utiliser l'inégalité de Hölder).

4 - Que pouvez-vous dire du cas $p = 2$? En particulier, comment appelle-t-on l'inégalité de Hölder dans ce cas ?