

Proposition de stage de M2 :
Equations de Fokker-Planck cinétiques,
hypoellipticité/coercivité et modèle de Hodgkin–Huxley

Ce stage portera sur des EDP d'évolution de type parabolique dégénérée

$$\partial_t f = \operatorname{div}_z(A\nabla_z f) + \operatorname{div}_z(Bf),$$

sur l'inconnue $f = f(t, z)$, $t \geq 0$, $z \in \Omega \subset \mathbf{R}^D$, où A est une matrice positive dégénérée. Un cas particulier est l'équation de Fokker-Planck cinétique associée au processus probabiliste de Langevin

$$\partial_t f = -v \cdot \nabla_x f + \operatorname{div}_v(E(x)f + \nabla_v f),$$

où par exemple $z = (x, v)$, $x \in \mathbf{R}^d$, $v \in \mathbf{R}^d$. Suivant l'intérêt du stagiaire différents problèmes pourront être considérés.

(1) Le modèle de Hodgkin–Huxley permet de décrire de manière assez précise l'état d'un neurone ou d'un réseau de neurones, voir [2] et les références citées. L'objectif du stage pourrait être d'essayer de généraliser les résultats (existence, unicité, comportement asymptotique) obtenus dans [8] pour le modèle simplifié de FitzHugh–Nagumo au cas du modèle de Hodgkin–Huxley.

(2) Pour l'équation de Fokker-Planck cinétique dans le cas d'un champ E "fortement" confinent, il a été démontré, notamment dans [9,7], que les solutions convergent vers un état d'équilibre avec taux exponentiel. En adaptant les techniques développées dans [5], est-il également possible d'établir un taux de convergence dans le cas d'un champ "faiblement" confinent ?

(4) Lorsque la matrice A est très dégénérée, il peut arriver que le modèle ne possède pas un unique état stationnaire normalisé. Le comportement asymptotique (ergodique) est moins simple que dans le cas non dégénéré mais cependant possible. C'est le sujet du cours au collège de France "Equations paraboliques et ergodicité" de P.-L. Lions en 2014-2015. L'objectif de ce stage serait dans un premier temps de visionner, prendre en note et comprendre ce cours. Dans un deuxième temps, on cherchera à comprendre comment les techniques de factorisation de semi-groupe introduites dans [4] permettent d'apporter des réponses à ce type de problème et de retrouver ou généraliser les résultats connus.

(4) Les notions d'hypoellipticité et d'hypocoercivité ont été introduites respectivement par Hörmander et Villani pour appréhender les questions de régularité et de convergence vers l'équilibre des solutions de l'équation de Fokker-Planck cinétique. L'objectif de ce stage serait d'une part de bien comprendre les outils permettant de montrer la régularisation / le gain d'intégrabilité pour les équations de Fokker-Planck cinétique ou plus généralement pour les équations paraboliques dégénérées en partant de [9] et des travaux cités. Dans un second temps, on s'intéressera à la question de la convergence vers l'équilibre à l'aide de technique de type inégalité de Poincaré et inégalité de Sobolev logarithmique en se référant notamment à [1,3,9]. Finalement, on cherchera à comprendre si l'hypoellipticité (+ conditions ?) implique l'hypocoercivité pour ce type de modèle, en partant du cas de l'équation de Fokker-Planck cinétique et en allant vers des modèles plus généraux (en particulier avec coefficients peu réguliers).

Le travail entrepris pourra être poursuivi dans le cadre d'une thèse de doctorat.

Renseignements pratiques :

Lieu : Université Paris-Dauphine
Durée du stage : 5 mois
Rémunération/Indemnisation forfaitaire : oui
Responsable de stage : Stéphane Mischler
Email : mischler@ceremade.dauphine.fr

Références :

- [1] A. Arnold, J. Erb, *Sharp entropy decay for hypocoercive and non-symmetric Fokker-Planck equations with linear drift*, arXiv 2014
- [2] J. Baladron, D. Fasoli, O. Faugeras, J. Touboul, *Mean-field description and propagation of chaos in networks of Hodgkin-Huxley and FitzHugh-Nagumo neurons*, J. Math. Neurosci. 2 (2012), Art. 10, 50 pp.
- [3] F. Baudoin, *Bakry-Emery meet Villani*, (arXiv 2013)
- [4] M.P. Gualdani, S. Mischler, C. Mouhot, *Factorization for non-symmetric operators and exponential H-theorem*, (arXiv 2011)
- [5] O. Kavian, S. Mischler, *The Fokker-Planck equation with subcritical confinement force*, (arXiv 2015)
- [6] P.-L. Lions, *Equations paraboliques et ergodicité*, cours au collège de France, <http://www.college-de-france.fr/site/pierre-louis-lions/course-2014-2015.htm>
- [7] S. Mischler, C. Mouhot, Exponential Stability of slowly decaying solutions to the Kinetic-Fokker-Planck equation, (2014) accepté pour publication à Arch. Rational Mech. Anal.
- [8] S. Mischler, C. Quiñinao, J. Touboul, *On a kinetic FitzHugh-Nagumo model of neuronal network*, (arXiv 2015), à paraître dans Comm. Math. Phys.
- [9] C. Villani, *Hypocoercivity*, Mem. Amer. Math. Soc. 202 (2009), no. 950