Chapitre 1 - Inégalités de Poincaré et de Log-Sobolev

cours de M2 : Comportement remarquable d'EDP d'évolution issues de la biologie

25 mars 2013

Dans ce chapitre on décrit le comportement asymptotique en temps grand des solutions de deux équations très "typiques" : l'équation de Boltzmann linéaire (ou équation de scattering) et l'équation de Fokker-Planck (et tout cela dans un cadre homogène en espace).

1 Inégalité de type Poincaré pour l'équation de scattering

L'équation de Boltzmann linéaire (ou scattering) sur une densité $f = f(t,v) \geq 0$, $t \geq 0$, $v \in \mathcal{V}$, s'écrit

$$\partial_t f = \mathcal{L}\, f := \int_{\mathcal{V}} (b' f' - b\, f)\, dv', \tag{1.1}$$

avec $b = b(v,v')$ et $b' = b(v',v)$, $b \geq 0$ une fonction, ou plus généralement

$$\partial_t f = \mathcal{L}\, f := \int_{\mathcal{V}} b' f'\, dv' - B(v)\, f, \tag{1.2}$$

et on suppose qu'il existe une fonction $\phi > 0$ telle que

$$\mathcal{L}^* \phi := \int_{\mathcal{V}} b\, \phi'\, dv' - B\, \phi = 0, \quad \text{soit donc} \quad B(v) := \int_{\mathcal{V}} \frac{\phi'}{\phi}\, b\, dv',$$

avec $\phi = \phi(v)$ et $\phi' = \phi(v')$. La première équation (1.1) correspond au choix

$$B(v) = \int_{\mathcal{V}} b\, dv', \quad \phi \equiv 1,$$

dans la seconde équation (1.2).

Exemple 1. On suppose $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^d$, $b' = k(v,v')\, F(v)$, pour une fonction symétrique $k(v,v') = k(v',v) > 0$ et une certaine fonction $0 < F \in L^1(\mathcal{V}) \cap \mathbf{P}(\mathcal{V})$. L'équation (1.1) devient

$$\partial_t f = \mathcal{L}\, f := \int_{\mathcal{V}} k\, (F\, f' - F'\, f)\, dv'. \tag{1.3}$$

Il est important de noter que $F = F(v)$ est une solution stationnaire de l'équation (1.5) puisque

$$\partial_t F = 0 = \mathcal{L}\, F. \tag{1.4}$$

Exemple 2. On suppose $\mathcal{V} = (0,\infty)$, $b' = b'\, \mathbf{1}_{v'>v}$, $\phi(v) = v$, et alors l'équation (1.2) devient l'équation de fragmentation

$$\partial_t f = \mathcal{L}\, f := \int_0^\infty b'\, f'\, dv' - B(v)\, f(v), \quad B(v) := \int_0^v \frac{v'}{v}\, b\, dv'. \tag{1.5}$$

Loi de conservation. Sans hypothèse supplémentaire, on déduit immédiatement que l'équation (1.2) possède une loi de conservation : toute solution satisfait au moins formellement

$$\int_{\mathcal{V}} f(t,v)\,\phi(v)\,dv = \int_{\mathcal{V}} f(0,v)\,\phi(v)\,dv,$$

puisque

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}} f\,\phi\,dv = \int_{\mathcal{V}} (\mathcal{L}f)\,\phi\,dv = \int_{\mathcal{V}} f\,(\mathcal{L}^*\phi)\,dv = 0.$$

Fontionnelle de Liapunov. On suppose qu'il existe une fonction $0 < F \in L^1(\mathcal{V}) \cap \mathbf{P}(\mathcal{V})$ qui est solution stationnaire

$$\mathcal{L}F = \int_{\mathcal{V}} b' F'\,dv' - \int_{\mathcal{V}} \frac{\phi'}{\phi}\,b\,dv'\,F = 0,$$

ce qui est vérifié dans le cas de l'exemple 1. Alors toute solution f de l'équation (1.2) satisfait au moins formellement

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}} f^2\,\frac{\phi}{F}\,dv = 2\int_{\mathcal{V}} (\mathcal{L}\,f)\,\frac{f}{F}\,dv = -D_2(f) \tag{1.6}$$

avec

$$D_2(f) := \int_{\mathcal{V}}\int_{\mathcal{V}} b'\,F\,\phi\left(\frac{f'}{F'} - \frac{f}{F}\right)^2 dvdv'. \tag{1.7}$$

En effet, dans le cas $\phi = 1$, le calcul est le suivant

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}f, f/F) &= \iint b'F'\,\frac{f'}{F'}\,\frac{f}{F} - \frac{1}{2}\iint b\,F\,\frac{f^2}{F^2} - \frac{1}{2}\iint b\,F\,\frac{f^2}{F^2}\\
&= \iint b'F'\,\frac{f'}{F'}\,\frac{f}{F} - \frac{1}{2}\iint b'\,F'\,\frac{(f')^2}{(F')^2} - \frac{1}{2}\iint b'\,F'\,\frac{f^2}{F^2}\\
&= -\frac{1}{2}\iint b'F'\left(\frac{f'}{F'} - \frac{f}{F}\right)^2,
\end{aligned}$$

où pour passer de la première ligne à la deuxième ligne on a utilisé le changement de nom de variables dans le deuxième terme

$$\iint b\,F\,\frac{f^2}{F^2} = \iint b'\,F'\,\frac{(f')^2}{(F')^2}$$

et le fait que F est une solution stationnaire dans le troisième terme

$$\int b\,F\,dv' = \int b'\,F'\,dv'.$$

Dans le cas ϕ général, le calcul est quasi identique

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}f, \phi\,f/F) &= \iint b'\,\phi\,F'\,\frac{f'}{F'}\,\frac{f}{F} - \frac{1}{2}\iint b\,\phi'\,F\,\frac{f^2}{F^2} - \frac{1}{2}\iint b\,\phi'\,F\,\frac{f^2}{F^2}\\
&= \iint b'\,\phi\,F'\,\frac{f'}{F'}\,\frac{f}{F} - \frac{1}{2}\iint b'\,\phi\,F'\,\frac{(f')^2}{(F')^2} - \frac{1}{2}\iint b'\,\phi\,F'\,\frac{f^2}{F^2}\\
&= -\frac{1}{2}\iint b'\,\phi\,F'\left(\frac{f'}{F'} - \frac{f}{F}\right)^2.
\end{aligned}$$

Un théorème. On se place dans le cas de l'exemple 1, et on suppose de plus qu'il existe deux constantes $0 < k_0 \le k_1 < \infty$ telles que

$$\forall\, v, v' \in \mathcal{V}, \qquad k_0 \le k(v,v') \le k_1.$$

On considère l'équation d'évolution de scattering (1.1) dans ce cas, équation à laquelle on adjoint une donnée initiale

$$f(0,v) = f_0(v) \quad \forall\, v \in \mathcal{V}.$$

Théorème 1.1 *Pour tout $f_0 \in L^1(\mathcal{V})$, on a*
(1) il existe une unique solution globale $f \in C([0,\infty); L^1(\mathcal{V}))$ à l'équation de scattering (1.1). *Cette solution vérifie la conservation de la masse*

$$\int_{\mathcal{V}} f(t,v)\, dv = \int_{\mathcal{V}} f_0(v)\, dv =: \langle f_0 \rangle$$

et le principe du maximum

$$f_0 \ge 0 \qquad \Rightarrow \qquad f(t,.) \ge 0 \quad \forall\, t \ge 0.$$

(2) assymptotiquement en temps grand la solution converge vers l'unique solution stationnaire de même masse

$$\|f(t,.) - \langle f_0 \rangle\, F\|_E \le e^{-k_0 t/2}\, \|f_0 - \langle f_0 \rangle\, F\|_E,$$

où $\|\cdot\|_E$ est la norme Hilbertienne définie par

$$\|f\|_E^2 := \int_{\mathcal{V}} f^2\, F^{-1}\, dv.$$

Des éléments de preuve du point (1) seront donnés dans le chapitre 2. Nous allons donner maintenant la preuve (formmelle) du point (2).

Inégalité fonctionnelle et comportement en temps grand. L'inégalité fonctionnelle suivante est vraie : pour toute fonction $f \in E$, on a

$$D_2(f) \ge k_0 \|f - \langle f \rangle\, F\|_E^2. \tag{1.8}$$

Il convient de remarquer que grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle f \rangle| \le \int_{\mathcal{V}} (|f| F^{-1/2})\, F^{1/2} \le \Big(\int_{\mathcal{V}} f^2 F^{-1}\Big)^{1/2} \Big(\int_{\mathcal{V}} F\Big)^{1/2} = \|f\|_E,$$

de sorte que la masse $\langle f \rangle$ est bien définie si $f \in E$. Acceptons un instant (1.8) et montrons la convergence (2) du Théorème 1.1. D'après (1.6), le fait que F est une solution stationnaire, le fait que f conserve la masse et (1.8), on a

$$\frac{d}{dt}\|f - \langle f \rangle F\|_E^2 = -D_2(f) \le -k_0 \|f - \langle f \rangle\, F\|_E^2,$$

et on conclut grâce au lemme de Gronwall.
Passons à la preuve de (1.8). Par hypothèse, on a une première inégalité

$$D_2(f) := \iint b'\, \phi\, F' \left(\frac{f'}{F'} - \frac{f}{F}\right)^2 \ge k_0 \iint F\, F' \left(\frac{f'}{F'} - \frac{f}{F}\right)^2.$$

En intégrant (en la variable v') l'identité

$$f\, F' - f'\, F = \left(\frac{f}{F} - \frac{f'}{F'}\right) F\, F',$$

on obtient

$$g = F \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{f}{F} - \frac{f'}{F'} \right) F' \, dv'$$

avec $g = f - \langle f \rangle F$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique

$$g^2 \le \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{f}{F} - \frac{f'}{F'} \right)^2 F \, F' \, dv' \times \int_{\mathcal{V}} F \, F' \, dv',$$

de sorte que l'on a la seconde inégalité

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{g^2}{F} \, dv \quad \le \quad \int_{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{f}{F} - \frac{f'}{F'} \right)^2 F \, F' \, dv' \, dv.$$

On conclut en mettant bout à bout ces deux inégalités.

2 Équation de la chaleur.

2.1 Inégalité de Nash et équation de la chaleur.

On considère l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta f \quad \text{dans } (0, \infty) \times \mathbb{R}^d, \qquad f(0, \cdot) = f_0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^d. \tag{2.1}$$

On peut montrer immédiatement grâce à la formule de repésentation

$$f(t, .) = \gamma_t * f_0, \quad \gamma_t(x) := \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp\Big(- \frac{|x|^2}{2t} \Big)$$

et à l'inégalité de Hölder que $f(t, .) \to 0$ lorsque $t \to \infty$, et plus précisément que pour tout $p \in (1, \infty]$ et une certaine constante $C_{p,d}$ on a le taux de convergence

$$\| f(t, .) \|_{L^p} \le \frac{C_{p,d}}{t^{\frac{d}{2}(1 - \frac{1}{p})}} \, \| f_0 \|_{L^1} \qquad \forall \, t > 0. \tag{2.2}$$

Nous allons donner une deuxième preuve de (2.2) dans le cas $p = 2$ qui n'est pas basée sur une formule de repésentation, qui est indéniablement plus longue, mais qui est également beaucoup plus "robuste" (cette même preuve s'applique à des équations beaucoup plus générale, parfois non linéaires).

Inégalité de Nash. Il existe C_d telle que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap H^1(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\| f \|_{L^2}^{1+2/d} \le C_d \, \| f \|_{L^1} \, \| \nabla f \|_{L^2}^{2/d}.$$

Preuve de l'inégalité de Nash. On écrit

$$\begin{aligned} \| f \|_{L^2}^2 \quad &= \quad \| \hat f \|_{L^2}^2 = \int_{|\xi| \le R} |\hat f|^2 + \int_{|\xi| \ge R} |\hat f|^2 \\ &\le \quad c_d \, R^d \, \| \hat f \|_{L^\infty} + \frac{1}{R^2} \int_{|\xi| \ge R} |\xi|^2 \, |\hat f|^2 \\ &\le \quad c_d \, R^d \, \| f \|_{L^1} + \frac{1}{R^2} \, \| \nabla f \|_{L^2}, \end{aligned}$$

et on optimise le choix de R en prenant $R := (\| \nabla f \|_{L^2}^2 / \| f \|_{L^1}^2)^{\frac{1}{d+2}}$.

Supposons pour simplifier que $f_0 \ge 0$ et donc $f(t, .) \ge 0$ par le principe du maximum. Il s'ensuit que

$$\frac{d}{dt} \| f(t, .) \|_{L^1} = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x) \, dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{div}_x \Big(\nabla_x f(t, x) \Big) \, dx = 0,$$

de sorte que l'on a conservation de la masse

$$\|f(t,.)\|_{L^1} = \|f_0\|_{L^1} \quad \forall\, t \geq 0.$$

D'autre part, on a

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} f(t,x)^2\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} f\Delta f\,dx = -\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|^2\,dx.$$

En combinant cette équation, l'inégalité de Nash et la conservation de la masse, on obtient l'inégalité différentielle

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} f(t,x)^2\,dx \leq -K\Big(\int_{\mathbb{R}^d} f(t,x)^2\,dx\Big)^{\frac{d+2}{d}}, \quad K = C_d\,\|f_0\|_{L^1}^{-4/d}.$$

Or pour une fonction satisfaisant l'inéquation différentielle

$$u' \leq -K\,u^{1+\alpha}, \quad \alpha = 2/d > 0,$$

on montre par des calculs élémentaires que

$$u^{-\alpha}(t) \geq \alpha\,K\,t + u_0^\alpha \geq \alpha\,K\,t,$$

et en conclusion que

$$\int_{\mathbb{R}^d} f^2(t,x)\,dx \leq C\,\frac{\Big(\|f_0\|^{4/d}\Big)^{d/2}}{t^{d/2}},$$

ce qui est préciément l'inégalité annoncée.

2.2 Solution auto-similaire et lien avec l'équation de Fokker-Planck

Il en fait possible d'être beaucoup plus précis que (2.2) et vraiment décrire comment la fonction $f(t,.)$ tend vers 0. Pour cela on va commencer par chercher des solutions particulières de l'équation de la chaleur que l'on va découvrir en identifiant des changements d'échelle judicieux. Cherchons donc une solution auto-similaire de (2.2), c'est-à-dire une solution de la forme

$$F(t,v) = t^\alpha\,G(t^\beta\,x),$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ à fixer et G un certain "profil auto-similaire". Comme F doit conserver la "masse"

$$\int_{\mathbb{R}^d} F(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} F(0,x)\,dx = t^\alpha \int_{\mathbb{R}^d} G(t^\beta\,x)\,dx,$$

cela donne une première relation $\alpha = \beta\,d$. On calcule ensuite

$$\partial_t F = \alpha\,t^{\alpha-1} G(t^\beta\,x) + \beta\,t^{\alpha-1}\,(t^\beta\,v)(\nabla G)(t^\beta\,x), \quad \Delta F = t^\alpha\,t^{2\beta}\,(\Delta G)(t^\beta\,x).$$

Afin de vérifier (2.1), on doit prendre $2\,\beta + 1 = 0$. On obtient donc

$$F(t,x) = t^{-d/2}\,G(t^{-1/2}\,x), \qquad \frac{1}{2}\Delta G + \frac{1}{2}\mathrm{div}(x\,G) = 0. \tag{2.3}$$

On s'apperçoit (oh ! comme c'est surprenant) qu'une solution $G \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathbf{P}(\mathbb{R}^d)$ de (2.3) doit satisfaire $\nabla G + x\,G = 0$ et donc est unique et donnée par

$$G(x) = M(x) := c_0\,e^{-|x|^2/2}, \quad c_0^{-1} = (2\,\pi)^{d/2}.$$

On retrouve donc avec G notre solution favorite de l'équation de la chaleur.

Maintenant on peut voir G comme une solution stationnaire de l'équation de Fokker-Planck

$$\frac{\partial}{\partial t} g = \frac{1}{2}\,L\,g = \frac{1}{2}\,\nabla\cdot(\nabla g + g\,x) \qquad \text{dans } (0,\infty)\times\mathbb{R}^d. \tag{2.4}$$

Le lien entre (2.1) et (2.4) est alors le suivant. Si f est solution de (2.4), un calcul élementaire montre que

$$f(t,x) = (1+t)^{-d/2}\, g(\log(1+t), (1+t)^{-1/2}\, x)$$

est solution de (2.1), et de plus $f(0,x) = g(0,x)$. Réciproquement, si f est une solution de (2.1) alors

$$g(t,x) := e^{d\,t/2}\, f(e^t - 1, e^{t/2}\, x)$$

est solution de (2.4). Cette expression nous donne donc l'existence d'une solution *au sens des distributions* à l'équation de Fokker-Planck (2.4) pour toute donnée initiale $f_0 = \varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ dès que l'on sait montrer l'éxistence d'une solution à l'équation de la chaleur, à l'aide d'une formule de repésentation par exemple.

3 Equation de Fokker-Planck et inégalité de Poincaré

3.1 Comportement asymptotique en temps grand des solutions de l'équation de Fokker-Planck

On s'intéresse à l'équation de Fokker-Planck

$$\frac{\partial}{\partial t} f = L\, f = \Delta f + \nabla \cdot (f\, \nabla V) \quad \text{dans } (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \tag{3.1}$$

$$f(0,x) = f_0(x) = \varphi(x), \tag{3.2}$$

où on suppose que le *"potentiel de confinement"* V est de la forme

$$V(x) := \langle x \rangle^\alpha + V_0, \quad \alpha \ge 1, \;\; V_0 \in \mathbb{R},$$

et où on note $\langle x \rangle := (1+|x|^2)^{1/2}$.
On commence par remarquer que

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} f(t,x)\, dx = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_x \cdot (\nabla_x f + f\, \nabla_x V)\, dx = 0,$$

de sorte que l'on a conservation de la masse. De plus, $F = e^{-V} \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathbf{P}(\mathbb{R}^d)$ pour un choix judicieux de $V_0 \in \mathbb{R}$ et $\nabla F = -F\, \nabla V$ de sorte que F est une solution stationnaire de (3.1).

Théorème 3.1 *Pour tout $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p < \infty$, on a :*
(1) Il existe une unique solution globale $f \in C([0,\infty); L^p(\mathbb{R}^d))$ à l'équation de Fokker-Planck (3.1). *Cette solution vérifie la conservation de la masse*

$$\langle f(t,.) \rangle := \int_{\mathbb{R}^d} f(t,x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f_0(x)\, dx =: \langle f_0 \rangle, \quad \textit{si } f_0 \in L^1(\mathbb{R}^d), \tag{3.3}$$

et le principe du maximum

$$f_0 \ge 0 \quad \Rightarrow \quad f(t,.) \ge 0 \quad \forall\, t \ge 0.$$

(2) Assymptotiquement en temps grand la solution converge vers l'unique solution stationnaire de même masse

$$\| f(t,.) - \langle f_0 \rangle\, F \|_E \le e^{-\lambda_P\, t}\, \| f_0 - \langle f_0 \rangle\, F \|_E, \tag{3.4}$$

où $\| \cdot \|_E$ est la norme Hilbertienne définie par

$$\|f\|_E^2 := \int_{\mathbb{R}^d} f^2\, F^{-1}\, dx$$

et λ_P est la meilleur constante dans l'inégalité de Poincaré

Des éléments de preuve du point (1) seront donnés dans le chapitre 2. Nous allons donner maintenant la preuve (formmelle) du point (2). Par linéarité de l'équation, il suffit de traiter le cas $\langle f_0 \rangle = 0$.

On commence par réécrire l'équation de Fokker-Planck sous la forme

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} f &= \operatorname{div}_x \big(\nabla_x f + F\, f\, \nabla_x F^{-1} \big) \\ &= \operatorname{div}_x \big(F \nabla_x (f\, F^{-1}) \big).\end{aligned}$$

On calcule alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int f^2\, F^{-1} &= \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_t f)\, f\, F^{-1}\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{div}_x \Big(F \nabla_x \big(\frac{f}{F} \big) \Big)\, \frac{f}{F}\, dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^d} F \left| \nabla_x \frac{f}{F} \right|^2 dx\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré du Theéorème 3.2 ci-desssous avec la fonction $g := f(t,.)/F$ et en remarquant que $\langle g \rangle_F = 0$, on a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int f^2\, F^{-1} \le -\lambda_P \int_{\mathbb{R}^d} F \left(\frac{f}{F} \right)^2 dx = -\lambda_P \int_{\mathbb{R}^d} f^2\, F^{-1}\, dx,$$

ce qui permet de conclure par Gronwall.

Théorème 3.2 *Il existe une constante $\lambda_P > 0$ telle que pour tout $g \in L^2(F^{1/2})$, on a*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla g|^2\, F\, dx \ge \lambda_P \int_{\mathbb{R}^d} |g - \langle g \rangle_F|^2\, F\, dx, \tag{3.5}$$

où on note

$$\langle g \rangle_\mu := \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\, \mu(dx)$$

pour toute mesure de probabilité $\mu \in \mathbf{P}(\mathbb{R}^d)$.

3.2 Preuve de l'inégalité de Poincaré

On procède en trois étapes.

3.2.1 Inégalité de Poincaré-Wirtinger dans un ouvert Ω borné

Lemme 3.3 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et soit $\nu \in \mathbf{P}(\Omega)$ une mesure de probabilité qui satisfait de plus $\nu, 1/\nu \in L^\infty(\Omega)$. Il existe une constante $\kappa \in (0,\infty)$, telle que pour toute fonction f, on a*

$$\kappa \int_\Omega |f - \langle f \rangle_\nu|^2\, \nu \le \int_\Omega |\nabla f|^2\, \nu, \qquad \langle f \rangle_\nu := \int_\Omega f\, \nu,$$

et donc

$$\int_\Omega f^2\, \nu \le \langle f \rangle_\nu^2 + \frac{1}{\kappa} \int_\Omega |\nabla f|^2\, \nu.$$

Preuve du Lemme 3.3. On part de

$$f(x) - f(y) = \int_0^1 \nabla f(z_t) \cdot (x - y)\, dt, \quad z_t = (1-t)\, x + t\, y.$$

En intégrant en la variable $y \in \Omega$ cette identité (multipliée préalablement par $\nu(y)$), on a

$$f(x) - \langle f \rangle_\nu = \int_\Omega \int_0^1 \nabla f(z_t) \cdot (x - y)\, dt\, \nu(y)\, dy,$$

puis par Cauchy-Schwarz

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega (f(x) - \langle f\rangle_\nu)^2\,\nu(x)\,dx &\le \int_\Omega\int_\Omega\int_0^1 |\nabla f(z_t)|^2\,|x-y|^2\,dt\,\nu(y)\,\nu(x)dydx \\
&\le C_1 \int_\Omega\int_\Omega\int_0^{1/2} |\nabla f(z_t)|^2\,dtdx\,\nu(y)dy + C_1 \int_\Omega\int_\Omega\int_{1/2}^1 |\nabla f(z_t)|^2\,dtdy\,\nu(x)dx \\
&= C_1 \int_\Omega\int_0^{1/2}\int_{\Omega(t,y)} |\nabla f(z)|^2\,\frac{dz}{1-t}\,dt\,\nu(y)dy + C_1 \int_\Omega\int_{1/2}^1\int_{\Omega'(t,x)} |\nabla f(z)|^2\,\frac{dz}{t}\,dt\,\nu(x)dx \\
&\le 2C_1 \int_\Omega |\nabla f(z)|^2\,dz,
\end{aligned}
$$

avec $C_1 := \|\nu\|_{L^\infty}\,\mathrm{diam}(\Omega)^2$. On en déduit immédiatement l'inégalité de Poincaré-Wirtinger pour la constante $\kappa^{-1} := 2\,C_1\,\|1/\nu\|_{L^\infty}$. ◫

3.2.2 Une fonction de Liapunov

Lorsque $V(x) \approx |x|^\alpha$ pour x grand, $\alpha \ge 1$, il existe W telle que $W \ge 1$ et il existe $\theta > 0$, $b, R \ge 0$ tels que

$$
(3.6) \qquad (L^*W)(x) := \Delta W(x) - \nabla V\cdot\nabla W(x) \le -\theta\,W(x) + b\,\mathbf{1}_{B(0,R)}(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^d.
$$

La preuve est élémentaire et nous la donnons dans le cas particulier $V(x) = |x|^2/2$. On définit $W(x) := e^{\gamma\langle x\rangle}$. On a

$$
\nabla W = \gamma\,\frac{x}{\langle x\rangle}\,e^{\gamma\langle x\rangle} \quad \text{et} \quad \Delta W = (\gamma^2 + \gamma\,\frac{d-1}{\langle x\rangle})\,e^{\gamma\langle x\rangle}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
L^*W = \Delta W - x\cdot\nabla W &= \gamma\,\frac{d-1}{\langle x\rangle}\,W + (\gamma^2-\gamma)\,W \\
&\le -\theta W + b\,\mathbf{1}_{B_R}
\end{aligned}
$$

pour tout $\theta \in (0,1/2)$ en choisissant $\gamma \in (0,1)$ ad'hoc puis R et b. ◫

A titre d'exercice, on pourra montrer (3.6) dans le cas général $V(x) := \langle x\rangle^\alpha$ et également dans tous les cas suivants :
(i) il existe $\alpha > 0$ et $R \ge 0$ tels que

$$
x\cdot\nabla V(x) \ge \alpha \qquad \forall\, x \notin B_R;
$$

(ii) il existe $a \in (0,1)$, $c > 0$ et $R \ge 0$ tels que

$$
a\,|\nabla V(x)|^2 - \Delta V(x) \ge c \qquad \forall\, x \notin B_R;
$$

(iii) V est convexe (ou est une perturbation à support compact d'une fonction convexe) et satisfait $e^{-V} \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

3.2.3 Fin de la preuve de l'inégalité de Poincaré

On écrit (3.6) sous la forme

$$
1 \le -\frac{L^*W(x)}{\theta\,W(x)} + \frac{b}{\theta\,W(x)}\,\mathbf{1}_{B(0,R)}(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d.
$$

Pour $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on en déduit

$$
\int g^2\,F \quad\le\quad -\int g^2\,\frac{L^*W(x)}{\theta\,W(x)}\,F + \frac{b}{\theta}\int_{B(0,R)} g^2\,\frac{1}{W}\,F \quad =: \; T_1 + T_2.
$$

Or d'une part, on a

$$\begin{aligned}
\theta\, T_1 &= \int \nabla W \cdot \Big\{ \nabla \left(\frac{g^2}{W}\right) F + \frac{g^2}{W}\, \nabla F \Big\} + \int \frac{g^2}{W}\, \nabla V \cdot \nabla W\, F \\
&= \int \nabla W \cdot \nabla \left(\frac{g^2}{W}\right) F \\
&= \int 2\, \frac{g}{W}\, \nabla W \cdot \nabla g\, F - \int \frac{g^2}{W^2}\, |\nabla W|^2\, F \\
&= \int |\nabla g|^2\, F - \int \Big| \frac{g}{W}\, \nabla W - \nabla g \Big|^2\, F \\
&\le \int |\nabla g|^2\, F
\end{aligned}$$

Et d'autre par, grâce à l'inégalité de Poincaré-Wirtinger dans $B(0,R)$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\theta}{b}\, T_2 &= \int_{B(0,R)} g^2\, \frac{1}{W}\, F \\
&\le F(B(0,R)) \int_{B(0,R)} g^2\, \nu_R, \qquad \nu_R := F(B(0,R))^{-1}\, F|_{B(0,R)} \\
&\le F(B(0,R)) \Big(\langle g \rangle_R^2 + C_R \int_{B(0,R)} |\nabla g|^2\, \nu_R \Big), \qquad \langle g \rangle_R = \int_{B(0,R)} g\, \nu_R.
\end{aligned}$$

En combinant les différentes inégalités, on a démontré

$$\int g^2\, F \le C \Big(\langle g \rangle_R^2 + \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla g|^2\, F \Big).$$

En considère maintenant $h \in C^2 \cap L^\infty$. On sait que pour tout $c \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} (h - \langle h \rangle_F)^2 F \le \phi(c) := \int_{\mathbb{R}^d} (h - c)^2\, F$$

puisque ϕ est un polynôme du deuxième degré qui prend son minimum en $c_h := \langle h \rangle_F$. On pose alors $g := h - \langle h \rangle_R$, de sorte que $\langle g \rangle_R = 0$, $\nabla g = \nabla h$ et ainsi

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} (h - \langle h \rangle_F)^2\, F &\le \int_{\mathbb{R}^d} g^2\, F \\
&\le C \Big(\langle g \rangle_R^2 + \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla g|^2\, F \Big) \\
&= C \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla h|^2\, F.
\end{aligned}$$

Cela termine la preuve de l'inégalité de Poincaré (3.5). ◫

A titre d'exercie, on pourra montrer que lorsque $V(x) = \langle x \rangle^\alpha$, $\alpha \ge 1$, ou seulement sous la condition (ii) de la fin de la section 3.2, on a l'inégalité forte de Poincaré

$$\int |\nabla g|^2\, F \ge \kappa \int |g - \langle g \rangle_F|^2\, (1 + |\nabla V|^2)\, F \qquad \forall\, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d).$$

4 Equation de Fokker-Planck et inégalité de Log Sobolev.

L'estimation 3.4 donne une réponse très satisfaisante (et optimale) à la question du retour vers l'équilibre pour l'équation de Fokker-Planck (3.1). Cette estimation et sa preuve ont cependant deux défauts : c'est une preuve "très linéaire" (elle ne s'adapte pas à un cadre plus général d'équations non-linéaires) et les données initiales auxquelles elles s'appliquent sont très "confinées". Nous allons présenter maintenant une série de résultats qui permettent de traiter des données initiales beaucoup plus générales, et qui également admettent des variantes non linéaires (ce que l'on verra dans le dernier chapitre). En passant nous serons amenés à démontrer la très fameuse inégalité de Log-Sobolev (ou Sobolev logarithmique).

4.1 Information de Fisher.

On s'intéresse à l'équation de Fokker-Planck avec potentiel de confinement harmonique $V(x) := |x|^2/2$, soit donc l'équation

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t} f = L\, f = \nabla \cdot (\nabla f + f\, x) \quad \text{ dans } (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \\ &f(0,x) = \varphi(x).\end{aligned}$$

On définit

$$D := \{f \in L^1(\mathbb{R}^d); \quad f \geq 0, \quad \int f = 1, \quad \int f\, x = 0, \quad \int f\, |x|^2 = d\}$$

et

$$D_{\leq} := \{f \in L^1(\mathbb{R}^d); \quad f \geq 0, \quad \int f = 1, \quad \int f\, x = 0, \quad \int f\, |x|^2 \leq d\}.$$

On observe que D est laissé invariant par les solutions de (3.1) et que M est la seule solution stationnaire appartenant à D. En effet, les équations correspondant aux premiers moments sont

$$\partial_t \langle f \rangle = 0, \quad \partial_t \langle f x \rangle = -d\, \langle f x \rangle, \quad \partial_t \langle f |x|^2 \rangle = 2d \langle f \rangle - 2 \langle f |x|^2 \rangle.$$

Pour le second point, on renvoit à la section précédente. Il est donc naturel de penser que toute solution de (3.1) de donnée initiale $\varphi \in D$ converge vers M. C'est ce que nous allons démontrer dans les deux sections suivantes.

On définit l'information de Fisher (ou fonctionnelle de Linnik) $I(f)$ et l'information relative de Fisher par

$$I(f) = \int \frac{|\nabla f|^2}{f} = 4 \int |\nabla \sqrt{f}|^2, \qquad I(f|M) = I(f) - I(M) = I(f) - d.$$

Lemme 4.1 *Pour tout $f \in D_{\leq}$, on a*

$$I(f|M) \geq 0, \tag{4.1}$$

avec égalité si, et seulement si, $f = M$.

Preuve de (4.1) . Soit l'ensemble $V := \{f \in D_{\leq} \text{ et } \nabla f \in L^2\}$. Pour tout $f \in V$, on a

$$\begin{aligned} 0 \leq J(f) \quad &:= \quad \int \left| 2 \nabla \sqrt{f} + x\, \sqrt{f} \right|^2\, dx \\ &= \quad \int \Big(4\, |\nabla \sqrt{f}|^2 + 2\, x \cdot \nabla f + |x|^2\, f \Big)\, dx = I(f) + \langle f |x|^2 \rangle - 2\, d \\ &\leq \quad I(f) - d = I(f) - I(M) =: I(f|M). \end{aligned}$$

De plus, si $I(f|M) = 0$ alors $J(f) = 0$ et donc $2 \nabla \sqrt{f} + x\, \sqrt{f} = 0$ p.p.. Par bootstrap (injection de Sobolev, de Morrey, puis calcul différentiel classique) on en déduit que$f \in C^\infty$. Soit alors $x_0 \in \mathbb{R}^d$ tel que $f(x_0) > 0$ (existe car $f \in V$) et $\mathcal{O}$ l'ouvert composante connexe de $\{f > 0\}$ contenant x_0. On déduit de l'identité précédente que $\nabla (\log \sqrt{f} + |x|^2/4) = 0$ dans $\mathcal{O}$ et donc $f(x) = e^{C - |x|^2/2}$ sur $\mathcal{O}$ avec $C \in \mathbb{R}$. Par continuité de u, on en déduit que $\mathcal{O} = \mathbb{R}^d$, et donc $C = -\log(2\,\pi)^{d/2}$ (condition de normalisation du fait que $f \in V$).

Lemme 4.2 *Dès que cela a un sens, on a*

$$\frac{1}{2} I'(f) \cdot \Delta f = - \sum_{ij} \int \Big(\frac{1}{f^2}\, \partial_i f\, \partial_j f - \frac{1}{f} \partial_{ij} f \Big)^2\, f, \tag{4.2}$$

$$\frac{1}{2} I'(f) \cdot (\nabla \cdot (f\, x)) = I(f), \tag{4.3}$$

$$\frac{1}{2} I'(f) \cdot L\, f = - \sum_{ij} \int \Big(\frac{1}{f^2}\, \partial_i f\, \partial_j f - \frac{1}{f} \partial_{ij} f + \delta_{ij} \Big)^2\, f - \Big(I(f) - I(M) \Big). \tag{4.4}$$

En particulier, on a

$$\frac{1}{2} I'(f) \cdot L(f) \leq -I(f|M) \leq 0.$$

Preuve du lemme. Preuve de (4.2). On a d'une part

$$I'(f) \cdot h = 2 \int \frac{\nabla f}{f} \nabla h - \frac{|\nabla f|^2}{f^2} \, h.$$

Ainsi en intégrant par partie par rapport à la variable x_i, il vient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} I'(f) \cdot \Delta f &= \int \frac{1}{f} \partial_j f \, \partial_{iij} f - \int \frac{1}{2\, f^2} \partial_{ii} f \, (\partial_j f)^2 \\
&= \int \frac{\partial_i f}{f^2} \partial_j f \, \partial_{ij} f - \frac{1}{f} \partial_{ij} f \, \partial_{ij} f + \int \frac{1}{f^2} \partial_i f \, \partial_j f \, \partial_{ij} f - \frac{\partial_i f}{f^3} \partial_i f \, (\partial_j f)^2 \\
&= -\sum_{ij} \int \Big(\frac{1}{f^2} \, \partial_i f \, \partial_j f - \frac{1}{f} \partial_{ij} f \Big)^2 \, f.
\end{aligned}$$

Preuve de (4.3). On part de l'expression

$$\frac{1}{2} I'(f) \cdot (\nabla \cdot (f\, x)) = \int \frac{\partial_j f}{f} \partial_{ij} (f\, x_i) - \frac{(\partial_j f)^2}{2\, f^2} \, \partial_i (f\, x_i).$$

Or

$$\begin{aligned}
\partial_{ij} (f\, x_i) - \frac{(\partial_j f)}{2\, f} \, \partial_i (f\, x_i) &= \partial_{ij} f \, x_i + d \, \partial_j f + \delta_{ij} \, \partial_j f - \partial_i f \, \partial_j f \, \frac{x_i}{2\, f} - \frac{d}{2} \partial_j f \\
&= \partial_{ij} f \, x_i + (\frac{d}{2} + 1) \, \partial_j f - \partial_i f \, \partial_j f \, \frac{x_i}{2\, f}.
\end{aligned}$$

Il vient donc

$$\frac{1}{2} I'(f) \cdot (\nabla \cdot (f\, x)) = (\frac{d}{2} + 1) \, I(f) + \int \frac{\partial_j f}{f} \, \partial_{ij} f \, x_i - \int \frac{\partial_j f}{f} \, \partial_i f \, \partial_j f \, \frac{x_i}{2\, f}.$$

Enfin, on remarque que

$$-\frac{d}{2} \, I(f) = \frac{1}{2} \int \partial_i \left(\frac{(\partial_j f)^2}{f} \right) \, x_i = \int \frac{\partial_j f \, \partial_{ij} f}{f} \, x_i - \frac{1}{2} \frac{(\partial_j f)^2}{f^2} \, \partial_i f \, x_i,$$

ce qui permet de conclure

$$\frac{1}{2} I'(f) \cdot (\nabla \cdot (f\, x)) = I(f).$$

Preuve de (4.4). On part de l'expression suivante que l'on développe grâce à (4.2)

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sum_{ij} \int \Big(\frac{1}{f^2} \, \partial_i f \, \partial_j f - \frac{1}{f} \partial_{ij} f + \delta_{ij} \Big)^2 \, f \\
&= -\frac{1}{2} I'(f) \cdot \Delta f + 2 \sum_i \int \Big(\partial_{ii} f - \frac{1}{f} \, (\partial_i f)^2 \Big) + d \int f.
\end{aligned}$$

De $\int f = 1$, $\int \partial_{ii} f = 0$ et (4.3) on tire

$$0 \quad \leq \quad -\frac{1}{2} I'(f) \cdot \Delta f - 2 I(f) + d = -\frac{1}{2} I'(f) \cdot L f + d - I(f),$$

ce qui termine la preuve de (4.4) ainsi que celle du Lemme. ◻

Théorème 3.2. *La fonctionnelle I de Fisher décroit le long des solutions de l'équation de Fokker-Planck, i.e. est une fonctionnelle de Liapunov, et plus précisémment*

$$I(f(t,.)|M) \leq e^{-2\, t} \, I(\varphi|M). \tag{4.5}$$

Cela implique en particulier la convergence asymptotique en temps grand vers M des solutions de l'équation de Fokker-Planck pour des données initiales $\varphi \in D \cap V$. Plus précisémment,

$$\forall \varphi \in D \cap V \qquad f(t,.) \to M \quad \textit{dans} \quad L^q \cap L^1_2 \quad \textit{lorsque} \quad t \to \infty, \tag{4.6}$$

pour tout $q \in [1, 2^*/2)$.

Preuve du Théorème 3.2. D'une part, grâce à (4.4), on a

$$\frac{d}{dt} I(f|M) \le -2\, I(f|M), \tag{4.7}$$

et on déduit (4.5) du lemme de Gronwall. D'autre part, par l'inégalité de Sobolev, on a

$$\|f\|_{L^{2^*/2}} = \|\sqrt{f}\|^2_{L^{2^*}} \le C\, \|\nabla \sqrt{f}\|_{L^2} = C\, I(f)^2 \le C\, I(\varphi)^2.$$

Soit maintenant (t_n) une suite croissante tendant vers $+\infty$. Par Rellich, on peut extraire une sous-suite telle que $\sqrt{f(t_{n_k})}$ converge p.p., fortement dans $L^{2\,q}$, faiblement dans $\dot H^1$ vers une limite notée $\sqrt{g}$, et donc $f(t_{n_k})$ converge vers g en norme dans $L^q \cap L^1_k$ pour tout $q \in [1, 2^*/2)$, $k \in [0,2)$. En particulier, $g \in V$. Enfin, puisque $2\nabla\sqrt{f(t_{n_k})} - x\sqrt{f(t_{n_k})} \to 2\nabla\sqrt{g} - x\sqrt{g}$ faiblement dans L^2_{loc} (par exemple) alors

$$0 \le J(g) \le \liminf_{k\to\infty} J(f(t_{n_k},.) = \liminf_{k\to\infty} I(f(t_{n_k},.)|M) = 0.$$

De $J(g) = 0$ et $g \in V \cap D_\le$ on déduit que $g = M$ et c'est donc toute la famille $(f(t))_{t\ge 0}$ qui converge. ◻

4.2 Entropie et inégalité de Log-Sobolev.

On définit l'entropie $H(f)$ et l'entropie relative $H(f|M)$ par

$$H(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f\, \log f\, dx, \quad H(f|M) = H(f) - H(M) = \int_{\mathbb{R}^d} j(f/M)\, M\, dx,$$

$j(s) = s\, \log s - s + 1$.

On commence par remarquer que pour $f \in \mathbf{P}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\begin{aligned} H'(f)\cdot L(f) \quad &:= \quad \int_{\mathbb{R}^d} (1+\log f)\,[\Delta f + \nabla(x\, f)] \\ &= \quad -\int_{\mathbb{R}^d} \nabla f \cdot \nabla \log f - \int_{\mathbb{R}^d} x\, f\cdot \nabla \log f \\ &= \quad -I(f) + d\,\langle f\rangle = -I(f|M). \end{aligned}$$

Ainsi, l'entropie est une fonctionnelle de Liapunov pour l'équation de Fokker-Planck, puisque

$$\frac{d}{dt} H(f|M) = -I(f|M) \le 0. \tag{4.8}$$

Théorème 4.3 (Inégalité de Sobolev logarithmique). *Pour tout $\varphi \in D$, $\sqrt{\varphi} \in \dot H^1$, on a l'inégalité de Log-Sobolev*

$$H(\varphi|M) \le \frac{1}{2} I(\varphi|M).$$

Cette inégalité s'écrit également et de manière équivalente

$$\int_{\mathbb{R}^d} f/M \ln(f/M)\, M\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f \ln f - \int_{\mathbb{R}^d} M \ln M \le \frac{1}{2}\Big(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\nabla f\, \nabla f}{f} - d\Big)$$

ou encore

$$\int_{\mathbb{R}^d} u^2\, \log(u^2)\, M(dx) \le 2 \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2\, M(dx).$$

Pour de nombreuses applications, il est important de noter que la constante dans l'inégalité de Log-Sobolev ne dépend pas de la dimension, ce qui n'est pas vraie pour l'inégalité de Poincaré.

Preuve du Théorème 4.2. D'une part, de (4.8) et (4.6), on tire

$$\begin{aligned} H(\varphi) - H(M) &= \lim_{T\to\infty} [H(\varphi) - H(f_T)] = \lim_{T\to\infty} \int_0^T \left[-\frac{d}{dt} H(f|M)\right] dt \\ &= \lim_{T\to\infty} \int_0^T \left[\frac{1}{2} I(f|M)\right] dt. \end{aligned}$$

De cette identité et de (4.7) on déduit

$$\begin{aligned} H(\varphi) - H(M) &\le \lim_{T\to\infty} \int_0^T \left[-\frac{1}{2}\frac{d}{dt} I(f)\right] dt \\ &= \lim_{T\to\infty} [I(\varphi) - I(f_T)] = \lim_{T\to\infty} [I(\varphi|M) - I(f_T|M)] = I(\varphi|M), \end{aligned}$$

grâce à (4.5).

Lemme 4.4 (inégalité de Csiszár-Kullback). *Soient μ et ν deux mesures de probabilité telles que $\nu = g\,\mu$ pour une certaine fonction mesurable positive. Alors*

$$\|\mu - \nu\|_{VT}^2 := \|g-1\|^2_{L^1(d\mu)} \le 2 \int g \log g \, d\mu.$$

Preuve du Lemme 4.4. Preuve 1. On vérifie (dériver trois fois la différence des deux termes) que

$$\forall u \ge 0 \qquad 3\,(u-1)^2 \le (2\,u + 4)\,(u \log u - u + 1).$$

Alors par Cauchy-Schwarz

$$\int |g-1|\, d\mu \le \sqrt{\frac{1}{3}\int (2\,g+4)\, d\mu} \sqrt{\int (g\log g - g + 1)\, d\mu} = \sqrt{2 \int g \log g \, d\mu}$$

Preuve 2. Voici une preuve un peu moins miraculeuse. Par la formule de Taylor, on a

$$\begin{aligned} h(g) &:= g\log g - g + 1 = h(1) + (g-1)\,h'(1) + (g-1)^2 \int_0^1 h''(1 + s\,(g-1))\,(1-s)\, ds \\ &= (g-1)^2 \int_0^1 \frac{1-s}{1+s\,(g-1)}\, ds \end{aligned}$$

Par Fubini :

$$H(g) := \int (g\log g - g + 1)\, d\mu = \int_0^1 (1-s) \int \frac{(g-1)^2}{1+s\,(g-1)} d\mu\, ds.$$

Pour tout $s \in [0,1]$, par Cauchy-Schwarz et puisque ν et $g\,\nu$ sont des mesures de probabilité

$$\left(\int |g-1|\, d\mu\right)^2 \le \left(\int \frac{(g-1)^2}{1+s\,(g-1)} d\mu\right)\left(\int [1+s\,(g-1)] d\mu\right) = \int \frac{(g-1)^2}{1+s\,(g-1)} d\mu.$$

En conclusion, on a

$$H(g) \ge \int_0^1 \left(\int |g-1|\, d\mu\right)^2 (1-s)\, ds = \frac{1}{2}\left(\int |g-1|\, d\mu\right)^2,$$

ce qui démontre encore une fois l'inégalité de Csiszár-Kullback. ◻

Théorème 4.5 *Pour toute donnée initiale $\varphi \in D$ telle que $H(\varphi) < \infty$ la solution f de l'équation de Fokker-Planck satisfait*

$$H(f|M) \le e^{-t/2}\, H(\varphi|M)$$

et donc

$$\|f - M\|_{L^1} \le \sqrt{2}\, e^{-t/4}\, H(\varphi|M)^{1/2}.$$

A titre d'exercice, on pourra montrer que les Théorèmes 4.3 et 4.5 se généralisent au cas d'un potentiel sur-harmonique $V(x) = \langle x \rangle^\alpha/\alpha$ pour tout $\alpha \ge 2$.

4.3 De log-Sobolev à Poincaré.

Lemme 4.6 *Si l'inégalité de log-Sobolev*

$$\lambda\, H(f|M) \le I(f|M) \quad \forall\, f \in D$$

est vérifiée pour une constante $\lambda > 0$, alors l'inégalité de Poincaré

$$\lambda\, \|h - M\|^2_{L^2(M^{-1/2})} \le \int |\nabla h|^2\, M^{-1} \quad \forall\, h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d),\ \langle h[1, v, |v|^2]\, \rangle = 0,$$

est également vraie pour la même constante $\lambda > 0$.

Le lemme donne une nouvelle preuve de l'inégalité de Poincaré. Cette démarche n'est pas très "économique" puisqu'elle demande de démontrer au préalable l'inégalité de log-Sobolev qui est sensiblement plus compliqué à démontrer que l'inégalité de Poincaré. De plus les restrictions sur le potentiel sont plus stricte pour l'inégalité de log-Sobolev. Cependant, ce résultat permet de comparer les constantes dans les deux inégalité et la preuve est assez robuste pour s'adapter à des cadres non linéaires.

Preuve du Lemme 4.6. On ne traite que le cas $\lambda = 2$ qui a été établi dans le Théorème 4.3. Soit $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\int h(v)\, [1, v, |v|^2]\, dv = [0, 0, 0]$. On applique l'inégalité de log-Sobolev à la fonction $f = M + \varepsilon\, h$, ce qui donne

$$\frac{H(M + \varepsilon\, h) - H(M)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\, H(f|M) \le \frac{1}{2\,\varepsilon^2} I(f|M) = \frac{I(M + \varepsilon\, h) - I(M)}{2\,\varepsilon^2}.$$

Soit donc en faisant un DL à l'ordre 2 dans les deux fonctionnelles

$$f \log f = M \log M + \varepsilon\, h\, (1 + \log M) + \frac{\varepsilon^2}{2}\, \frac{h^2}{M} + \mathcal{O}(\varepsilon^3),$$

$$\frac{|\nabla f|^2}{f} = \frac{|\nabla M|^2}{M} + \varepsilon \left\{ 2\, \frac{\nabla M}{M} \cdot \nabla h - \frac{|\nabla M|^2}{M^2}\, h \right\} + \varepsilon^2 \left\{ \frac{|\nabla h|^2}{M} - 2\, h\, \frac{\nabla M}{M^2} \cdot \nabla h + \frac{|\nabla M|^2}{M^3}\, h^2 \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^3),$$

en passant à la limite $\varepsilon \to 0$ et en utilisant que les termes du premier ordre s'annulent puisque (par intégration par parties)

$$H'(M) \cdot h = \int_{\mathbb{R}^d} (\log M + 1)\, h = 0,$$

$$I'(M) \cdot h = \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \frac{|\nabla M|^2}{M^2} - 2\, \frac{\Delta M}{M} \right\} h = 0,$$

on obtient

$$H''(M) \cdot (h, h) \le I''(M) \cdot (h, h).$$

Cela se traduit par

$$\int \frac{h^2}{M} \le \int \left\{ \frac{|\nabla h|^2}{M} + \nabla\Big(\frac{\nabla M}{M^2}\Big)\, h^2 + \frac{|\nabla M|^2}{M^3}\, h^2 \right\},$$

et donc

$$(1 + d) \int \frac{h^2}{M} = \int \frac{h^2}{M} \left\{ 1 - \frac{\Delta M}{M} + \frac{|\nabla M|^2}{M^2} \right\} \le \int \frac{|\nabla h|^2}{M},$$

ce qui est bien l'inégalité de Poincaré. $\square$