

Proposition de stage de M2 : Stabilité pour des modèles de populations biologiques en interaction

L'objectif de ce stage est de considérer un modèle d'EDP d'évolution décrivant un système biologique d'individus en interaction et d'en faire l'analyse qualitative. On s'intéressera en particulier à la stabilité des états stationnaires (éventuellement singuliers) à l'aide des (et en se familiarisant donc avec les) techniques de semi-groupes développées récemment notamment dans [9,10].

Suivant l'intérêt du stagiaire différents problèmes pourront être considérés.

(1) Selection-Mutation. On considère l'équation

$$\partial_t f = f(a - b[f]) + M[f]$$

sur la densité $f = f(t, x) \geq 0$ d'individus dont le trait est $x \in I \subset \mathbf{R}$ à l'instant $t \geq 0$ pour des coefficients/opérateurs de selection a, b et de mutation M . On commencera par faire un travail bibliographique (en commençant par exemple par [6] et les travaux de G. Raoul sur le même thème, en particulier [3,11]) pour référencer les résultats connus. On cherchera à appliquer les techniques de factorisation et de stabilité de semi-groupes à ces modèles. En particulier, en l'absence de mutation, il est connu que l'équation de selection admet des solutions stationnaires éventuellement multiples et singulières (formées de plusieurs masses de Dirac). On s'intéressera à la stabilité par perturbation de ces états stationnaires et à leurs propriétés de stabilité asymptotique.

(2) Comportement collectif. On se posera le même genre de question pour des modèles d'alignement tels qu'ils apparaissent dans l'article de synthèse [4] ou l'article récent [5]. Un point de départ pourra être un travail bibliographique à partir des articles d'A. Frouvelle sur ce thème.

(3) Onde progressive en chimiotaxie. On s'intéressera aux résultats récents d'existence d'ondes progressives et de leur stabilité pour des modèles cinétiques de transport-réaction tels que ceux établis dans [1,2]. Un point de départ pourra être un travail bibliographique à partir des articles d'E. Bouin sur ce thème.

(4) Croissance-fragmentation sous-critique. On considère l'équation

$$\partial_t f = -\partial_x(af) - Bf + \int_x^\infty b_* f_* dx_*$$

sur la densité $f = f(t, x) \geq 0$ d'individus dont la taille est $x \geq 0$ à l'instant $t \geq 0$. Sous des conditions de croissance (sur-critique) sur les coefficients de croissance et de fragmentation, il est connu (voir par exemple [9] et les références citées) que ce problème admet un unique profil malthusien et que la solution associée est exponentiellement attractive. Il est également connu que sous des conditions plus larges (sous-critique, voir par exemple, [7]) il existe un unique profil malthusien. L'objectif de ce stage sera de généraliser les résultats d'attractivité de la solution associée dans un cadre sous-critique en adaptant les techniques de semi-groupes sous-dissipatifs développées dans [8].

Le travail entrepris dans ce stage pourra être poursuivi dans le cadre d'une thèse de doctorat.

Renseignements pratiques :

Lieu : Université Paris-Dauphine
Durée du stage : 5 mois
Rémunération/Indemnisation forfaitaire : oui
Responsable de stage : Stéphane Mischler
Email : mischler@ceremade.dauphine.fr

Références :

- [1] E. Bouin, V. Calvez, G. Nadin, Propagation in a kinetic reaction-transport equation : travelling waves and accelerating fronts, accepted for publication in ARMA, 2014
- [2] E. Bouin, V. Calvez, G. Nadin, Hyperbolic traveling waves driven by growth, *Math. Models Methods Appl. Sci.* 24, 1165 (2014)
- [3] A. Calsina, S. Cuadrado, L. Desvillettes, G. Raoul, *Asymptotics of steady states of a selection-mutation equation for small mutation rate*, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 143 (2013), no. 6, 1123–1146.
- [4] P. Degond, A. Frouvelle, J.-G. Liu, S. Motsch, L. Navoret, *Macroscopic models of collective motion and self-organization*, Séminaire Laurent Schwartz—Équations aux dérivées partielles et applications. Année 2012–2013, Exp. No. I, 27 pp., Sémin. Équ. Dériv. Partielles, École Polytech., Palaiseau, 2014.
- [5] P. Degond, A. Frouvelle, G. Raoul, *Local stability of perfect alignment for a spatially homogeneous kinetic model*, *J. Stat. Phys.* 157 (2014), no. 1, 84–112.
- [6] L. Desvillettes, P.-E. Jabin, S. Mischler, G. Raoul, *On selection dynamics for continuous structured populations*, *Commun. Math. Sci.* 6 (2008), no. 3, 729–747
- [7] M. Doumic, P. Gabriel, *Eigenelements of a general aggregation-fragmentation model*, *Math. Models Methods Appl. Sci.* 20 (2010), no. 5, 757–783.
- [8] O. Kaviani, S. Mischler, *The Fokker-Planck equation with subcritical confinement force*, (arXiv 2015)
- [9] S. Mischler, J. Scher, *Spectral analysis of semigroups and growth-fragmentation equations*, (arXiv 2013), à paraître aux *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*
- [10] S. Mischler, I. Tristani, *Uniform semigroup spectral analysis of the discrete, fractional & classical Fokker-Planck equations*, (arXiv 2015)
- [11] G. Raoul, *Long time evolution of populations under selection and vanishing mutations*, *Acta Appl. Math.* 114 (2011), no. 1-2, 1–14.