Université Paris Dauphine **2015-2016**
DE MI2E
Algèbre linéaire 3

Partiel

Mecredi 26 Octobre 10h30 - 12h30

Exercice 1. (Barème indicatif : 3 points)

Soient $u = (1, 1, 1, 1)$ et $v := (1 - x, x - y, y - z, z)$ deux vecteurs de l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$.

a) Montrer que $\langle u, v\rangle = 1$.

b) A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et du cas d'égalité dans celle-ci, résoudre dans $\mathbb{R}^4$ l'équation

$$(1 - x)^2 + (x - y)^2 + (y - z)^2 + z^2 = \frac{1}{4}.$$

Exercice 2. (Barème indicatif : 2 points)

Soit E un espace euclidien et $f : E \to E$ une application. Sous quelles conditions sur f la fonction

$$\varphi : E \times E \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x, y) := \langle f(x), f(y)\rangle$$

définit-elle un produit scalaire ?

Exercice 3. (Barème indicatif : 4 points)

Soit E un espace euclidien et p un endomorphisme tel que

$$p \circ p = p \quad \text{et} \quad \forall\, x \in E,\ \|p(x)\| \leq \|x\|.$$

Le but de l'exercice est de montrer que p est un projecteur orthogonal de E.

1. Rappeler pourquoi $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont supplémentaires. Rappeler pourquoi, pour établir que p est un projecteur orthogonal, il suffit de montrer que $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont orthogonaux.

2. On suppose par l'absurde que $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ ne sont pas orthogonaux. Soient $u \in \mathrm{Ker}(p)$ et $v \in \mathrm{Im}(p)$ tels que $\langle u, v\rangle \neq 0$.

(a) Calculer $\|u + tv\|^2$ et $\|p(u + tv)\|^2$ pour t réel.

(b) Montrer qu'il existe une valeur de t pour laquelle $\|p(u + tv)\| > \|u + tv\|$ et conclure.

Exercice 4. (Barème indicatif : 6 points)

$\mathbb{R}^3$ est muni de la structure euclidienne usuelle. Soient D et F les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$D = \Big\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 + x_3 = 0 \quad \text{et} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0\Big\}$$

et

$$F = \Big\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\Big\}.$$

a) - Quelle est la dimension m de D et la dimension n de F ? Trouver m vecteurs orthonormés $u_1, ..., u_m$ et n vecteurs orthonormés $v_1, ..., v_n$ tels que

$$D = \mathrm{Vect}\{u_1, ..., u_m\}, \quad F = \mathrm{Vect}\{v_1, ..., v_n\}.$$

b) - Quelles sont les dimensions de $D^\perp$ et $F^\perp$?

c) - Donner un système d'équations cartésiennes de $D^\perp$.

d) - Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur D.

Exercice 5. (Barème indicatif : 5 points)

On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$ et on considère des matrices de $M_2(\mathbb{R})$ et les transformations du plan associées.

a) - Trouver une matrice $U \in O(2)$ telle que $\det U = \mathrm{tr}\, U = 1$.

b) - En notant (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$, représenter les vecteurs e_1, e_2, Ue_1 et Ue_2 sur un dessin. Quelle est la transformation du plan associée à la matrice U ?

c) - Quelle est la matrice R_α de la rotation d'angle $\alpha \in \mathbb{R}$ dans le plan ? Calculer $R_\alpha R_\beta$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. A quelle transformation du plan correspond cette matrice ? Que dire de $R_\alpha R_{-\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$? A quel sous-ensemble remarquable de matrices appartient R_α ?

d) - Expliciter (simplement) U^n pour tout $n \in \mathbf{Z}$.