Proposition de stage de M2 :
Autour de la diffusion fractionaire

Ce stage portera sur l'équation de diffusion fractionnaire

$$\partial_t f = I[f] \ + \mathrm{div}_x(Ef)$$

où I est le Laplacien fractionnaire défini par

$$I[f](x) := \int_{\mathbf{R}^d} \frac{f(y) - f(x)}{|y - x|^{d+\alpha}} \, dy, \quad \alpha \in (0, 2),$$

et E est un champ de force de confinement, ou à des variantes. L'objectif du stage est de revisiter l'analyse mathématique de ce modèle aussi bien en ce qui concerne son caractère bien posé (existence, unicité), qu'en ce qui concerne le comportement qualitatif des solutions (régularisation, convergence asymptotique), en particulier lorsque E n'est pas régulier.

(1) On commencera par une recherche bibliographique afin de lister les différents articles et résultats connus pour ce type de modèle. On pourra se référer à [1,3,6] et aux citations qui s'y trouvent.

(2) Sous quelles conditions sur E peut-on obtenir des bornes qui peuvent être utilisées pour établir l'existence de solutions, l'existence d'un semi-groupe associé, de bonnes propriétés sur la solution fondamentale (régularisation). Pour ce dernier point on pourra essayer d'adapter l'analyse de J. Nash [5].

(3) R. DiPerna & P.-L. Lions ont introduit la notion de renormalisation et solution renormalisée dans le cadre des équations de transport [2]. Cette technique a également été adaptée par la suite à certaines classes d'équations paraboliques. Les implications de la renormalisation sont multiples : préservation de la positivité, unicité, continuité en temps pour la topologie forte. Une question naturelle est de savoir s'il est également possible de renormaliser toutes les solutions faibles de l'équation de diffusion fractionnaire ? Est-il possible de construire des solutions renormalisables ? On essaiera notamment de comprendre la preuve et la portée de [1].

(4) Il est bien connu que l'équation de diffusion classique (et certaines formes d'équations de Boltzmann linéaires) satisfait un principe du maximum faible et fort et que celui-ci est un outil puissant pour établir des propriétés qualitatives des solutions. Qu'en est-il pour l'équation de diffusion fractionnaire ?

(5) Pour le problème stationnaire, on s'attachera à démontrer l'existence et l'unicité d'une solution stationnaire positive et normalisée. On se posera la question de la convergence des solutions vers cet équilibre et de l'obtention d'un taux de convergence. On pourra essayer d'adapter les techniques développées dans [4].

Le travail entrepris dans ce stage pourra être poursuivi dans le cadre d'une thèse de doctorat.

Renseignements pratiques :

Lieu : Université Paris-Dauphine
Durée du stage : 5 mois
Rémuneration/Indemnisation forfaitaire : oui
Responsable de stage : Stéphane Mischler
Email : mischler@ceremade.dauphine.fr

Références :

[1] N. Alibaud, B. Andreianov, M. Bendahmane, *Renormalized solutions of the fractional Laplace equation*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 348 (2010), no. 13-14, 759–762.

[2] R. J. DiPerna, P.-L. Lions, *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces*, Invent. Math. 98 (1989), no. 3, 511–547.

[3] I. Gentil, C. Imbert, *The Lévy-Fokker-Planck equation : Φ-entropies and convergence to equilibrium*, Asymptotic Analysis Vol. 59 (2008), No. 3-4, pp. 125-138

[4] S. Mischler, J. Scher, *Spectral analysis of semigroups and growth-fragmentation equations*, (arXiv 2013), à paraître aux Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire

[5] J. Nash, *Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations*, Amer. J. Math. 80 (1958) 931–954.

[6] I. Tristani, *Fractional Fokker-Planck equation*, Commun. Math. Sci. 13 (2015), no. 5, 1243–1260.